This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

SAC
6633

Bound 1944

HARVARD UNIVERSITY

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY

Exchange

[redacted]

MAR 13 1930

MCZ LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWÖLFTER BAND.

1860.

MIT 1 TAFEL.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Sachs, Krystallbildungen bei dem Gefrieren und Veränderung der Zellhäute bei dem Aufthauen saftiger Pflanzentheile 1

Möbius, Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit 51

Funke, über photographische Vervielfältigung der Myographioncurven 65

Schlömilch, Ein neuer statischer Beweis für das Paralellogramm der Kräfte 68

Fechner, über die Contrastempfindung 71

Derselbe, Einige Bemerkungen gegen die Abhandlung Prof. Osann's „Ueber Ergänzungsfarben" in der Würzburger naturwiss. Zeitschr. Bd. I. S. 61. ff. 146

Derselbe, Ueber die ungleiche Deutlichkeit des Gehörs auf linkem und rechtem Ohre 166

Hofmeister, Ueber die durch die Schwerkraft bestimmten Richtungen von Pflanzentheilen 175

Bruhns, Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 in Tarazona in Spanien. Mit 1 Tafel 211

Digitized by Google

Digitized by Google

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Herr Staatsminister a. D. *Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim.*

Seine Excellenz der Herr Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Johann Paul von Falkenstein.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.

- Professor *Hermann Brockhaus* in Leipzig, stellvertretender Secretär der phil.-histor. Classe.
- Hofrath *Eduard Albrecht* in Leipzig.
- Professor *Conrad Bursian* in Leipzig.
- —— *Gustav Flügel* in Dresden.
- Rector *Friedrich Franke* in Meissen.
- Geheimer Regierungsrath und Geheimer Kammerrath *Hans Conon von der Gabelentz* in Altenburg.
- Geheimer Hofrath *Karl Göttling* in Jena.
- Hofrath *Gustav Hänel* in Leipzig.

Digitized by Google

Herr Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Jena.
- Hofrath *Karl Nipperdey* in Jena.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Hofrath *Ludwig Preller* in Weimar.
- —— *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Domherr *Friedrich Tuch* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wachsmuth* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.
- Professor *Anton Westermann* in Leipzig.
- —— *Friedrich Zarncke* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Moritz Haupt* in Berlin.
- —— *Otto Jahn* in Bonn.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Hofrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Professor *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Ernst Heinrich Weber* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Geheimer Medicinalrath *Karl Gustav Carus* in Dresden.
- Professor *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- —— *Otto Linné Erdmann* in Leipzig.
- —— *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Geheimer Regierungsrath *Peter Andreas Hansen* in Gotha.
- Doctor *Wilhelm Hofmeister* in Leipzig.
- Hofrath *Karl Gotthold Lehmann* in Jena.

Digitized by Google

Herr Professor *Georg Mettenius* in Leipzig.
– —— *August Ferdinand Möbius* in Leipzig.
– —— *Karl Friedrich Naumann* in Leipzig.
– —— *Eduard Pöppig* in Leipzig.
– Bergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
– Professor *Theodor Scheerer* in Freiberg.
– —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
– Hofrath *Matthias Jacob Schleiden* in Jena.
– Professor *Oskar Schlömilch* in Dresden.
– —— *Eduard Friedrich Weber* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich d'Arrest* in Kopenhagen.
– —— *Otto Funke* in Freiburg.
– —— *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
– —— *Alfred Wilhelm Volkmann* in Halle.
– —— *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1860 eingegangenen Schriften.

Schriften von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1854. 2. Supplementband. (Buschmann, die Spuren der Aztekischen Sprache.) — aus dem Jahre 1858. Berlin 1859.

Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1859, Nov. Dec. 1860, Jan.—Juli.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe, Bd. X. Wien 1860. Mathem.-naturwiss. Classe, Bd. XVII. XVIII. Wien 1859. 1860.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe, Bd. XXX, 2. 3. XXXI, 1—3. XXXII, 1—4. XXXIII, 1. 2. XXXIV, 1—3. Register III. Wien 1858—60. Mathem.-naturwiss. Classe, Bd. XXXV—XL. Register zu Bd. XXI—XXX.

Fontes rerum Austriacarum. Bd. XVI. XVIII. Wien.

Archiv für Kunde österreichischer Geschichtsquellen. Bd. XXI, 2. XXII, 1. 2. XXIII, 1. 2. XXIV, 1. Wien 1858—1860.

Notizenblatt. Beilage zum Archiv für Kunde österreichischer Geschichtsquellen. Jahrg. IX. 1859. Wien 1860.

Almanach der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 9. 10. Wien 1859. 1860.

Jahrbuch der K. K. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. X, 1—4. XI, 1. Wien 1859. 1860.

Jahrbuch der K. K. geognostischen Reichsanstalt. Jahrg. X, Jan.—Juni. Wien 1859.

Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. IX. Jahrg. 1859. Wien 1859.

Mittheilungen der K. K. geographischen Gesellschaft, redig. von Franz Fötterle. Jahrg. III, 3. Wien 1859.

Abhandlungen der Kön. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 5. Folge. Bd. X. 1857—9. Prag 1859.

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrg. 1859, Jan.–Dec. 1860, Jan.—Juni. Prag 1859. 1860.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. 1860. Heft 1—3. München 1860.

Gelehrte Anzeigen, herausg. von Mitgliedern der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Bd. 48. Jan.—Juni. München 1859.

Erinnerungen an Joh. Georg v. Lori. Eine Rede u. s. w. von G. Th. v. Rudhart. München 1859.

Rede zur Feier des einhundert und ersten Stiftungstages der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, von Liebig. München 1860.

Von der Bedeutung der Sanskritstudien für die griechische Philologie. Festrede von W. Christ. München 1860.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. VIII. von den J. 1858 u. 1859. Göttingen 1860.

Nachrichten von der Georgs-August-Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Vom J. 1859, No. 1—20. Göttingen 1859.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften herausg. von G. T. L. Hirche. Bd. 36, 1—4. 37, 1. 2. Görlitz 1859. 1860.

Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Herausg. von dem naturwiss. Verein für Sachsen und Thüringen von Giebel u. Heintz. Jahrg. 1859. Aug.—Dec. 1860, Jan.—Juni. Berlin 1859. 1860.

Die Fortschritte der Physik. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Redig. von A. Krönig. Jahrg. XIV (1858), Abth. 1. 2. Berlin 1860.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. V, Heft 2—4. Halle 1860.

Digitized by Google

Verhandlungen der physikal.-medicinischen Gesellschaft in Würzburg. Redigirt von J. Kölliker u. s. w. Bd. X, 2. 3. Würzburg 1860.

Würzburger naturwissenschaftliche Zeitschrift, herausg. von der physikal.-medicinischen Gesellschaft, redig. von H. Müller, A. Schenk, R. Wagner. Bd. I, 1. 2. Würzburg 1860.

Würzburger medicinische Zeitschrift, herausg. von der physikal.-medicinischen Gesellschaft, redig. von H. Bamberger, J. Förster, v. Scanzoni. Bd. I, 1—4. Würzburg 1860.

Amtlicher Bericht der deutschen Naturforscher und Aerzte in Carlsruhe, Sept. 1858. Carlsruhe 1859.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins in Heidelberg. Bd. II., 1. 2. 1859.

Jahrbücher des Vereins für Naturkunde im Herzogthum Nassau. Herausg. von C. T. Kirschbaum. Heft 13. Wiesbaden 1859.

Jahresbericht (36. 37.) der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1858. 1859.

Wissenschaftliche Mittheilungen der physikal.-medicin. Societät zu Erlangen. Bd. I, Heft 2. Erlangen 1859.

Jahresbericht des physikal. Vereins in Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1858—1859. Frankfurt 1860.

Der zoologische Garten. Organ der zoologischen Gesellschaft in Frankfurt a. M. Herausg. von D. F. Weinland. Jahrg. I, Heft 1—6. 10—12. Frankfurt a. M. 1860.

Bericht (8.) der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde Giessen 1860.

Bericht (1.) des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Offenbach 1860.

Schriften der Universität zu Kiel aus dem Jahre 1858. Bd. 5. Kiel 1859.

—— aus dem Jahre 1859. Bd. 6. Kiel 1860.

Statuten der Pollichia, eines naturwiss. Vereins für die Pfalz. Neustadt a. d. Haardt. 1855. 2. Ausg.

Jahresbericht der Pollichia. III, 1845. IV, 1846. VI, 1848. IX—XVII, 1851—1859. Neustadt a. d. Haardt.

Zoologische Notizen von H. C. Geubel im Auftrage der Pollichia. Landau 1852.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. II. 2—4. Basel 1860.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. V. Chur 1860.

Correspondenzblatt des naturforschenden Vereins zu Riga, redig. von E. L. Seezen. Jahrg. XI. Riga 1859.

Mémoires la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XV, P. 2. Genève 1860.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale des sciences, lettres . . . en Belgique. Collection in-8°. T. IX et X. Bruxelles 1859.

Bulletin de l'académie royale . . . de Belgique. 28ème année. Sér. II. T. VII et VIII. Bruxelles 1859.

Annuaire de l'académie royale . . . de Belgique 1860. 26ème année. Bruxelles 1860.

Digitized by Google

Verhandelingen d. Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam. Letterkunde, Deel I. Natuurkunde, Deel VII. Amsterdam 1858. 1859.

Verslagen en Mededeelingen d. Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam. Letterkunde, Deel IV. V. Natuurkunde, Deel VIII. Amsterdam 1858—1860.

Catalogus van de Boekerij d. Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam. Deel I, 2. Amsterdam.

Jaarboek van de Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam voor 1858. 1859.

Verslag over den Paalworm, uitgegeven door de natuurkundige Afdeeling d. Kon. Akad. van Wetenschappen. Amsterdam 1860.

Archiv für die Holländischen Beiträge zur Natur- und Heilkunde von F. C. Donders u. W. Berlin. Bd. II, 3. Utrecht 1860.

Preisaufgaben der Utrechter Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft. 1860.

Atti dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. V, Serie 3, Disp. 3—9. Venezia 1859. 1860.

Philosophical transactions of the royal society of London for the year 1859. Vol. 149, P. 1. 2. London 1859.

Proceedings of the royal society of London. Vol. X, No. 35—38. London 1859.

The royal society (List of members) 30th Nov. 1859.

Notices of the proceedings at the meetings of the members of the royal institution of Great-Britain. Part IX, Nov. 1858—July 1859. London 1859.

Memoirs of the royal astronomical society of London. Vol. XXVII. XXVIII. London 1859. 1860.

Monthly notices of the astronomical society of London. Vol. XVIII. Nov. 1857—Jul. 1858. London 1858.

Ray society instituted MDCCCXLIV. London 1858. — The oceanic hydrozoa . . . by Th. Henry Huxley. London 1859.

Transactions of the royal society of Edinburgh. Vol. XXII, 1—4.

Proceedings of the royal society of Edinburgh. Session 1858—1859.

The Journal of the royal Dublin society. No. 15. Oct. 1859. No. 16. et 17. Jan. 1860. Dublin 1859. 1860.

Journal of the geological society of Dublin. Vol. I, P. 3. 4. II, 1. 3. III. IV. V. VI. 1. 2. VII, 1. 4. 5. VIII, 1. 2. Dublin 1837—1859.

Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester. Ser. II, Vol. XV, P. 2. London 1860.

Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester. 1858—1859, p. 60—143. 1859—1860, p. 144—252.

Comptes rendus des séances et mémoires de la société de biologie. T. V, sér. 2. Année 1858. Paris 1859.

Mémoires de la société impér. des sciences naturelles de Cherbourg. T. VI. Paris 1858.

Oversigt over det Kon. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aar. 1859. Kjöbenhavn 1860.

Forhandlinger af det Videnskabs-Selskabet i Christiania, Aar. 1858. Christiania 1859.

Beretning om Bodsfængslets Virksomhed Aar. 1858. Christiania 1859.

Digitized by Google

Al-Mufassal, opus de re grammatica arabicum, auct. Abu'l-Kâsim Mahmûd Bin 'Omar Zamachšario. Ed. J. P. Broch. (Universitatis Programma a. MDCCCLIX semestri posteriori editum.) Christiania 1859.

Kon. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. II, 1. 2. Stockholm 1857. 1858.

Öfversigt af Kon. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 14. 15. Årg. 1858. 1859. Stockholm 1859. 1860.

Kon. Svenska Fregatten Eugeniens Resa omkring jorden 1851—1858. Zoologi III. IV. Stockholm 1859. 1860.

Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis. Ser. III. Vol. II. Upsaliae 1856—1858.

Års-skrift utgifven af Kon. Vetenskaps-Societeten i Upsala. 1. Årg. Upsala 1860.

Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Pétersbourg. Sér. VII, T. I, 1—15. II, 1—7. III, 1. St. Pétersbourg 1859. 1860.

Bulletin de l'académie impér. des sciences de St. Pétersbourg. T. I. 1—9, II, 1—3. St. Pétersbourg 1859.

Nouveaux mémoires de la société impér. des naturalistes de Moscou. T. XI. XII. XIII, 1. Moscou 1860.

Bulletin de la société impér. des naturalistes de Moscou. Année 1859, 2—4. 1860, 1. Moscou 1859. 1860.

Transactions of the American philosophical society helt at Philadelphia. Vol. XI. New Series. P. 3. Vol. XII. New Series. P. 2. Philadelphia 1859. 1860.

Proceedings of the American philosophical society helt at Philadelphia. Vol. VI, No. 59. 60. Vol. VII, No. 61—63. Philadelphia 1858. 1859. Dazu: List of Members und Laws.

Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1859, pag. 1—355. Nebst Anhang und Index. — 1860, pag. 1—96.

Proceedings of the American association for the advancement of science. 12th meeting helt at Baltimore Maryland, May 1858. 13th meeting helt at Springfield Massachusetts, Aug. 1859. Cambridge 1859. 1860.

Annals of the Lyceum of natural history of New York. Vol. VIII. Dec. 1858 —March 1859. No. 1—3, p. 1—103.

Memoires of the American academy of arts and sciences. New Series. Vol. VII. A Glossary of later and byzantine Greek, by E. A. Sophocles. Cambridge and Boston 1860.

Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XI. Washington 1860.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution for the year 1858. Washington 1859.

Transactions of the academy of St. Louis. St. Louis 1859.

Zwölfter Jahresbericht des Ohio-Staats-Ackerbaurathes mit einem Auszug der Verhandlungen der County-Ackerbaugesellschaften u. s. w. für das Jahr 1857. Columbus Ohio 1858.

Jahresbericht der Ohio-Staats-Landbaubehörde für das Jahr 1858. Columbus Ohio 1859.

Report of the commissioner of patents for the year 1857. Arts and manufactures. Vol. I—III. — for the year 1858. Arts and manufactures. Vol. I—III. Washington 1858. 1859. - for the year 1858. Agriculture. — for the year 1859. Agriculture. Washington 1859. 1860.

Digitized by Google

Report of the superintendent of the coast survey during the year 1857. — during the year 1858. — Washington 1858. 1859.

Report on the geological survey of the state of Jowa . . . by J. Hall and J. D. Whitney. Vol. I, P. I, Geology. P. 2, Palaeontology. Published by authority of the legislature of Jowa. 1858.

Boletin de la sociedad de naturalistas Neo-Granadinos. Bogota 1860. (Bogen 1 u. 2.)

Schriften für das magnetische Observatorium.

Nautical monographs. No. 1. Observatory Washington, Oct. 1859.

Dr. J. Lamont, Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus. München 1858.

Dr. J. Lamont, Magnetische Untersuchungen. München 1859.

Jahrbücher der K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Bd. VI. Jahrg. 1854. Wien 1859.

Observations made at the magnetical and meteorogical observatory at St. Helena etc. printed under the superintendence of Major-General Edw. Sabine of the Royal Artillery. Vol. II. 1841—1849. London 1860.

Repertorium für Meteorologie von der Kaiserl. geograph. Gesellschaft zu St. Petersburg, redig. von Dr. L. F. Kämtz. Bd. I, 3. 4. Dorpat 1860.

Meteorologiska Jacttagelser i Sverige utgifna af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien, bearbetade af Er. Edlund. Bd. I. 1859. Stockholm 1860.

A. T. Kupffer, Annales de l'observatoire physique central de Russie. Année 1857, No. 1. 2. St. Pétersbourg 1860.

Compte-rendu annuel 1858. St. Pétersbourg 1860.

—— Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux. T. I. St. Pétersbourg 1860.

Einzelne Werke.

Moritz Börner, Die fossilen Mollusken des Tertiärbeckens von Wien. Bd. II. Bivalven.

C. L. Kirschbaum, Die Athysanus-Arten der Gegend von Wiesbaden. Wiesbaden 1858.

Von der Mark, Chemische Untersuchung der Hermannsborner Stahl- und Sauerquellen. Dortmund 1860.

Er. Edlund, Berättelse om framstegen i Fysik &c. Stockholm 1859.

C. H. Boheman, Berättelse om framstegen i Insekternas, Myriapodernas och Arachnidernas Naturhistoria. Stockholm 1859.

B. W. Feddersen, Beiträge zur Kenntniss des elektrischen Funkens. (Inauguraldissertation.) Kiel 1857.

Karlmagnus Saga ok Kappa Hans &c. udgivet af C. R. Unger. I. Christiania 1859.

C. A. Bjerknes, Ueber die geometrische Repräsentation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen, reellen oder complexen Grössen. Christiania 1859.

Digitized by Google

D. C. Danielssen, Beretning om en zoologisk Reise. Christiania 1859.
Eilert Sundt, Fortsat Beretning om Fantefolket. Christiania 1859.
Eilert Sundt, Om Ædrueligheddens Tilstanden i Norge. Christiania 1859.
Kaiser, Den norske Kirkeshistorie under Katholicismen. I. Bd. II. Bd. Christiania 1856–58.
P. A. Munch, Norges Historie i kortfattet Udtog. 4. Udgave. Christiania 1858.
R. Martin d'Angers, Mémoire sur le calendrier musulman et sur le calendrier hébraïque (2 Expl.). Paris 1857.
Programm zu den mit den Schülern der Königl. polytechnischen Schule und der Königl. Baugewerkenschule in Dresden zu haltenden Prüfungen 1859/60.
A. Mühry, Allgemeine geographische Meteorologie u. s. w. Leipzig und Heidelberg 1860.
Dr. E. Harles, Neurophysiologische Forschungen. Zürich 1860.
Hippocratis et aliorum medicorum veterum reliquiae. Mandatu academiae regiae disciplinarum quae Amstelodami est ed. Fr. Zach. Ermerins. Vol. I. Trajecti ad Rhenum 1859.
Swod Zakonov Rossiïskoi Imperiï (russisch). Fortsetzung III. St. Petersburg 1859.
Jac. van Maerlant, Rymbybel . . . voor de eerstemal uitgeg. door J. David. Deel III. Brüssel 1859.
Maury, Lettre à Quetelet, de la nécessité d'un système général d'observations nautiques et météorologiques.
Lamont, Lettre à Quetelet, sur le magnétisme terrestre.
Secchi, Lettre à Quetelet, sur la variation des éléments magnétiques.
Quetelet, Table de mortalité. — Observations de phénomènes périodiques. — Sur la différence de longitude des observatoires de Bruxelles et de Berlin déterminée 1857 par des signaux galvaniques. — De la statistique sous le rapport du physique, du moral et de l'intelligence. (Sonderabzüge).
M. E. A. Naumann, Ergebnisse und Studien aus der medicinischen Klinik. Bd. II. Leipzig 1860.
W. Ferrel, The motions of fluids and solids relative to the earths surface etc. (Aus the Mathematical Monthly, Vol. I. und II.) New York 1860.
J. Dalton, On the phosphates and arseniates, microcosmic salt etc. Manchester 1840.
A. C. G. Jobert, The philosophy of geology. 2. edit. London 1847.
A. C. G. Jobert, Ideas or outlines of a new system of philosophy. London 1848.
A. C. G. Jobert, Ideas &c. Essay the second and last. London 1849.
Lud. Stephani, Apollon Boëdromios, Bronze-Statue im Besitz Sr. Erlaucht des Grafen Sergei Stroganoff. Mit 4 Kupfertafeln. St. Petersburg 1860.
R. F. Köttig, Geschichtliche, technische und statistische Notizen über den Steinkohlenbergbau Sachsens. Leipzig 1860.
Die Landtafel des Markgrafenthums Mähren. Liefg. XV — XVIII. Brünn 1860.

Digitized by Google

Bericht über die Thätigkeit des kaufmännischen Vereins zu Leipzig 1859/1860. Leipzig 1860.

G. Forchhammer, Om Sövandets bestanddele og deres fordeeling i havet. Kjöbenhavn 1859.

H. Lebert, Klinik des acuten Gelenkrheumatismus. Erlangen 1860.

Fenicia, Monografia scientifica sulle cause delle comparse de' bruchi e sui metodi praticandi per la di lor distruzione. Napoli 1860.

Accessions-Verzeichniss der Friedensteinischen Sammlungen im Jahre 1859 (5 Expl.).

C. E. v. Malortie, Beiträge zur Geschichte des Braunschweig-Lüneburgischen Hauses und Hofes. 1. u. 2. Heft. Hannover 1860.

Monatliche und jährliche Resultate der an der Königl. Sternwarte bei München angestellten meteorologischen Beobachtungen. Supplementband III von Dr. Lamont. München 1859.

Commentationes botanicae auctt. fratribus Schultz Bipontinis. Neapoli Nemetum 1859.

C. H. Schultz, de entero-mesenteritide contagiosa. Monachii 1831.

Sam. Haughton, Notes on geology and mineralogy from the Journal of the geological society of Dublin, Jan. 10, 1855, Vol. VI, p. 109—Vol. VI, p. 2; from the Quart. Journal Geol. Soc. Vol. XII, p. 175, Aug. 1858; from the Philosophical Magazine, Oct. 1855—Jan. 1859—Apr. 1859. (Acht Hefte.)

J. S. Welhaven, Tale ved det norske Universitets mindefest for Kong Oscar den 22. Sept. 1859. Christiania 1859.

Personalier oplæste ved Hans Maj. Kong Oscar den I. begravelse. Christiania 1859.

F. V. Hayden, Geological sketch of the estuary and fresh water deposit forming the bad lands of the Judith river. — Jos. Leidy, Extinct vertebrata of the Judith river. (Sonderabzüge aus Transactions of the American philosophical society helt at Philadelphia. Vol. XII, P. 2. Philadelphia 1859.)

D. D. Owen, First report of a geological reconnoissance of the northern countries of Arkansas, made 1857 and 1858. Little Rock 1858.

G. O. Swallow, Geological report of the country along the line of the south-western branch of the Pacific railroad state of Missouri. St. Louis 1859.

Humboldt-Institut. Programm der deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Schule in St. Louis. St. Louis 1859.

Digitized by Google

SEP 27 1907
4066
8-Ed-L.
LIBRARY
MUS. COMP. ZOOLOGY,
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1860.

Vol. 12.

I. II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1860.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG AM 11. FEBR. 1860.

Dr. **Julius Sachs**, *Krystallbildungen bei dem Gefrieren und Veränderung der Zellhäute bei dem Aufthauen saftiger Pflanzentheile,* mitgetheilt von *W. Hofmeister*.

Wenn man 1 bis 2 Ctm. dicke Längsschnitte aus Kürbisfrüchten 12 bis 24 Stunden lang unter irgend einer, vor Verdunstung schützenden Verdeckung einer Temperatur von 3° bis 6° R. unter Null ausgesetzt lässt, so findet man dann auf dem dichten Parenchym einen Ueberzug von Eiskrystallen, die auf der Schnittfläche senkrecht stehend mit einander durch seitlichen Zusammenhang eine compacte Masse darstellen, welche vermöge dieser Struktur ein sammetartiges Aussehen zeigt; auf dem lockeren Parenchym in der Nähe der Kerne, wo die Gefässbündel einen mehr radialen Lauf annehmen, findet sich dieser sammetartige Eisüberzug niemals, dagegen bildet sich hier ein schiefriges, schorfartiges Eis.

Wenn man mit einem spitzen, möglichst kalten Instrument in der Nähe der Schale einen Theil des Krystallüberzuges wegstösst, so erkennt man schon mit unbewaffnetem Auge, dass derselbe aus Säulen besteht, welche mit ihren Seitenflächen dicht an einander liegen und auf der Schnittfläche senkrecht stehen, die Säulen sind beinahe gleich lang wenn man die neben einander stehenden betrachtet, jedoch nimmt die Höhe von der Schale aus gegen das Centrum hin stetig zu und ab. Denkt man sich eine auf die genannte Schnittfläche senkrechte radial gestellte Ebene, so bildet die Durchschnittslinie derselben mit der Schnittfläche eine Abscissenlinie, auf welcher die Höhen der Säulen als Ordinaten stehen und mit ihren oberen Enden eine Curve beschreiben, welche sich von der Schale aus rasch erhebt,

dann einen weiten Bogen beschreibt und sich gegen das Centrum hin langsam zur Abscissenlinie hinabsenkt. Krystalle, welche in Reihen, parallel der Schale stehen, sind gleich lang; 2—3^{mm} innerhalb der Schale sind sie am längsten und erreichen 2—3^{mm} Höhe, wenn das Kürbisstück 24 Stunden lang bei 3—6° Kälte gelegen hat. Die Dicke der Säulen ist zwar ziemlich verschieden, im Mittel aber ist sie an allen Stellen des Schnittes dieselbe, nach einer Schätzung wechselt sie zwischen 0,1^{mm} bis 0,3^{mm}.

Obwohl bei dem Abstossen der Eiskruste meistens eine Menge einzelner Säulen sich abtrennen, so kann man doch auch grössere Stücke der Kruste unversehrt abheben, besonders wenn die Temperatur nahe bei Null ist.

Um diese Eisbildungen bei hinreichender Vergrösserung beobachten zu können, stellte ich das Mikroskop in eine Luft von —5° bis —6° R. an das offene Fenster eines ungeheizten Collegien-Sales; einige Objektgläser und Instrumente wurden hinaus auf die kalte Mauer gelegt. Als Alles hinreichend kalt geworden war, begann ich am offenen Fenster des kalten Sales die Beobachtung, die der Hände wegen gewöhnlich nur eine halbe Stunde dauern konnte, dafür aber desto öfter von Neuem aufgenommen wurde.

Bringt man unter solchen Umständen ein Stück der krystallinischen Kruste so auf den Objektträger, dass man die oberen Enden der Krystall-Säulen sieht, so erkennt man dass sie sich mit ihren Seitenflächen unmittelbar berühren, zwischen je zwei Querschnitten sieht man nur eine einfache Trennungslinie. Die Gestalt der Säulen-Querschnitte ist ziemlich unregelmässig doch überall nach dem Typus eines regulären Sechseckes gebildet, aber mit unzähligen verschiedenen Abweichungen von diesem. Die obere Aufsicht auf ein Stück der Eiskruste bietet einige Aehnlichkeit mit einem Querschnitt durch ein grosszelliges Parenchym mit wässrigem Inhalt. Setzt man einen Tropfen Wasser von 0° bis 1° R. auf die Krystallschicht, so beginnt ein langsames Aufthauen, die Querschnitte der Säulen weichen auseinander und eine grosse Zahl Luftblasen erscheint in dem Wasser.

Die Seitenansicht eines Krystallbündels, welches man in einem Tropfen kalten Wassers langsam schmelzen lässt, giebt ein sehr zierliches Bild. Die wie Basaltsäulen neben einander liegenden Eiskrystalle schliessen Luftblasen ein, welche in höchst regelmässige Längsreihen geordnet sind, die den Kanten der

Digitized by Google

Säulen parallel laufen. Meist sind die Blasen einer Reihe gleich gross, und die ganze Reihe sieht dann aus wie eine lockere Perlenschnur; sehr häufig wechselt in einer Reihe je eine kleine und eine grosse Blase; oft sind die Blasen parallel der Säulenlänge in die Länge gezogen, dann wechselt gewöhnlich in einer Reihe eine lange mit einer runden; bisweilen sind mehrere Blasen einer Reihe durch dünne Luftkanäle mit einander verbunden, und nicht selten findet sich statt einer Blasenreihe eine einzige oder zwei lange kanalartige Blasen. Niemals kommt es vor, dass eine Blase quer gegen die Höhe der Säule ausgezogen wäre. Die Blasenreihen verlaufen in der homogenen Eismasse einer Säule entweder ganz nahe den Kanten oder Flächen, oder mehr im Innern derselben, zuweilen in der grossen Axe selbst. Es kommt auch vor dass zwischen zwei Säulen eine Reihe von Interstitien sich findet, welche den Blasenreihen innerhalb der Säulen durchaus ähnlich ist. Meistens durchzieht eine Blasenreihe nur einen Theil der Höhe; die Reihe beginnt dann entweder an der Basis um in der Mitte aufzuhören, oder beginnt in der Mitte und verläuft bis zum oberen Ende der Säule; nicht selten ist dann die letzte Blase nur als eine halbkugelige Höhlung der Oberfläche vorhanden. Wenn das Krystallbündel in kaltem Wasser langsam schmilzt, so weichen die Kanten gleichzeitig in der ganzen Länge aus einander; die Säulen verlieren dabei ihre kantige Form und nehmen Walzengestalt oder Keulenform an. Die Blasen innerhalb der Krystalle umgeben sich, wenn äusserlich das Schmelzen beginnt, mit hellen Höfen, d. h. um jede Blase herum beginnt eine Verflüssigung; jede Blase sieht dann aus wie ein gehöftes Tüpfel. Offenbar erfolgt dieses Schmelzen um die Luftblasen herum durch strahlende Wärme, welche die Eissubstanz durchsetzt und die Luft in der Blase erwärmt, während die geleitete Wärme den Krystall von aussen angreift.

Die Luftblasen bleiben nach dem Verschwinden der Krystalle in dem Wasser, wo sie sich zu grösseren Blasen vereinigen und einen Schaum bilden.

Bei der Seitenansicht eines Krystallbündels bemerkt man zahlreiche Krystalle, welche von der Basis aus wie Keile zwischen die anderen eingeschoben sind. Niemals finden sich solche Eiskeile von oben her eingetrieben.

Die Substanz der Krystalle ist kein reines Wasser, sondern enthält eine Säure. Lässt man ein Krystallbündel auf blauem

Digitized by Google

Lakmuspapier schmelzen, so röthet sich der feuchte Fleck sehr stark.

Ich hatte diese Eisbildungen im Laufe meiner Untersuchungen über die Ursachen des Kältetodes, welche mich in diesem Winter beschäftigten, zufällig beobachtet, und es drängte sich mir nun die Frage auf, ob diese Erscheinung allgemein sei. Die wenigen kalten Tage, welche seit dem Neujahr noch eintraten, machten es möglich wenigstens mehrere Fälle zu constatiren, welche auf Allgemeinheit schliessen lassen, da ich bei den auf das Geratewohl gewählten Objekten jedesmal ein positives Resultat erhielt.

Quer- und Längsscheiben von Runkelrüben und Wasserrüben, von Möhren und Kohlrüben bedeckten sich unter gleichen Bedingungen wie die Kürbisstücke mit krystallinischen Eiskrusten. Der Bau derselben stimmte mit dem oben beschriebenen völlig überein, auch die mittlere Höhe und Dicke der Säulen war dieselbe; sie standen jedesmal senkrecht auf dem Schnitt.

Blattstiele von Runkelrüben und Grün-Kohl, welche in Töpfen vegetirten, wurden in Stücke von 1—2 Ctm. Länge querdurchgeschnitten und in zugedeckten Gläsern der Kälte ausgesetzt. Die Querschnitte bedeckten sich mit Eiskrystallen. Bei dem Kohl waren sie besonders lang und gegen die Axe des Stiels hin gekrümmt; die Blasenreihen machten dieselbe Krümmung wie die Krystalle selbst. Sie waren hier nicht so von gleicher Länge wie bei den Kürbisstücken und Wurzelscheiben; die oberen Enden der Säulen boten unregelmässige Zacken und Krümmungen. Auf den Blattstielquerschnitten der Runkelrüben bestand die Kruste aus sehr kurzen Säulen, welche sich von oben gesehen durch ihre regelmässigen sechseckigen Endflächen und Querschnitte auszeichneten. Statt der Blasenreihen enthielten diese kurzen Säulen je eine grosse Luftblase im Centrum.

In allen Fällen fanden sich zwischen die Hauptmasse der Säulen Eiskeile von der Basis aus eingeschoben, und immer bestanden die Krystalle aus saurem Wasser.

Wenn man Quer- und Längs-Scheiben von 1—2 Ctm. Dicke aus Kürbissen, Runkelrüben, Wasserrüben u. s. w. unbedeckt auf einer kalten Mauer liegen lässt, so bilden sich nur auf der unteren, gegen die Mauer gekehrten Schnittfläche Krystallkru-

Digitized by Google

sten; die oberen, der Luft ausgesetzten Flächen bilden keine Krystalle und trocknen stark aus. Bedeckt man die Oberfläche einer Scheibe nur zum Theil mit einer Porcellan- oder Glas-Platte, so bilden sich die Eissäulen nur auf dem bedeckten Theil. Legt man eine jener Scheiben auf den Boden eines bedeckten grösseren Gefässes, so findet man dann sämmtliche Schnittflächen mit Krystallen überzogen. Aus diesen einfachen Versuchen geht mit aller Evidenz hervor, dass die Krystalle nur dann entstehen, wenn die Verdunstung höchst gering ist, und ferner, dass sich die Eissäulen aus dem Gewebe selbst hervorschieben, nicht etwa als reifähnlicher Niederschlag entstehen, diess wird schon dadurch abgewiesen, dass die Krystalle immer die saure Reaction des Zellsaftes zeigen.

Setzt man die genannten Pflanzentheile einer Kälte von 12—20° R. aus, indem man sie innerhalb verschlossner Gefässe mit Kältemischungen umgiebt, so gefrieren sie in kurzer Zeit zu sehr harten Massen, auf den Schnittflächen bemerkt man alsdann aber keine Krystallkrusten. Lässt man dagegen die Scheiben bei 3° bis 6° unter Null langsam abkühlen, so bemerkt man schon nach 8—10 Stunden auf den Schnittflächen einen dünnen Eisüberzug von sammetartigem Aussehen; dieser Ueberzug besteht aus sehr kurzen Säulen von der beschriebenen Beschaffenheit; sie bilden eine allseitig zusammenhängende Masse. Nach einigen Stunden sind die Säulen schon merklich länger. Wenn die Masse des Pflanzentheiles einigermassen bedeutend ist, so findet man um diese Zeit das Gewebe noch völlig elastisch und nicht gefroren, obwohl die Krystalle bereits ziemlich hoch sind. Je länger die Scheiben liegen bleiben ohne zu gefrieren, desto dicker wird der Ueberzug, desto länger die Säulen.

Dieses Wachsthum der Krystalle macht es wahrscheinlich, dass die Flüssigkeit aus dem Gewebe langsam heraustritt und dann an der Oberfläche erstarrt. Man braucht sich dieses Austreten nicht immer als durch eine Zusammenziehung des Gewebes verursacht zu denken. Denn obwohl manche Pflanzentheile bei dem Gefrieren eine merkliche Contraction zeigen, z. B. die Blattstiele, so ist dagegen bei den Wurzeltheilen diese Zusammenziehung zweifelhaft (siehe den Anhang zu dieser Abhandlung).

Man könnte auf die Annahme verfallen, dass durch die Ausdehnung des Wassers, welche von 4° C. abwärts eintritt,

Digitized by Google

eine Auspressung stattfinden müsse. Dagegen sprechen folgende Gründe. Scheiben, welche 10—12° R. warm sind, enthalten das Wasser in einem Zustande, wo es einen grösseren Raum einnimmt als bei 0°, demnach kann es bei dem Erkalten nicht hinausgepresst werden; ferner die Krystalle bilden sich auf Scheiben, welche weit weniger Wasser enthalten, als sie in der That enthalten können; z. B. ein Stück aus dem festen Theile des Kürbisfleisches, welches im Stande war binnen 2½ Stunden noch 3,5 Gramme Wasser aufzunehmen, bedeckte sich bei langsamem Gefrieren mit einer dicken Krystallkruste; da nun das Gewebe im Stande war noch Wasser aufzunehmen, so kann die höchst geringe Ausdehnung zwischen 4° C. und 0° keine Ursache zur Auspressung sein; endlich ist das Wasserquantum welches heraustritt um Krystalle zu bilden viel zu gross um sich durch derartige Ausdehnung selbst im günstigsten Falle erklären zu lassen. Eine Scheibe, welche 100 C. C. Wasser enthält kann Krystallkrusten bilden, welche einige Cubik-Centim. Wasser geben: die Ausdehnung des Wassers zwischen 7° C. und 0° ist aber so gering, dass von 100 C. C. kaum 1/100 C. C. austreten würde, was bei der grossen Fläche der Scheiben eine verschwindend dünne Schicht giebt.

Indessen bedarf es weder einer Ausdehnung des Wassers noch einer Zusammenziehung des Gewebes, wodurch das Wasser hinausgepresst werden müsste, um das Wachsthum der Eissäulen zu erklären. Hierfür genügt es vollkommen die Eigenschaften imbibitionsfähiger Körper in Betracht zu ziehen. Jeder mit einer Flüssigkeit imbibirte Körper enthält nicht bloss in seinen Poren, sondern auch auf seinen freien Oberflächen Wasser. Die durch den Schnitt freigelegten Zellhäute stehen einerseits mit dem flüssigen Zellinhalt in Berührung, die der Luft zugekehrte Oberfläche ist mit einer sehr feinen Wasserschicht überzogen, welche, wenn sie auf irgend eine Weise z. B. durch Verdunstung hinweggenommen wird, sich durch die Poren der Haut sogleich wieder erneuert. Es giebt einen sehr einfachen Beweis für das Vorhandensein dieser dünnen Wasserschicht auf den Oberflächen imbibirter Körper und für die Kraft, mit welcher sich das Wasser aus den Poren auf die Oberfläche ausbreitet; der Beweis liegt darin, dass sich die Oberfläche eines imbibirten Körpers gegen Oele, Harze, Lacke ebenso verhält wie eine Wasserfläche. Wenn man z. B. Asphaltlack auf völlig trockene Harnblase, Amnions-

Digitized by Google

haut, Papier streicht und dann gut austrocknen lässt, so klebt der Lack mit enormer Kraft an diesen Stoffen. Ist aber nur irgend ein kleiner Theil der nicht mit Lack bedeckt ist mit Wasser in Berührung, so imbibirt sich auch der überzogene Theil und in kurzem fällt der vorher so feste Lack in grossen Stücken ab; diess kann nur dadurch geschehen, dass sich zwischen die festen Theile der Haut und die daran klebenden Lackschichten eine Wasserschicht einschiebt, und zwar geschieht diess mit einer so grossen Kraft, dass dadurch die grosse Adhärenz des Lackes überwunden wird.

Also jede freie Zellhautfläche ist mit einer dünnen Wasserschicht bedeckt, welche ganz allein vermöge der Imbibitionskräfte sich jedesmal wieder erneuert wenn sie weggenommen wurde. Angenommen nun diese Wasserschicht gefriert, so verhält sie sich dann wie eine trockene Lackschicht; es entsteht unter der Eishaut sogleich eine neue Wasserschicht, die nun ihrerseits wieder erstarrt und so geht es fort und muss es fortgehen, so lange die Zellhaut ungefroren bleibt d. h. so lange sie imbibirt. Wird dagegen die Oberfläche des Schnittes so rasch erkältet, dass nicht nur die äusserste Wasserschicht, sondern die Zellhaut selbst gefriert, dann kommt dieser Prozess nicht zu Stande. Ebenso wenig kann er eintreten, wenn durch rasche Verdunstung die heraustretende Wasserhaut jedesmal sogleich weggenommen wird. Diess alles steht mit den Beobachtungen im besten Einklang; denn die Krystallbildung erfolgt nur bei geminderter Verdunstung und bei langsamer Abkühlung, das Gewebe ist unter den Krystallen, so lange sie wachsen, noch nicht gefroren.

Die Geschwindigkeit womit das Wasser von einem Schnitt durch ein frisches Gewebe verdampft, giebt ein Mass für die Geschwindigkeit womit die Wasserschichten sich erneuern und somit ein Mass für die Geschwindigkeit des Wachsthums der Krystalle. Von einer Schnittfläche einer Rübenscheibe, welche ungefähr 30 Quadratcentim. Fläche hatte, verdunstete binnen einer Stunde bei — 12° R. über 4 Gramm Wasser; wäre diese Fläche bedeckt gewesen, wodurch die Verdunstung gehindert und die Abkühlung verlangsamt worden wäre, so hätten sich diese 4 Gramm Wasser in Gestalt einer Krystall-Kruste abgelagert.

Wenn nun auch die Imbibitionsthätigkeit allein hinreicht

Digitized by Google

um das Wachsthum der Krystalle zu erklären, so ist es doch begreiflich, dass jede Kraft, welche das Wasser langsam und stetig aus den Zellen gegen die Oberfläche hin presst, in demselben Sinne wirken und die Krystallbildung fördern muss. Diess kann sowohl durch Zusammenziehung des Gewebes geschehen als auch durch einen hohen Grad von Turgor.

Einen direkten Beweis für die Richtigkeit dieser Erklärungsweise liefern die Krystalle auf den Scheiben dunkelrother Runkelrüben. Würde das Wasser, aus welchem diese Krystalle sich bilden mit einer unwiderstehlichen Gewalt hinausgetrieben, wie durch die Ausdehnung bei Abkühlung, so würde offenbar die Inhaltsflüssigkeit der Zellen so austreten, wie sie ist, d. h. es würde der rothe Zellsaft herausgepresst um Krystalle zu bilden; die Krystalle sind aber selbst auf den dunkelsten rothen Zellen immer farblos; es dringt demnach aus der rothen Zellflüssigkeit eine ungefärbte heraus; diess kann nur durch die endosmotischen Eigenschaften der Zellhaut erklärt werden, welche bei ihrer Imbibition des Zellsaftes den Farbstoff zurücklässt, sowie die imbibirenden Häute aus Salzlösungen einen Theil des Salzes ausscheiden, und eine verdünntere Lösung aufnehmen.

Ich hatte erwartet, dass die Dicke einer Eissäule je einer Zellengrösse entsprechen könnte, so dass jede Zelle ihren besonderen Krystall bildete; die Beobachtung lehrt aber in allen Fällen, dass die Krystalldicke mehrere Zellflächen umfasst; jeder Krystall erhält das Material zu seinem Wachsthum aus mehreren Zellen.

Wenn man in einem kalten Raume mit kalten Instrumenten präparirt, so ist es leicht, Schnitte herzustellen, welche den Krystalllängen parallel laufen, so dass man auf einem dünnen Schnitte des Gewebes die zugehörigen Krystalle aufsitzen sieht. Die Dicke der Krystalle scheint in gar keiner Beziehung zu der Grösse der sie erzeugenden Zellen zu stehen. Wie erwähnt, behalten sie ihre mittlere Dicke auf allen Theilen eines Kürbisstückes bei, obgleich die Grösse der Zellen von aussen nach innen um das Mehrfache zunimmt. Auch ist die Dicke der Säulen nicht merklich verschieden, sie mögen auf dem Schnitt einer Runkelrübe, eines Kohlblattstieles oder des Kürbisfleisches stehen.

Besondere Erwähnung verdient der Umstand, dass die Krystalle ebenso auf den Quer- und Längs-Schnitten der Gefässbündel stehen, wie auf dem umgebenden Parenchym.

Digitized by Google

Demnach scheint es, dass die Dicke der Krystalle allein von den Molekularkräften abhängt, welche die Eisbildung überhaupt bedingen, nicht aber von der organischen Struktur der Unterlage. Es führt diess auf die Vorstellung, dass die auf der Oberfläche sich ausbreitende Imbibitionsflüssigkeit eine continuirliche Schicht bildet. Bei dem Gefrieren derselben treten dann gewisse Mittelpunkte der Krystallisation auf, wodurch die dünne Eisschicht eine Parquettartige Struktur erhält; in den neuen unterhalb sich ansetzenden Schichten verdickt sich dann jede Platte für sich und nach und nach wird die Dicke der Platten grösser als ihre Breite.

Die regelmässigen Abstände der Luftblasen in den Längsreihen stimmen sehr gut mit der Annahme dieses schichtenweisen Ansatzes. Offenbar wird die Luft im Moment des Erstarrens von der Flüssigkeit ausgestossen. Die Regelmässigkeit der Reihen zeigt, wie bei jeder neuen Ansatzschicht dieselben Kräfte in derselben Weise thätig sind.

Die Krystallbildung ist nicht von der organischen Struktur der Zellhäute abhängig; sie können stark alterirt sein ohne der Eisbildung zu schaden. Scheiben, welche Wochen lang in Wasser gelegen und schleimig geworden sind, zeigen sie ebensogut wie erfrorene, zerfliesslich gewordene Stücke. Auf demselben Stücke kann man mehrmals nach einander Krystalle erhalten, wenn man sie abschmilzt oder abhebt.

Die Krystallbildung ist ebenso von den Substanzen der Inhalte unabhängig, denn ihre Gestalt und Grösse ist übereinstimmend bei den verschiedenen Pflanzen, deren Geschmack, Geruch und Farbe hinlänglich ihre chemische Verschiedenheit erkennen lassen.

Durch die Thatsache, dass man Krystallkrusten unter bekannten Bedingungen auf Pflanzentheilen entstehen lassen kann, ist eine Reihe früherer Beobachtungen der experimentirenden Behandlung zugänglich geworden, und somit der Weg zu einer Erklärung derselben gegeben.

Es kann nicht zweifelhaft sein, dass wir in den eben beschriebenen Gebilden eine Erscheinung vor uns haben, welche mit den von Elliot, Herschel, Dana, Le Conte, Bouché, Caspary und Hugo von Mohl beobachteten Eiskrystallen auf lebendigen und todten Pflanzen und auf feuchtem Boden in Form und Bil-

dungsweise übereinstimmt. Mir steht von der Literatur darüber nur die Abhandlung Caspary's: Auffallende Eisbildungen auf Pflanzen (Bot. Zeitg. 1854. S. 665) zu Gebote, worin eine Uebersicht der früheren Arbeiten gegeben ist; ausserdem erhielt ich erst während der Abfassung der vorliegenden Abhandlung die zweite Nummer der diessjährigen Folge der bot. Zeitung, worin Hugo v. Mohl am Schlusse seiner Abhandlung »über die anatomischen Veränderungen des Blattgelenkes, welche das Abfallen der Blätter herbeiführen« neue Beobachtungen über derartige Eisbildungen mittheilt. Durch v. Mohl's Beobachtungen gewinnt das Phänomen eine neue Bedeutung und grössere Allgemeinheit.

Stephan Elliot (a sketch of the botany of South Carolina and Georgia Charlestown 1827 II. 322 citirt bei Caspary a. a. O.) beobachtete diese Eisbildungen an Pluchea bifrons D. C. (Conyza b. L.), welche in Carolina und Georgien häufig auf nassem Boden wächst; »diese Pflanze bietet häufig eine merkwürdige Erscheinung dar. Während des Winters zeigt die Basis des Stammes an jedem klaren Morgen krystallinische Fäden (fibres), fast einen Zoll lang, welche nach allen Seiten von ihm ausgehen.«

Sir John Herschel (Notice of a remarkable disposition of ice round the decaying stems of vegetables during frost; Lond. Edinb. and Dubl. phil. mag. and journal of sc. II. Jan.—Juni 1833 p. 110; bei Caspary a. a. O.) fand an den Stumpfen abgestorbener Disteln und Heliotropen blattartige Eisbildungen.

James D. Dana (Manual of mineralogy. 2nt. Edit. New Haven et Philad. 1849 p. 46; bei Caspary a. a. O.) giebt an »an kalten Morgen des Frühlings und Herbstes findet man in diesem (Nordamerika's) Klima die Zweige von Pflanzen hin und wieder von faserigen Eislocken umgeben, welche senkrecht dem Stamme anhängen.

Le Conte (observations on a remarkable exudation of ice from the stems of vegetables and on a singular protrusion of icy columns from certain kinds of earth during frosty weather: Lond. Edinb. and Dubl. phil. mag. and journal of sc. XXXVI. Jan.—Juni 1850; bei Caspary a. a. O.) beobachtete die Blatteisbildung wiederholt bei Pluchea bifrons D. C., camphorata D. C. in Carolina und Georgien. Er betrachtet diese Eisbildungen als Analogon der von ihm beobachteten faserig-massenhaften, welche auf dem Boden oft drei Zoll dicke Lagen bilden. Diese auf ziemlich nassem, porösem Boden vorkommenden Krystall-

Digitized by Google

bildungen bestehen aus einer grossen Zahl von Eisfäden, welche mit einander zu faserigen Säulen verbunden sind, Bündeln von gesponnenem Glase ähnlich sehen, und rechtwinklig auf der Oberfläche des Bodens stehen, als ob sie in halbflüssigem Zustande von unzähligen Haarröhrchen desselben ausgegangen wären. Die faserigen Eismassen zeigten sich nur über einem Boden, welcher selbst nicht gefroren war.

Caspary (a. a. O.), welcher von dem Inspector Bouché darauf aufmerksam gemacht wurde, beobachtete am 14. Novbr. 1853 Morgens 7—8 Uhr im Schöneberger bot. Garten bei einer Temperatur von —3^0 R. die faserig-compacten und die blattförmigen Eismassen an einer beträchtlichen Zahl von ausländischen im freien Lande stehenden Pflanzen, aber nicht an den in Töpfen erzogenen; z. Th. waren es einjährige, theils mehrjährige. »Die faserig-compacten Eislagen bestanden aus kleinen dünnen Eisfäden von horizontaler Richtung, die senkrecht auf dem Holz aufsassen, so dass sie über eine mehr oder minder grosse Fläche des Holzkörpers eine zusammenhängende 1,5 bis 2^{mm} dicke Schicht bildeten; die einzelnen Fäden waren jedoch nicht zu isoliren; sie umgaben meist nicht den ganzen Holzkörper, sondern nur etwa $\frac{1}{3}$—$\frac{2}{3}$ desselben und zwar in einer Länge von 30—90^{mm}. Die Rinde war über ihnen der Länge nach durch eine oder zwei Spalten geöffnet, aber nicht der Quere nach in Stücke zerfetzt. Das Eis liess sich durch die Spalte gut sehen. Solche faserig-compacte Eislagen zeigten sich nur an einigen wenigen Pflanzen, von denen er Lantana aculeata und Tagetes bonariensis anmerkte und genauer untersuchte.«

»Viel mehr in die Augen fallend und wirklich zierlich war die zweite Art der Eisbildung, die blättrige. Vertikale, bald schneeweisse, bald wasserklare Eisplatten von 10—160^{mm} Länge, 10—30^{mm} Breite und so dick wie starkes Papier, erhoben sich radial vom Holzcylinder aus in mehr oder weniger regelmässiger Krümmung; sie zeigten horizontale Streifung, als ob sie aus horizontalen Eisfäden, die sich in vertikaler Richtung mit einander verbunden hätten, zusammengesetzt wären. Am Rande waren sie meist ziemlich gradlinig begrenzt, oft aber ging die horizontale Streifung hier in Zerfaserung über, so dass der Rand gefranzt oder lockenartig war. Die Eisblätter hatten die Rinde und das Cambium abgetrieben, sie der Länge und Quere nach gespalten und die Fetzen derselben hingen auf den Rän-

Digitized by Google

dern der Eisblätter. An vielen Stellen zeigte sich diese Eisbildung am ganzen Umfange des Stammes und es mochten bis gegen 30 Lamellen da sein, so dass sie in einem Durchmesser von 50—60^{mm} den Stamm umgaben, an anderen war sie nur einseitig und nur wenige Lamellen oder gar nur eine, oft vorzugsweise schön entwickelt, vorhanden. Besonders zierlich gebogen und mit gefranztem Rande, wie lockig, zeigten sich kürzere aber sehr breite Lamellen an den Zweigspitzen. Der Holzcylinder war oft und zwar durch mehrere Spalten gesprengt. Die Eislamellen drangen niemals aus einer Spalte hervor.« Diese Lamellen wurden beobachtet an: Perilla arguta, Alonsoa incisifolia, Cuphea cordata, tubiflora und platycentra, Heliotropium peruvianum, Manulea oppositifolia, Calceolaria perfoliata.

Bei H. Hoffmann (Pflanzenklimatologie 1857 S. 329) findet sich noch eine hierher gehörige Notiz. »Blätter von Viburnum Tinus und Aucuba wurden zwischen zwei Blätter grauen Löschpapiers gelegt, diese zwischen zwei, wenige Linien dicke Schneelagen, diese zwischen zwei Glasplatten, welche also das Ganze einschlossen. Nach einer —10° kalten Nacht fanden sich 27 Stunden später die Unterseiten, und zwar ausschliesslich, bei allen Blättern reichlichst mit feinen Eisnädelchen besetzt, von charakteristischer Gruppirung (in der Beschreibung nicht charakterisirt) bei jeder von beiden Pflanzen anders.« »Eine Zerreissung, eine mechanische Verletzung war nicht zu bemerken.«

Hugo v. Mohl (in der genannten Abhandlg. Bot. Zeitg. 1860 S. 15 u. 16) giebt folgende Mittheilung: »Es ist bekannt dass die Blätter mancher Bäume z. B. von Acer platanoides, den verschiedenen Arten von Juglans u. s. w. wochenlang vollständig ihre grüne Farbe verloren haben können, und dass dennoch das Abfallen derselben nur sehr allmälig von der Basis der Zweige gegen ihre Spitzen hin erfolgt, dass dagegen, wenn in einer hellen Nacht plötzlich Frostkälte eingetreten ist, den anderen Morgen die Blätter mit einem Male massenweise abfallen. Es trat diese Erscheinung in dem verflossenen Herbst am 23. Oct. ein. In der vorausgegangenen Nacht war der Thermometer zum ersten Male unter den Gefrierpunkt (auf —2° R., im Freien wahrscheinlich tiefer) gefallen, es lag des Morgens ein starker Reif und stillstehende Wasser waren ziemlich stark überfroren. Als ich des Morgens, so lange der Thermometer noch unter dem Gefrierpunkt stand und der Reif noch lag in den Garten ging,

Digitized by Google

so war der Boden unter den Wallnussbäumen, Maulbeerbäumen u. s. w. bereits dick mit Blättern bedeckt, während sich immer noch weitere Blätter und zwar bei vollkommener Windstille ablösten. Die Untersuchung der Bäume zeigte, dass die Kälte stark genug gewesen war, um in den Blättern den Saft zum Gefrieren zu bringen. Als ich die Blattnarben von den abgefallenen, oder gerade in der Ablösung begriffenen Blättern betrachtete, fand ich sie bei einer Reihe von Pflanzen mit einer dünnen Eisschicht bedeckt. Am auffallendsten war dieses bei Paulownia der Fall, wo eine, wenigstens ½ Linie dicke Eisscheibe, die sich mit dem Nagel als feste zusammenhängende Masse abdrücken liess, jede frische Blattnarbe bedeckte, während andere Blätter, welche noch am Zweige sassen, durch eine gleiche Eisscheibe bereits von der Blattnarbe völlig getrennt waren, aber auf der oberen Seite der Eisscheibe angefroren waren und dadurch am Abfallen gehindert wurden. Aehnliche wenngleich weniger dicke Eiskrusten waren auf den grossen Blattnarben der abgefallenen oder im Abfallen begriffenen Blätter am Gymnocladus, Ailantus, Juglans leicht zu finden, während sie auf den kleineren Blattnarben, wie bei Asimina triloba zwar auch vorhanden, aber leichter zu übersehen waren. Es konnte keinem Zweifel unterliegen, dass bei diesen Gewächsen und namentlich bei Paulownia die Blätter auf eine rein mechanische Weise durch den zu einer Eisscheibe erstarrten Saft von dem stehenbleibenden Theil des Blattkissens losgerissen waren. Die nähere Untersuchung der nach Hause genommenen Zweige zeigte, dass sich die Eisscheibe in der Trennungsschichte der Blätter gebildet hatte. Es erklärt sich diess wohl zunächst daraus, dass die Zellen dieser Schichte besonders mit Saft erfüllt sind. Allein dieser Umstand kann die Bildung einer so dicken Eisscheibe, wie sie bei Paulownia vorkam, nicht erklären, sondern diese kann nur dem Austreten einer beträchtlichen Saftmasse aus der Blattnarbe ihre Entstehung verdanken. Es ist nun nicht leicht zu sagen, auf welche Weise der Frost dieses Austreten von Saft bewirkt, allein es wird kaum zu zweifeln sein, dass dieser Austritt von Saft dadurch bewirkt wird, dass die Kälte, ehe sie den ganzen Zweig durchdringt, und seine Saftmasse zum Erstarren bringt, zunächst eine Contraction der äusseren Schichten des Zweiges veranlasst und dass dadurch ein Theil der um diese Zeit in den Zweigen reichlich vorhandenen Saftmasse in

Digitized by Google

die bereits gebildete Spalte der Trennungsschichte ausgepresst wird und hier gefriert. Ich gestehe übrigens, dass mich diese Erklärung nicht ganz befriedigt, indem es zweifelhaft erscheinen kann, ob ein solcher Druck, welchen die sich zusammenziehende Rinde auf die inneren Theile der Pflanze ausüben würde, die Bildung einer Eisscheibe von der Beschaffenheit, wie sich auf den Blattnarben von Paulownia darbot, zur Folge haben kann. *) Es war nämlich diese Eisscheibe offenbar nicht auf die Weise entstanden, dass der zu Eis erstarrende Saft rasch und aus einzelnen Gefässmündungen ausgeflossen ist und die Spalte der Trennungsschichte überschwemmt hat, indem sie in diesem Falle aus einer gleichmässigen Eismasse gebildet gewesen wäre.« — »Die Eisscheiben waren so gross, als die Blattnarbe selbst, am Rande scharf abgeschnitten und cylindrisch, und es zeigte das Eis in seiner Färbung (wohl in Folge von Einschluss kleiner Luftblasen) Unterschiede, jenachdem dasselbe sich über dem Parenchym der Blattnarbe, oder über den abgerissenen Gefässbündeln gebildet hatte, insofern dasselbe an den Stellen, welche den Gefässbündeln entsprachen, nicht ganz durchsichtig sondern weissgefärbt war.«

Ich finde bei v. Mohl keine Angabe, ob die Eisscheiben aus Eisfäden oder Säulen bestanden, ihre Bildungsweise stimmt aber so sehr mit den Eiskrusten auf den Rübenscheiben und den Blattstielquerschnitten überein, dass man wohl die Annahme ohne Weiteres wagen darf.

Hugo v. Mohl beobachtete die von Le Conte zuerst beschriebene Bildung von Eiskrystallen auf dem Boden; die von ihm beschriebenen Bildungen sind um Tübingen bekannt und führen dort den Namen Kammeis. Er sah sie am 11. Novb. 1859 auf einem Gebirgszug des Schwarzwaldes; Eissäulen standen senkrecht aus dem Boden hervor. »Nach vorausgegangenem Regen-

*) Diese Vermuthung von Hugo v. Mohl wird durch Folgendes bestätigt. Wenn man Zweige von Rhamnus, Betula, Fagus, 2—3 Ctm. dick und 10—12 Ctm. lang, einige Zeit in Wasser liegen lässt, dann an den Querschnitten und der Rinde gut abtrocknet und so in eine Kälte von — 5° bis 6° R. legt, so treten an den Querschnitten während des Gefrierens grosse Wassertropfen hervor, welche sogleich zu dicken Eismassen erstarren; offenbar geschieht diess zum Theil durch Contraction des Holzes, das Wasser dringt mit bedeutender Gewalt und Geschwindigkeit hervor; die mikroskopische Untersuchung liess keine deutliche Sonderung der Eismasse in Säulen erkennen.

Digitized by Google

wetter hatte sich der Himmel am 10. Novb. aufgeklärt und es war in der Nacht auf den 11ten mit kaltem Nordwind Frost eingetreten. An diesem Tage fanden sich nun an unzähligen Stellen, an denen der Boden von Vegetation entblöst war und eine steile Böschung bildete (in Hohlwegen, am Abhange von Gräben) diese auffallende Eisbildung. Dieselbe bestand theils aus isolirten, gewöhnlich aber aus massenweise neben einander stehenden und theilweise an einander angefrorenen Eisfäden, von der Dicke einer Nähnadel bis zur Dicke eines Rabenkiels, welche gewöhnlich vollkommen grade nur selten gekrümmt waren und eine Länge von 1—2 Zollen hatten. Der Boden auf dem sie aufsassen bestand aus einem mit wenig Thon gemengten Sande und war mässig feucht. Bei der ersten Bildung der Eisnadeln war wohl die äusserste Schicht des Bodens gefroren gewesen, denn sie war von den Eissäulen in die Höhe gehoben worden, während das untere Ende derselben auf nicht gefrorenem Boden aufsass.

Fassen wir nun das Vorhergehende kurz zusammen, so sind bis jetzt folgende Fälle beobachtet.

1) Einzelne Eissäulen von Stephan Elliot und H. Hoffmann auf frischen Pflanzentheilen beobachtet; ich sah häufig einzelne kleine Säulen auf Rübenquerschnitten welche unbedeckt gefroren (siehe ferner: Bonnet: Usage des feuilles LXXXII).
2) Eisfäden durch seitliche Anlagerung zu Eisflächen vereinigt, von Herschel, Dana, Le Conte, Bouché, Caspary beobachtet.
3) Krystalle durch seitliche Anlagerung zu compacten Massen von der Dicke einer Krystallhöhe verbunden; unter der Rinde todter Stämme von Herschel, lebender Stämme von Caspary, auf den frischen Ablösungsflächen der Blattkissen von v. Mohl, auf den Schnittflächen frischer Pflanzentheile von mir beobachtet; ähnliche aber viel höhere Eissäulen auf feuchtem Boden von Le Conte und v. Mohl beobachtet.
4) Die schorfigen Eisbildungen aus dünnen, meist sechsseitigen Tafeln bestehend auf dem grosszelligen, lockeren Parenchym des inneren Kürbisfleisches von mir beobachtet.

Folgendes sind die wichtigsten Punkte, in denen diese Gebilde übereinstimmen:

I. Ihre Gestalt weist jederzeit darauf hin, dass sie nach und nach wachsen; ich habe an den von mir beobachteten dieses Wachsen direkt verfolgt.

Digitized by Google

II. Das Wachsthum erfolgt immer in einer Richtung, welche auf der Unterlage senkrecht steht.

III. In allen Fällen lässt sich das Wachsthum nur dadurch erklären, dass während desselben die Unterlage, welche das Material dazu liefert, noch ungefroren bleibt, bei den von mir beobachteten Eisbildungen und bei denen des Bodens ist dieses beobachtet, bei den anderen weisen die Umstände darauf hin.

IV. Die Bildung dieser einseitig wachsenden Krystalle erfolgt jederzeit bei geringer Kälte, und nur auf solchen Unterlagen, welche bis dahin eine höhere Temperatur besassen.

V. Das Quantum und die Bildungsweise der Krystalle weist in allen Fällen darauf hin, dass das sie bildende Wasser weder allein durch Zusammenziehung der Unterlage, noch durch Ausdehnung des Wassers austritt.

Leider hat keiner der früheren Beobachter die Krystalle mikroskopisch untersucht, und eine allgemeine Theorie dieser Gebilde wäre nur dann zu geben, wenn die Formen hinreichend bekannt sind.

Le Conte ging bei seiner Erklärung des Phänomens von der Annahme aus, dass je ein Krystall je einem Capillar-Raum seine Entstehung verdanke. Da Caspary nichts von direkten Messungen oder mikroskopischen Beobachtungen des Le Conte erwähnt, so ist diese Annahme als eine rein willkürliche zu betrachten um so mehr, da meine Untersuchungen jedesmal ergaben, dass die Krystalle keine Beziehung zu den Capillar-Räumen der sie erzeugenden Gewebe haben; die Krystalle sind viele hundertmal breiter als die Intercellular-Räume. Dagegen stimmt Le Conte's Ansicht mit den Thatsachen überein, wenn er in der schlechten Wärmeleitungsfähigkeit des Bodens und der Gewebe die erste Ursache der successiven Eisbildung sieht, und annimmt, dass immer nur der äusserste Theil des Wassers des feuchten Körpers gefriert und von unten her die schon gebildeten Eislagen verdickt (verlängert). Die Kräfte welche nach Le Conte das Wasser zuführte sind capillare.

Caspary will eine strenge Sonderung der Krystallbildung auf dem Boden von der auf den Pflanzen; für die von ihm auf Pflanzen gesehenen Krystalle nimmt er an, dass der Wasserzufluss zu ihrem Wachsthum vermöge der physiologischen Thätigkeit des Holzkörpers stattfindet, er nimmt an, das Wasser werde

Digitized by Google

durch die Kraft, welche den Saft von der Wurzel nach oben treibt, hinausgepresst. Mit Le Conte stimmt er darin überein, dass er in der Basis der Krystalle den jüngsten Theil sieht. Auch er ist der Ansicht dass jeder Krystall einem Capillar-Raum entspricht, eine Ansicht welche in Bezug auf den Bau des Holzkörpers absolut unerklärlich erscheint. Er lässt die Eisfäden isolirt entstehen und dann durch capillar eingeschobenes Wasser sich verbinden.

H. v. Mohl knüpft an die Erscheinung der Eisscheiben auf den Blattpolstern folgende Betrachtung: »Es lassen diese Erscheinungen darauf schliessen, dass in Folge eines langsamen Aussickerns von Saft aus allen Stellen der Trennungsschichte sich gleichmässig eine dünne Eislamelle nach der anderen bildet, sich an das bereits gebildete Eis angeschlossen, und dieses nach oben vor sich her getrieben hat. Es ist wohl zur Bildung einer solchen auf einer feuchten Substanz sich bildenden Eissäule kein bedeutender von unten her auf die gefrierende Wassermasse ausgeübter und dieselbe zum Ueberfliessen bringender Druck nöthig, sondern es scheint sich an der Grenze zwischen einer mit Wasser durchdrungenen Substanz und einer auf derselben gebildeten Eisschicht, wenn beständig fort aus dem Inneren der Substanz Wasser langsam nachsickern kann, eine Eisschicht nach der andern zu bilden, und auf diese Weise eine Eissäule von gleichmässiger Dicke zu entstehen.« Ich war in der That ebenso überrascht als erfreut diese Erklärungsweise bei v. Mohl zu finden, als ich meine oben mitgetheilte Theorie bereits ausgebildet hatte; meine oben angegebene Erklärung unterscheidet sich wie ich glaube von der v. Mohl's nur durch das Wort »aussickern«, welches er braucht und für welches er keine bestimmte Kraft angiebt; da ich statt dessen eine allgemein bekannte und ganz bestimmte Kraft, die Imbibitionsthätigkeit, als Ursache des continuirlichen Wasseraustrittes bezeichnet habe, so glaubte ich meine Erklärungsweise beibehalten zu dürfen. Dass H. v. Mohl keinen wesentlichen Unterschied zwischen der Bildung der Boden-Krystalle und der Eiskrusten auf Pflanzen macht, geht daraus hervor, dass er auf die mitgetheilte Vorstellung, die er sich von dem Bildungsprozess des letzteren macht, durch die Bildung des Kammeises geleitet wurde. »Man kann sich ihre Entstehung (der Bodenkrystalle) kaum anders denken, als dass während der Erstarrung des Wassers in den äussersten Endigungen der

Digitized by Google

den Boden durchziehenden leeren Räume ein beständiges schwaches Nachsickern von Wasser stattgefunden hat, durch welches das Material zu beständigem Ansatz neuen Eises am Grunde der Nadeln geliefert wurde.«

Es ist klar, dass die von mir gegebene Erklärungsweise sich ebensogut dem Boden anbequemt, wie den Pflanzengeweben. Ich stimme daher v. Mohl's Ansicht vollkommen bei, wenn er zwischen den Eisbildungen auf dem Boden und auf Pflanzen keinen wesentlichen Unterschied statuirt.

Auch hält es v. Mohl für möglich, dass das »Aussickern« durch die Zusammenziehung der Zweige bei der Abkühlung noch unterstützt werde.

Dass Bouché und Caspary die blättrigen und faserig-kompakten Eisbildungen nur auf Pflanzen des freien Landes beobachteten, möchte ich in Folgendem begründet finden. Wenn es zur Erklärung jener Eisbildungen auch nicht nöthig ist, einen von den Wurzeln ausgehenden bedeutenden Saftdruck anzunehmen, welcher die Flüssigkeit über die Oberfläche des Holzes hinauspresst, so erfordert doch die Quantität des Eises, wie Caspary mit vollem Recht angiebt, einen Zufluss von unten. Bei den Pflanzen in freiem Lande findet dieser Zufluss statt, denn die grosse Masse des Bodens kühlt sich bei den ersten Nachtfrösten nur wenig ab, die Wurzeln stehen in einem noch ziemlich hoch temperirten Medium, nehmen Wasser auf und senden es nach oben. Bei den in Töpfen stehenden Pflanzen kühlt dagegen die Erde schon in wenigen Stunden stark aus, wenn die Temperatur unter 0° sinkt, die Wurzeln hören dann auf Wasser aufzunehmen und hinaufzusenden. Man kann sich durch sehr einfache Versuche von der Sistirung der Wurzelthätigkeit durch Abkühlung des Bodens überzeugen. Wenn man Tabak- oder Kürbispflanzen in gläsernen Gefässen erzogen hat und diese Gefässe einige Stunden lang mit Schnee umgiebt, so fangen die Blätter an stark zu welken; die Lufttemperatur von 4—10° R. unterhält nämlich die Ausdünstung während die Wurzeln in dem abgekühlten Boden das Verlorene nicht ersetzen können; erwärmt man dann den Boden auf 10—15° R., so werden die Blätter wieder straff, weil die Wurzeln wieder thätig geworden sind (Versuchstationen Heft 3 und 4 Berichte über die physiol. Thätigkeit u. s. w. von Dr. Julius Sachs).

Demnach erklärt sich das Nichterscheinen der Eisbildungen

Digitized by Google

auf den Topfpflanzen daraus, dass bei ihnen der Zufluss von unten nicht stattfindet, und folglich diejenigen Erscheinungen nicht eintreten, welche nach Caspary das Abspringen der Rinde bedingen, auf welches dann die Krystallbildung folgt.

Als Resultat der vorstehenden Betrachtungen möchte ich folgende Sätze hinstellen: Wenn imbibirte Körper (Zellhäute, thoniger oder humoser Boden) von hinreichender Masse um langsam auszukühlen über 0° warm sind und an ihren Oberflächen von einer unter 0° kalten Luft berührt werden, so erstarrt die äussere Schicht des Imbibitionswassers zu Eis, und bildet seitlich verbundene, mehr oder weniger regelmässig sechseckige Platten; durch Erneuerung der abgefrorenen Wasserschicht, und Erstarren derselben verdicken sich diese Platten und endlich erscheint die zuerst gebildete Platte nur als die oberste Schicht einer mehr oder weniger hohen Eissäule. Jede Kraft, welche sehr langsam und continuirlich ein Austreten des Wassers im Sinne der Imbibition bewirkt, kann die Krystallbildung befördern, solche Kräfte sind die Contraction des Gewebes, der von den Wurzeln aus stattfindende Saftdruck.

Anhang.

Ueber die Zusammenziehung saftiger Pflanzentheile bei dem Gefrieren.

Herr Prof. H. Hoffmann hat in seinen Grundzügen der Pflanzenklimatologie 1857 S. 327—329 Messungen angegeben, um auf volumetrischem Wege die Zusammenziehung saftiger Pflanzentheile bei dem Gefrieren zu erkennen. Die Contractionen, welche er auf diese Weise erhielt, erreichen bei Blättern 21 bis über 30 p.Ct. des ursprünglichen Volumens. Diese ganz unglaublich grossen Zusammenziehungen veranlassten mich zu neuen Versuchen über diesen Gegenstand um so mehr als ich die von Herrn H. Hoffmann befolgte Methode für unbrauchbar halte. Die Blätter wurden von ihm in das 7° warme Wasser in einem Masscylinder eingetaucht, dann dem Frost ausgesetzt und abermals in das 6°—7° warme Wasser eingetaucht. Die Differenzen der Wasserhöhe bei beiden Messungen wurden als Contractionen durch den Frost bezeichnet. Allein gefrorene Blätter, welche man in Wasser von 7° taucht sind momentan erfroren, d. h. rasch aufgethaut wie aus dem folgenden Theil meiner Abhandlung erhellen wird.

Diese rasch aufgethauten Blätter nehmen nicht nur ein anderes Volumen an als sie im Zustande der Erstarrung hatten, sondern sie zeigen auch ein durchaus verändertes Verhalten gegen Wasser. Die frischen Blätter sind niemals mit Wasser gesättigt, nehmen dasselbe also noch aus dem Masscylinder bei dem Untertauchen auf; bei einem gefrorenen Blatte tritt nicht nur eine ganz andere Wassercapacität auf, sondern die Aufnahme und Abgabe von Wasser, die Diffusion findet hier mit ausserordentlich grosser Geschwindigkeit statt, so dass bei dem ersten und bei dem zweiten Messen unter Wasser während der Beobachtung Volumveränderungen stattfinden, welche mit der Zusammenziehung bei dem Gefrieren nichts zu thun haben, und diese Aenderungen sind um so complicirter als sie mit Aufnahme des Masswassers verbunden sind. Aber selbst wenn Alles das nicht stattfände, so wäre der Einwurf nicht zu beseitigen, dass H. Hoffmann bei seiner zweiten Messung nicht das gefrorene sondern das rasch aufgethaute Blatt mass.

Da ich kein Mittel kenne, um an Pflanzentheilen so genaue volumetrische Beobachtungen zu machen, wie sie für den gegenwärtigen Zweck allein werthvoll sein können, so beschränkte ich mich darauf, lineare Messungen zu versuchen, aus denen sich doch wenigstens annähernd die Volumänderung abschätzen lässt.

Blätter wurden an der Stielbasis abgeschnitten, dann die Lamina beiderseits von der Mittelrippe abgeschnitten. Der verlängerte Blattstiel wurde dann mit seiner concaven Seite auf eine grade Linie auf weissem Papier aufgedrückt und an beiden Endpunkten mit einem sehr spitzen harten Bleistift Punkte gemacht; dann kam der Pflanzentheil in eine zugestopfte Röhre um Verdunstung zu verhindern und diese in eine Kältemischung, aus Schnee und $SO_3 HO$, worin die Stiele binnen 10—15 Minuten völlig hart wurden; sodann wurden sie in einem ziemlich kalten Zimmer wieder auf die Linie gelegt, das eine Ende auf den entsprechenden Bleistiftpunkt, das andere Ende fiel dann innerhalb des früheren Endpunktes und wurde hier mit einem neuen Punkt möglichst genau bezeichnet. Erst dann wurden mit dem Zirkel die Entfernungen gemessen.

Digitized by Google

Blattstiel sammt Mittelrippe von:	Länge frisch.	Länge gefroren.	Zusammenziehung in pCt. der ursprüngl. Länge.
Winter-Raps	88^{mm}	86^{mm}	1,70 p.Ct.
Rothe Lupine	71^{mm}	$70,3^{mm}$	0,99 ,,
Ballota nigra	135^{mm}	134^{mm}	0,73 ,,
Grünkohl	208^{mm}	206^{mm}	0,96 ,,
Ranunculus repens	$52,0^{mm}$	$50,2^{mm}$	3,46 ,,
Capsella	$82,5^{mm}$	$80,5^{mm}$	2,42 ,,
Tabak	193^{mm}	180^{mm}	1,64 ,,
Blatt von Allium cepa	199^{mm}	194^{mm}	2,51 ,,

Der Blattstiel des Tabaks zog sich bei dem Aufthauen nochmals um 1^{mm} zusammen.

Wie man sieht habe ich bei den Messungen meist nur die ganzen Millim. angegeben, diess geschah weil bei dem Auflegen des Stiels auf das Papier eine gewisse Willkürlichkeit nicht zu vermeiden ist zumal nach dem Gefrieren, so dass die Angabe von Zehntelmillimeter schon zu den illusorischen Genauigkeiten gehört.

Die von Hofmeister bei seinen Untersuchungen über die Beugungen saftreicher Pflanzentheile nach Erschütterung (Berichte der königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1859. S. 188) angewandte Methode, welche einen hohen Grad von Genauigkeit zulässt, da die Länge des sich selbst überlassenen Theiles ohne willkürlichen Druck aus anderen Daten berechnet wird, konnte ich bei den gefrorenen Stielen nicht anwenden; ich habe sein sinnreiches Verfahren in einer ziemlich rohen Weise vereinfachen müssen. Indessen ist das Maximum der Messungsfehler nicht über $0,5^{mm}$ zu schätzen.

Die hier mitgetheilten Zahlen für die linearen Zusammenziehungen dürfen nicht unmittelbar zu Schätzungen über das Volumen benutzt werden, denn es ist sehr wahrscheinlich, dass die Zusammenziehung senkrecht gegen die Axe der Stiele viel geringer ist. Jedenfalls zeigen diese Messungen eine ungleich geringere Contraction, als Hoffmann erhalten hat. Wenn so grosse Zusammenziehungen stattfänden, wie er sie angiebt, so würde man mit blossen Augen ohne alle Messung das Resultat erkennen, da seine Volumänderungen den dritten Theil (Dracaena cernua) des Gesammtvolums erreichen.

Ich habe ferner aus Rüben und Kürbisfleisch quadratische

Digitized by Google

und prismatische Stücke möglichst gross ausgeschnitten, auf Papier ihre Dimensionen bezeichnet und dann gegen Verdunstung geschützt gefrieren lassen. Es ist mir aber niemals gelungen eine deutliche Volumänderung zu bemerken; es ist diess um so merkwürdiger, da diese Theile durch Verdunstung enorme Contractionen erfahren.

Die Zusammenziehung bei dem Gefrieren ist auf der Unterseite der Blattstiele des Raps viel stärker als auf der Oberseite, denn wenn man ganze in Töpfen stehende Pflanzen gefrieren lässt, so krümmen sich die Stiele stark und biegen sich abwärts. Setzt man eine gefrorene Rapspflanze an die Sonne, so krümmen sie sich so rasch aufwärts in ihre natürliche Lage, dass man die Bewegung mit den Augen leicht verfolgen kann. Auch die Unterseiten der Blätter ziehen sich bei dem Gefrieren stärker als die Oberseiten zusammen, wodurch sich die Lamina nach unten zusammenrollt. Ich erwähne diese schon von Linné (Amoenit. academ. Vol. IV de somno plant. p. 338) bei Euphorbia Lathyris und von Göppert (Wärme-Entwickelung 1830. S. 12), ausserdem bei Cheiranthus u. a. gesehene Stellungsänderung der Blätter nur um die Bemerkung daran zu knüpfen, dass das Abwärtsbeugen der Stiele und die Einrollung der Lamina schon vor dem Erstarren eintreten, dass also die Zusammenziehungen durch Kälte nicht eine alleinige Folge des Gefrierens sind sondern bei einem gewissen Grade der Abkühlung dem Gefrieren vorausgehend anfangen. Daraus ergiebt sich nun das merkwürdige Faktum, dass starke Temperaturerniedrigungen oder besser Temperaturänderungen in der Nähe des Eispunktes als Bewegungsreize wirken, während bekanntlich die Temperaturänderungen zwischen einigen Graden über Null bis zu 30° und mehr hinauf keine Bewegungen erzeugen.

Veränderung der Zellhäute durch rasches Aufthauen.

Wenn man einen Kürbis der Länge nach durchschneidet, so bemerkt man auf dem Schnitt dreierlei Schichten welche durch den Lauf der Gefässbündel und die Festigkeit des Parenchyms charakterisirt sind. Unmittelbar innerhalb der Schale liegt eine Schicht, worin man nur Querschnitte von Gefässbündeln bemerkt, weiter nach innen werden die Bündel zahlreicher

und nehmen eine der Peripherie parallele Richtung an, endlich in der Nähe der Kerne biegen die peripherischen Läufe in radiale Richtungen ein. Bezeichnen wir daher die beiden organischen Enden der Frucht als Pole, so hat man unter der Schale eine Bündelschicht, deren Lauf dem Aequator parallel geht; die mittlere Schicht besteht aus Bündeln, welche die Richtung der Meridiane haben, die dritte läuft radial.

Auf einem frisch gemachten Längsschnitt bemerkt man auf dem Querschnitt jedes äquatorial verlaufenden Bündels einen hellen kleinen, kugelförmigen Tropfen, der sich in Kurzem bedeutend vergrössert; sie erreichen oft 5—6^{mm} Durchmesser ohne ihre runde Gestalt zu verlieren; diese aus den Gefässbündeln kommende Flüssigkeit färbt ein rothes Lakmuspapier dunkelblau; das umgebende Parenchym dagegen ist stark sauer wie gewöhnlich. Wenn man die zuerst hervorquellenden Tropfen mit einem Filtrirpapier abtrocknet, dann einen Streifen neutrales Lakmuspapier auf den Schnitt legt und mit dem Finger ein wenig andrückt, so färbt sich das Papier an allen Stellen, wo es das Parenchym berührte roth, nur da wo es auf die Querschnitte der äusseren Bündelschicht aufgedrückt wurde zeigen sich intensiv blaue Punkte. Es ist demnach kein Zweifel, dass in der Kürbisfrucht ein chemischer Gegensatz zwischen den Gefässbündeln und dem Parenchym besteht. Da ich im December, wo ich diess zuerst beobachtete noch eine Kürbispflanze mit einigen Blättern in einem Topf im Laboratorium stehen hatte, so konnte ich mich überzeugen, dass in den Querschnitten der Blattstiele Dasselbe zu beobachten ist. Die aus den Bündeln austretende Flüssigkeit ist deutlich alkalisch, das Parenchym der Rinde stark sauer. Drückt man einen Querschnitt des Blattstiels öfter nach einander auf einen neutralen Streifen Reagenspapier, so erhält man rothe Kreisflächen in denen die blauen Gefässbündelabdrücke einen Zirkel bilden. Ein Kürbiskeim, dessen Cotyledonen noch klein aber schon grün waren und der bereits zwei kleine Blättchen besass gab dieselben Reaktionen, wenn man den Querschnitt des Keimstengels auf Reagenspapier aufdrückte; zehn blaue Punkte in einem rothen Kreise. Die allerdings verkümmerte Wurzel und die Cotyledonen zeigten keine alkalische sondern allein saure Reaktion.

Das Vorkommen alkalischer Flüssigkeiten neben den gewöhnlich sauren Säften des Parenchyms wurde zuerst von Payen

(Compte rendu Bd. XXVII No. 1—2. 1848; bot. Zeitg. 1848. S. 849) beobachtet. Aus der Gegenwart der Ablagerungen von $CaOCO_2$ in gewissen Zellen der Urticeen folgerte er, dass diese Zellen schwach alkalisch sind, während das umgebende Gewebe sauer ist. Die hellen oberflächlichen Drüsen auf dem Mesembrianthemum crystallinum bezeichnet er als mit alkalischer Flüssigkeit gefüllt; das unterliegende Gewebe ist sauer. Dagegen scheint es bis jetzt nicht bekannt zu sein, dass die Gefässbündel in den vegetativen Theilen und in der Frucht einer Pflanze zu allen Lebenszeiten alkalisch sind und in einem sauren Parenchym verlaufen.

Die aus den Querschnitten der Gefässbündel der Kürbisfrucht hervorquellenden alkalischen Tropfen nehmen nach ½ Stunde ein trübes milchweisses Ansehen an, bei Berührung mit einer Spitze bemerkt man dass sie sich mit einer festen, elastischen Haut umgeben haben; nach einigen Stunden ist die ganze anfangs flüssige Kugel zu einer festen Masse erstarrt und ist nun elastisch wie Kautschuk. Erhitzt man ein hinreichendes Quantum dieser Substanz auf einem Platinblech, so entwickelt sich ein nach verbranntem Horn riechender Dampf; es bleibt eine voluminöse Kohle zurück welche schwer verbrennt. Die Asche ist im Verhältniss zu der Substanz sehr bedeutend; setzt man einen Tropfen Wasser darauf, so wird sie gänzlich aufgelöst, besteht also aus Alkalisalzen; ein rothes Lakmuspapier in die Lösung getaucht wird dunkelblau.

Da Braconnot (Rochleder Phytochemie 91) in den Kürbissen die Gegenwart eines Ammoniaksalzes angiebt, so kam ich auf die Vermuthung, die alkalische Reaktion der frischen Bündelflüssigkeit könne von einem solchen herrühren. Das scheint aber nicht der Fall zu sein, denn die blauen Flecken, welche sie auf dem Reagenspapier zurücklässt, bleiben auch nach starkem Austrocknen und Erwärmen desselben, und die bedeutende Quantität der fixen Alkalien in der Asche dieser Flüssigkeit giebt der Annahme Raum, dass die alkalische Reaktion der frischen Flüssigkeit von einem fixen Alkali herrührt. Setzt man auf einen frischen Schnitt einen Tropfen Molybdänphosphorsäure, so entsteht auf jedem Gefässbündel eine kleine weisse Kruste; wäre Ammoniak zugegen, so würde diese gelb sein. Jenes Reagens auf eine dünne Schicht Kali, welche man auf Glas ausgebreitet hat, gesetzt giebt eine ebensolche weisse Haut.

Digitized by Google

Die in den Bündeln enthaltene Flüssigkeit reicht nicht hin, um den sauren Saft des umgebenden Parenchyms zu neutralisiren. Wenn man auf einem frischen Schnitt mit dem Messer hin und her schabt, so dass Bündelflüssigkeit und Zellsaft sich mischen, so ist dann das Gemenge noch immer stark sauer. —

Die Thatsache, dass saure und alkalische Flüssigkeiten, nur durch die äusserst dünnen Wände der Zellen getrennt, neben einander vorkommen können, wirft ein eigenthümliches Licht auf die Eigenschaften der Zellhäute. Diese Zellhäute sind offenbar diosmotisch, man weiss mit welch grosser Kraft saure und alkalische Flüssigkeiten gegen einander diffundiren, und dennoch findet diess hier nicht statt. Diess weist darauf hin, dass die lebendigen Zellhäute physikalische Eigenschaften besitzen, für welche wir bisher keine Analogie kennen. Zu demselben Schluss führt das Vorkommen einzelner Gerbstoffzellen mitten in einem Parenchym welches keinen Gerbstoff enthält, ebenso das Vorhandensein flüssiger Farbstoffe in einzelnen Zellen mitten in einem ungefärbten Gewebe.

Lässt man nun ein Stück Kürbis, von dessen Reaktionen man sich überzeugt hat, bei starker Kälte rasch gefrieren, und durchschneidet man dann das gefrorene Stück mit einem kalten Messer, legt man dann auf den frischen Schnitt ein warmes Reagenspapier und drückt es mit dem Finger an, so erhält man keine blauen Punkte mehr, die alkalische Reaktion ist plötzlich verschwunden, nur die saure ist geblieben.

Diese merkwürdige Veränderung durch ein rasches Gefrieren und rasches Aufthauen brachte mich auf den Gedanken, dass die alkalische Flüssigkeit bei dem Aufthauen sich mit der überwiegend sauren Umgebung mengt und dass so die alkalische Reaktion verschwindet. Andere später zu beschreibende Erfahrungen hatten mich unterdessen belehrt, dass die Zellhäute durch rasches Aufthauen permeabler werden und so fand ich mich zu der Ansicht gedrängt, dass die beiden Flüssigkeiten im Kürbis bei dem Aufthauen gegen einander diffundiren, dass demnach die Zellhäute, welche vorher die Fähigkeit besassen, Monate lang zwei chemisch verschiedene Stoffe zu trennen, diese Fähigkeit plötzlich verloren hatten.

Diese Meinung wurde gleichzeitig durch ein anderes nicht minder merkwürdiges Phänomen hervorgerufen. Wenn man nämlich eine Scheibe aus einer dunkelrothen Rübe in kaltem

Digitized by Google

Wasser abwäscht, um den Farbstoff der zerschnittenen Zellen zu entfernen und diese Scheiben sodann in Wasser von etwa 0° bis 10° R. legt, so wird selbst nach mehreren Tagen das Wasser kaum merklich gefärbt, es nimmt höchstens einen hellrothen Schein an. Lässt man nun dieselbe Scheibe gefrieren und bringt sie im gefrorenen Zustande in Wasser, welches die frühere Temperatur zwischen 0° und 10° R. hat, so thauen die äusseren Schichten der Scheibe schnell auf, und in dem Masse als diess geschieht, färbt sich das umgebende Wasser dunkelroth; bei längerem Liegen und öfterem Erneuern des Wassers lässt die Scheibe endlich allen Farbstoff austreten. Die frischen Zellhäute halten also den Farbstoff zurück, die rasch aufgethauten dagegen lassen ihn frei gegen das Wasser diffundiren.*)

Ein Stück von einem welk gewordenen Kürbis wog 98,8 Gramm; nachdem es eine Stunde in Wasser von 20° R. gelegen hatte, wog es 100,2 Gramm, hatte also 1,4 Gr. aufgenommen. Dieses Stück war an freier Luft binnen drei Stunden bei —5° R. gefroren und wog in diesem Zustand 99,3 Gramm, hatte also 0,9 Gramm durch Verdunstung verloren; nachdem es in Wasser von 20° R. aufgethaut und eine halbe Stunde darin gelegen hatte, wog es 103,1 Gramm. Demnach hatte es bei dem Aufthauen binnen ½ Stunde 3,8 Gramm aufgenommen, während es im frischen Zustande in ½ Stunde nur 0,7 Gr. aufnahm. Die Geschwindigkeit womit das welke Stück Wasser aufnahm hatte sich durch das rasche Aufthauen auf das Fünffache gesteigert. Es ist offenbar, dass dieses Faktum, dem ich unten noch mehrere andere anreihen werde, mit der oben ausgesprochenen Ansicht übereinstimmt, indem es beweist, dass die Permeabilität der Zellhäute durch das Aufthauen erhöht wurde.

Nicht bloss der Ein- und Austritt von Flüssigkeiten findet durch erfrorene (d. h. schnell aufgethaute) Zellhäute rascher statt, sondern auch die Gase dringen in erfrorene Zellen mit grösserer Geschwindigkeit ein, wie folgende Beobachtungen zeigen.

Durchschneidet man eine Runkelrübe mit ungefärbtem Fleisch und lässt sie einige Zeit an der Luft liegen, so färben sich die Querschnitte sämmtlicher Gefässbündel schwarz, jedoch

*) Herr Prof. Weber, dem ich diese Beobachtung mitzutheilen die Ehre hatte, sagte mir, dass die Adern gefrorener Leichen den Farbstoff austreten lassen, es scheint also bei dem Erfrieren animalischer Häute etwas Aehnliches stattzufinden wie bei dem der vegetabilischen Zellmembranen.

Digitized by Google

nur an der Oberfläche; nimmt man dann eine dünne Scheibe ab, so sind die Gefässbündel daselbst noch ungefärbt. Es bedarf keiner Erörterung, dass diese Schwärzung eine Wirkung des Sauerstoffs der Luft ist.

Lässt man nun eine ganze Rübe gefrieren und durchschneidet sie dann um sie in einem warmen Zimmer aufthauen zu lassen, so schwärzen sich die Gefässbündel viel schneller; nach 24 Stunden, wo bei der ersten die Schwärzung nur oberflächlich ist, ist bei der aufgethauten Rübe diese Veränderung durch die ganze Masse gedrungen, das ganze Fleisch der Rübe ist schwarz geworden. Demnach muss hier der Sauerstoff der Luft sehr rasch eingedrungen sein.

Nur die Geschwindigkeit des Aufthauens bringt diese Veränderung in gefrorenen Geweben hervor.

Lässt man Stücke von Rüben und Kürbissen bei 4° bis 6° Kälte gefrieren, und bringt sie dann in eine Luft von 2° bis 3° über Null, so nehmen sie nach dem Aufthauen das Ansehen erfrorener Pflanzentheile an, das opake Aussehen ist verschwunden, die Stücke sind jetzt diaphan, es hat offenbar eine Infiltration der luftführenden Räume stattgefunden. Ganz dasselbe geschieht unter gleichen Bedingungen mit gefrorenen Blättern von Runkelrüben, Raps, Kohl, Phaseolus und Faba. Noch entschiedener und rascher findet das Erfrieren statt, wenn man die gefrorenen Theile in warmes Wasser wirft; selbst in Wasser von 6° bis 10° erfrieren die gefrorenen Theile noch. Legt man die Stücke aber in Wasser von 0° so überziehen sie sich sogleich mit einer immer dicker werdenden Eiskruste; steht das Wasser in einer Luft von 0° bis 3° R. so thaut dann zuerst das Eis und endlich das Gewebe langsam auf. Unter solchen Umständen behalten die genannten Blätter, selbst die so höchst empfindlichen Blätter des Tabaks ihre frische Farbe, ihre Opacität, ihre Straffheit, sie sind nicht infiltrirt. Dagegen ist bei diesem Verfahren das Erfrieren der Rüben- und Kürbisstücke kaum zu vermeiden, auch in Wasser von 0° wo sie binnen 12—24 Stunden erst aufthauen zeigen sie nachher alle Anzeichen des Erfrorenseins. Legt man sie dagegen v o r dem Gefrieren in Wasser, lässt das Ganze zu einem einzigen Eisklumpen erstarren, und bringt diese Masse nun in eine Luft von 4° bis 5° R. so thaut sie langsam von aussen nach innen auf; hatte man z. B. ein Liter Wasser genommen, so dauert es 24 Stunden bis das Ganze aufgethaut ist.

Digitized by Google

Alsdann aber schwimmen die Kürbis- und Rübenstücke völlig unversehrt in dem Wasser, sie haben ihre ganze Frische behalten, sind fest, elastisch, opak, lassen bei Druck kein Wasser fliessen; Blätter der empfindlichsten Art, wie die von Phaseolus, Faba, Tabak überstehen die härtesten Kältegrade bei diesem Verfahren.*)

---

*) H. Hoffmann (Pflanzenklimatologie S. 321) hat ähnliche Versuche gemacht und ist zu einem entgegengesetzten Resultat gekommen. »Wollte man, sagt er, den Schluss ziehen, dass die rasche Temperaturerhöhung an und für sich allein die Ursache der erwähnten Vorgänge (der Bräunung der gefrorenen und bei 11—12°.aufgethauten Blätter) sei, so würde man sehr irren.« Er schliesst diess daraus, dass gefrorene Blätter von Camphora, Aucuba viburnum Tinus, Camellia, Rosmarin u. a. in Wasser von 12° gebracht nach 24 Stunden noch grün waren. Allein trotz der grossen Unempfindlichkeit dieser festen Blätter zweifle ich noch an der Erhaltung derselben, da Hoffmann nur die Farbe als Kriterium ihres Zustandes angiebt; die Blätter von Faba, Tabak und Phaseolus welche gefroren in Wasser von 10—12° R. eingetaucht werden sind fast momentan getödtet; allein sie behalten ihre grüne Farbe im Wasser tagelang bei, ausserhalb desselben sind sie in einigen Minuten ihrer schönen Farbe beraubt. Auch Hoffmann giebt an, dass die aus dem Wasser hervorstehenden Theile sich schwärzten. Alle früheren Schriftsteller haben grosses Gewicht auf die Verfärbung erfrorener Blätter gelegt, und Hoffmann geht so weit, darin das Kriterium zur Beurtheilung ihres Zustandes zu sehen. Allein nach meinen Versuchen ist die Verfärbung ein sekundäres Phänomen, das einzige ganz allein und unter allen Umständen Entscheidende über die Frage ob ein Pflanzentheil erfroren sei, ist die Infiltration der Lufträume. Wenn ein Blatt oder sonst ein Gewebetheil nach dem Aufthauen im durchfallenden Licht heller und homogen aussieht, auf schwarzem Hintergrunde dunkler erscheint, also durchsichtig geworden ist, dann ist diess das Zeichen, dass seine Intercellular-Räume sich mit Flüssigkeit gefüllt haben, infiltrirt sind. Bleibt ein solcher Theil an der Luft liegen, so tritt meist (nicht immer z. B. bei den Schnitten von Wasserrüben) eine Farbenänderung ein, ist er unter Wasser aufgethaut und dabei erfroren, so tritt selbst bei den veränderlichsten Blättern keine Farbenänderung ein. Es ist wahrscheinlich, dass diese Verfärbung auf dem oben genannten raschen Eindringen der Luft in die permeabler gewordenen Gewebe beruht, was unter Wasser nur langsam geschieht.

Göppert (Wärme-Entwickelung in den Pfl., deren Gefrieren und Schutzmittel. Breslau 1830 S. 231—232) kam ebenfalls durch seine Versuche zu einem, dem meinigen entgegengesetzten Resultat. Bei den genauen Untersuchungen desselben, bei seiner grossen Bekanntschaft mit dem Aussehen erfrorener Pflanzen ist es nicht erlaubt, zu zweifeln, dass seine Beschreibung richtig ist. Indessen finde ich keine Angabe, dass er seine gefrorenen Pflanzentheile unmittelbar aus der kalten Luft in kaltes Wasser oder in Schnee brachte, und diess ist bei den Blättern entschei-

Digitized by Google

Durch die erhöhte Permeabilität der Zellwände, welche bei raschem Aufthauen eintritt, erklärt sich auch das Hauptphänomen des Erfrierens, nämlich die Infiltration der Lufträume des Gewebes. Die Infiltration macht sich hinlänglich durch das veränderte Aussehen geltend, zunächst durch die homogene grüne Färbung, dann durch die Durchsichtigkeit. Ausserdem ist es nicht schwer, sich direkt davon zu überzeugen:

---

dend. Ich habe im Anfang meiner Untersuchungen oft negative Resultate erhalten weil ich das rasche Verderben der Blätter nicht kannte. Es genügt, ein gefrorenes Blatt von Faba, Phaseolus oder Tabak 5—10 Sekunden lang in eine Luft von 10—12°R. zu bringen um es völlig zu tödten. Die blosse Berührung mit dem Finger tödtet den berührten Theil fast momentan. Ich hatte im December zwischen einem Doppelfenster eine grössere Zahl von Keimpflanzen von Faba stehen; in der Nacht vom 23sten auf den 24sten gefror die Erde des Topfes sammt den Pflanzen; diese waren völlig spröde. Um mich von ihrem Zustande zu überzeugen, hatte ich bei einigen die Blätter, bei andern die Stengel angegriffen ohne sie zu drücken. Darauf blieben die Pflanzen in dem kalten Raume sich selbst überlassen, das Thermometer stieg langsam bis zum 25sten auf 0° (in der Erde des Topfes), als ich dann nach 8 Tagen zurückkehrte und die Pflanzen betrachtete, fand ich alle unberührten völlig gesund und weiter gewachsen, sie stehen noch jetzt an meinem Fenster, die berührten Stellen dagegen waren braun geworden, und die berührten Stengel, auf einer Seite gebräunt, hatten das Wachsthum der betreffenden Pflanzen aufgehalten. An gefrorenen Blättern in Töpfen stehender Bohnen erzeugte ich durch eine 1—2 Sekunden lange Berührung mit dem Finger erfrorene Flecke, während das Uebrige gesund blieb. Diess Alles lässt jedoch keine Anwendung auf die Versuche mit Zwiebeln zu, welche Göppert machte. Ich habe diese Versuche nicht wiederholt und habe also kein Urtheil darüber; aber nach Analogie mit den viel empfindlicheren Kürbisstücken zu schliessen, glaube ich, man würde auch Zwiebeln durch ein noch langsameres Aufthauen vor dem Erfrieren schützen können. Um Blätter in kaltem Wasser aufthauen zu lassen, lege ich sie in einen Glascylinder, der in einer Kältemischung steht, welche während 12 Stunden immerfort unter —15°R. bleibt. Ein Thermometer dessen Kugel von den Blättern umgeben ist giebt die Temperatur an, bei welcher sie gefrieren; nachdem das Thermometer einige Stunden lang unter 0° gestanden, und die Blätter bei Berührung mit einem Glasstabe sich als erstarrt bekunden, bleibt der Cylinder noch in der Kältemischung stehen, wird aber mit kaltem Wasser gefüllt; jetzt erst wird er herausgenommen und in eine nicht allzuwarme Luft gestellt. Bei diesem Verfahren haben sich die empfindlichsten Blätter immer frisch erhalten. Indessen verhalten sich verschiedene Pflanzen gegen Kälte so verschieden, dass man auf Analogien nicht viel bauen darf, und unmöglich ist es nicht, dass Zwiebeln durch das Gefrieren an- und für sich getödtet werden; es scheint, dass die Zellen in den erfrorenen Schuppen von Allium cepa sich lockern und durch leichten Druck von einander ablösen.

Digitized by Google

Wenn man nicht allzufeine Schnitte des Gewebes ohne Wasserzusatz auf den Objektträger bringt, so erkennt man die Luft in den Intercellular-Räumen und den Spiralgefässen; lässt man nun den Schnitt auf dem Objektträger möglichst schnell gefrieren, indem man ihn in einen Cylinder bringt, welcher in einer möglichst kalten Mischung steht, so dass das Gefrieren in einigen Minuten stattfindet, und bringt man ihn dann in einem kalten Zimmer unter das Mikroskop, so erkennt man zwischen den gefrorenen Zellen noch die Lufträume. Dann beginnt ein langsames Thauen und man bemerkt wie sich ein Intercellular-Raum nach dem andern mit Flüssigkeit füllt; ebenso tritt die Luft aus den Gefässen hervor und der ganze Gewebtheil wird nun durchsichtiger, gewinnt ein Ansehen, als ob man ihn mit Kalilauge behandelt hätte.

Die früheren Beobachter scheinen das Infiltrations-Phänomen als eine einfache Farbenänderung betrachtet zu haben, ich finde wenigstens nirgend eine Andeutung, dass irgend Jemand die nach raschem Thauen eintretende Farbenänderung als eine Infiltration bezeichnet hätte.

Ausser der Infiltration der Lufträume und der damit verbundenen Aenderung der Durchsichtigkeit, erklären sich aus der erhöhten Permeabilität der Zellhäute noch zwei andere Erscheinungen, welche nach dem raschen Aufthauen eintreten, nämlich die Zerfliesslichkeit und der Mangel an Turgor.

Eine frische durchschnittene Rübe, Kartoffel, Kürbis, Blätter kann man mit aller Kraft der Hände zusammendrücken, ohne mehr als ein Feuchtwerden der Schnittflächen zu erzielen; dieselben Stücken gefroren und dann rasch aufgethaut lassen schon bei sehr geringem Druck Flüssigkeit in Masse auslaufen, und durch kräftiges Pressen mit den Händen ist es möglich die Flüssigkeit in dem Grade auszutreiben, dass man zuletzt nur eine lederartige, zähe, ziemlich trockene Masse übrig behält. Wenn Göppert nicht schon den Beweis geführt hätte, dass bei dem Erfrieren keine Zerreissung der Zellen stattfindet, wie die älteren Physiologen glaubten, so könnte man diesen Beweis durch das Auspressen der Kartoffeln liefern. Wenn die Zellen erfrorener Kartoffeln zerrissen wären, so müsste der ausfliessende Saft eine grosse Menge Stärkekörner enthalten; es treten aber nur einzelne wenige derselben aus, offenbar in Folge der Risse welche bei dem Zusammendrücken entstehen. Die erhöhte Permeabilität

Digitized by Google

der Häute hindert sie, turgid zu sein. Ein erfrorenes, d. h. rasch aufgethautes Blatt ist weich, unelastisch wie ein nasser Lappen; wenn man es in Wasser legt, oder sogleich in Wasser aufthauen liess, so wird es dadurch nicht straff, nicht elastisch. Dieser Zustand ist keine Folge der Infiltration, sondern gleich dieser eine Folge der hohen Permeabilität der Zellhäute. Wenn man frische Blätter unter der Luftpumpe oder durch langes Liegen unter Wasser infiltrirt, so behalten sie dabei ihre Turgescenz, ihre Straffheit und Elasticität bei, demnach kann die durch das rasche Aufthauen erzeugte Schlaffheit keine Folge der Infiltration sein. Dagegen erklärt sich der Mangel an Turgor leicht aus der erhöhten Durchgängigkeit der Zellhäute. Die Turgescenz frischer Gewebe beruht darauf, dass sie soviel Wasser aufnehmen als der höchsten Ausdehnung der Zellhäute entspricht. Die Aufnahme geschieht vermöge der endosmotischen Eigenschaften der Zellhäute und dauert so lange bis der durch Ueberfüllung erzeugte Druck den endosmotischen Kräften das Gleichgewicht hält. Die durch das eingedrungene Wasser ausgespannte Haut hat das Bestreben vermöge ihrer Elasticität sich zusammenzuziehen und übt ihrerseits auf die Inhaltsflüssigkeit einen entsprechenden Druck aus. Wird nun die Zellhaut durch irgend eine Veränderung fähig, Wasser auf andere als diosmotische Weise austreten zu lassen, so wird vermöge ihrer Zusammenziehung ein Theil des Wassers herausgepresst; dabei fällt sie zusammen und die durch den gegenseitigen Druck der Zellen erzeugte Steifheit geht verloren. Ist die Zellhaut einmal fähig geworden Wasser austreten zu lassen bloss durch Druck, so ist sie auch nicht mehr fähig turgid zu sein. Angenommen eine solche Zelle liege in Wasser, so wird sie allerdings solches durch Endosmose aufnehmen, aber sobald sich die innere Flüssigkeit vermehrt, übt sie einen Druck auf die Zellwand und da diese jetzt nicht mehr im Stande ist, diesem Drucke zu widerstehen, so tritt ein Theil der Flüssigkeit aus. Die Turgescenz beruht auf der ausserordentlich geringen Filtrationsfähigkeit, bei grossem endosmotischen Vermögen; tritt Filtrationsfähigkeit ein, so wird der Turgor unmöglich.

Denken wir uns nun einen Gewebetheil im Zustande höchster Turgescenz, z. B. eine Scheibe aus einer Rübe, welche tagelang in kaltem Wasser gelegen hat; dann üben sämmtliche Zellinhalte auf ihre Membranen einen gewissen Druck aus, die

Digitized by Google

gespannten Häute streben, sich zusammenzuziehen. Nun denken wir uns diese Scheibe gefroren und in warmes Wasser gelegt; sie erfriert hier, die Zellwände werden filtrationsfähig, jede Zellwand übt auf ihre Inhaltsflüssigkeit einen Druck und diese sucht zu entweichen, sie entweicht in der That und mengt sich mit dem die Scheibe umgebenden Wasser; das Resultat ist nun, dass die ganze Scheibe innerhalb des Wassers leichter wird. Bei der Beschreibung der unten folgenden Diffusionsversuche werden zahlreiche Angaben diese Ausstossung der Zellinhalte nach dem Aufthauen beweisen.

Da die Zellhäute durch das Aufthauen permeabler werden, so war zu vermuthen, dass auch die endosmotischen Eigenschaften derselben sich ändern; diess ist in der That in einem überraschenden Grade der Fall.

Ich wollte anfangs dünne Scheiben als Häute auf Endosmometer spannen, allein es erwies sich diess in jeder Hinsicht als unthunlich und ich entschloss mich daher, die Veränderungen der Gewebemassen selbst zu untersuchen.

Grosse Scheiben wurden in Bezug auf ihre Gewichtsänderungen untersucht, die sie in verschiedenen Flüssigkeiten vor und nach dem Gefrieren erleiden; der grösste Mangel, an welchem diese Methode leidet, besteht in dem Abtrocknen der erfrorenen Stücke, da diese so leicht bei geringem Drucke Flüssigkeit austreten lassen; jedoch habe ich diesen Uebelstand dadurch ausser Kraft zu setzen gesucht, dass ich sehr grosse Gewichtsveränderungen herbeizuführen suchte. Die Fehler, welche aus dem Abtrocknen der erfrornen Stücke entstehen liegen in den Decigrammen, bei den frischen in den Centigrammen; die Aenderungen selbst betragen bei den als gültig betrachteten Versuchen immer mehrere Gramme. Die Scheiben wurden auf Filtrirpapier gelegt und allseitig mit Stücken desselben so lange betupft, bis diese (immer erneuert) nicht mehr nass wurden. Ich lasse im Folgenden die ersten mangelhaften Versuche, welche ich anstellte, weg und führe die anderen in einer Ordnung auf, welche mir für die Deutlichkeit geeignet scheint, sie sind aber in anderer Ordnung angestellt worden.

Digitized by Google

Versuch I.

Aus einer frischen rothen Runkelrübe wurden zwei möglichst*) gleiche Querscheiben genommen, jede 1 Ctm. dick; am Umfang blieb die Rinde. Um sie in einen Zustand hoher Turgescenz zu bringen, und um diejenigen Stoffe, welche durch kaltes Wasser ausziehbar sind, möglichst zu entfernen, blieben die Scheiben fünf Tage lang in Wasser von nahe 0° liegen; das Wasserquantum von fünf Litres wurde mehrmals erneuert. Das Gewicht der beiden Scheiben stimmte in diesem Zustande bis auf einige Decigramme überein. No. I wurde über Nacht vor das Fenster gelegt, wo es bei — 6° R. durch und durch gefror; No. II blieb unterdessen in dem Wasser. Am Morgen wurde No. I, welches auf der Unterseite eine Krystallkruste hatte, von dieser mit einem warmen Handtuch befreit, No. II abgetrocknet.

No. I (gefroren) wog 85,4 Gramm.
No. II (frisch) ,, 90,3 ,,

Der Verlust von beinahe 5 Gramm bei I kommt auf Rechnung der Verdunstung und der abgeschmolzenen Krystalle.

Dann wurden beide in Wasser von 24° R. eine Stunde lang liegen gelassen, abgetrocknet und gewogen.

No. I (aufgethaut) wog 82,6 Gramm.
No. II (frisch) ,, 90,2 ,,

No. I hatte also nach dem Aufthauen unter Wasser 2,8 Gr. verloren; dieses Quantum war durch die Zellhäute herausgepresst worden. Da nun No. I frisch über 90 Gr. wog so hatte sich die Wassercapacität um mehr als 7 Gr. vermindert. No. II hatte sein Gewicht nicht merklich verändert bei dem Liegen im warmen Wasser, demnach kann auch bei No. I der Gewichtsverlust nicht auf Rechnung der Temperaturerhöhung kommen. Das Wasser, in welchem die gefrorene Scheibe aufthaute, wurde dunkelroth, das der frischen blieb beinahe ungefärbt.

Hierauf wurden beide in eine Lösung von 10 Gramm *NaCl* in 100 *C.C.* Wasser (7° R.) gelegt, beide in dasselbe Gefäss, welches 1 Litre der Lösung enthielt. Nach dreistündigem Liegen wurden sie abgetrocknet gewogen.

*) Es musste hier immer neben der Uebereinstimmung des Gewichts auf möglichste Gleichheit der Oberflächen gesehen werden, beides ist nur unvollständig zu erzielen.

Digitized by Google

No. I (erfroren) wog 79,5 Gramm.

No. II (frisch) „ 84,7 „

Es war natürlich Salz aufgenommen und Wasser abgegeben worden. Um beides zu bestimmen, wurden die Scheiben in möglichst kleine Stücke zerschnitten, diese abwechselnd mit warmem und kaltem Wasser ausgelaugt, bis das Wasser keine Spur *Cl* mehr enthielt.

No. I gab 1044 *C.C.* Auszug.

No. II „ 900 *C.C.* „

Ausser dem aufgenommenen *NaCl* enthielt dieser Auszug noch eine kleine Quantität von Cloriden, welche in den Rüben vorkommen, indessen ist ihre Menge so gering, dass bei den angegebenen Fehlerquellen keine Rücksicht auf sie genommen zu werden braucht, um so mehr, da beide Scheiben gleich viel enthalten mussten.

Von jedem Auszug wurden nun 200 *C.C.* in einer Porzellan-Schale eingeengt und dann in Platin-Schalen zur Trockene abgedampft, sodann bei leichter Rothgluth verkohlt um die geringe Menge organischer Substanz zu zerstören. Das verkohlte Extrakt wurde mit viel heissem Wasser ausgezogen; das Filtrat mit NO_5 angesäuert, erwärmt, und mit $AgONO_5$ im Ueberschuss versetzt; das gefällte *AgCl* in gewogenen Filtern bei 100° getrocknet.

200 *C.C.* von No. I gab 1,190 *AgCl* = 0,2937 *Cl* = 0,4862 *NaCl*.
200 *C.C.* „ No. II „ 0,590 „ = 0,1457 „ = 0,2409 „

Demnach hatte aufgenommen:

Scheibe No. I. 2,537 Gr. *NaCl*.
„ No. II 1,084 „ „

No. I wog vor dem Einlegen in die *NaCl*-Lösung 82,6 Gr. es hätte nach dem Herausnehmen also 82,6+2,537=85,137 Gr. wiegen müssen, wenn kein Wasser ausgetreten wäre; es wog aber nur 79,5 Gr., demnach mussten 85,137—79,5=5,637 Gr. Wasser ausgetreten sein.

Es waren also für 2,537 Gr. *NaCl*, welche eintraten,
5,637 „ *HO* ausgetreten.

Demnach war der Wasserstrom bei der Diffusion 2,2 mal stärker, als der Salzstrom.

No. II wog vor dem Einlegen in die Lösung 90,2 Gr.; da es 1,084 Gr. *NaCl* aufnahm, so hätte es nachher 91,284 Gr. wiegen müssen, wenn nichts ausgetreten wäre, es wog aber nur 84,7 Gr.,

Digitized by Google

demnach mussten 91,284 — 84,7 = 6,584 Gr. Wasser ausgetreten sein.

Es waren also für 1,084 $NaCl$, welche eintraten,
5,584 Wasser ausgetreten.

Demnach war der Wasserstrom 6,07 mal stärker als der Salzstrom. Die Salzlösung hatte dem gefrorenen Stücke nur 5,6, dem frischen 6,5 Gr. Wasser entzogen; dagegen waren in das erfrorene 2,5 Gr. Salz, in das frische nur 1,08 Gr. Salz eingetreten.

Es hatten sich also sowohl die absoluten Geschwindigkeiten als auch das Verhältniss der Diffusionsströme geändert.

Versuch II.

Auf ganz dieselbe Art wurden zwei Querscheiben einer Wasserrübe behandelt; ich führe nur die wesentlichen Zahlen an:

No. I (gefroren) wog 75,0 Gramm.
No. II (frisch) „ 78,9 „

Nach einer Stunde in Wasser von 24° R. wog
No. I (erfroren) 70,8 Gr.
No. II (frisch) 78,9 „.

No. I hatte also bei dem Aufthauen 4,2 Gr. Wasser ausgestossen.

Nach dreistündigem Liegen in ein Litre $NaCl$-Lösung (1:10)
wog No. I (erfroren) 70,1 Gr.
No. II (frisch) 69,3 „.

Das aufgenommene $NaCl$ betrug bei
No. I (erfroren) 2,973 Gr.
No. II (frisch) 0,3005 „

Das dafür ausgetretene Wasser betrug bei
No. I (erfroren) 3,673 Gr.
No. II (frisch) 9,005 „

Der Wasserstrom war bei
No. I (erfroren) 1,23 mal so stark,
No. II (frisch) 32,94 mal so stark als der Salzstrom.

Die mathematische Theorie der Diffusion, wie sie mit so glänzendem Erfolge von Brücke, Ludwig und Fick ausgebildet wurde, führt zu dem Schluss, dass die molekularen Poren einer Haut umso grösser sein müssen, je mehr Salz durch dieselben bei der Diffusion hindurchströmt. Nun sehen wir, dass die erfrorenen Zellhäute in beiden Versuchen eine ungleich grössere

Digitized by Google

Menge Salz aufnahmen als die frischen und somit führen diese Diffusionserscheinungen wieder zu dem Resultat, dass die Zellwände durch das rasche Aufthauen permeabler werden, dass sich ihre molekularen Poren dabei vergrössern.

Die Theorie der Diffusion statuirt nach Fick den Fall, dass das endosmotische Aequivalent sogar unter Eins hinabsinken kann, wenn die Poren einer Haut so gross werden, dass die Haut selbst keinen wesentlichen Einfluss mehr auf die Diffusion ausübt; alsdann diffundirt ein gleiches Volum Salz gegen ein gleiches Volum Wasser und das endosmotische Aequivalent sinkt auf den reciproken Werth des specifischen Gewichts des Salzes. Dieser Fall ist im folgenden Versuch annähernd eingetreten.

Versuch III.

Eine Querscheibe aus rother Runkelrübe war gefroren rasch aufgethaut und hatte dann in Wasser von nahe 0° R. 24 Stunden lang gelegen. Um sie auf die Temperatur der anzuwendenden Salz-Lösung zu erwärmen, lag sie dann noch ½ Stunde in Wasser von 30° R.; sie wog dann 79,8 Gramm.

Nachdem die Scheibe 4 Stunden lang in einer bei 30° gesättigten *NaCl*-Lösung gelegen hatte, wog sie

81,9 Gramm.

Sie hatte während dieser Zeit aufgenommen

9,534 *NaCl*

und 7,434 Wasser abgegeben.

Es war also mehr Salz ein- als Wasser ausgetreten und das endosmotische Aequivalent betrug 0,78, welches immer noch grösser ist als der reciproke Werth des specifischen Gewichts des Salzes.

Bei gleicher Behandlung hatte ein erfrorenes Kürbisstück 10,39 Gramm Salz aufgenommen, und nur 3,58 Wasser abgegeben. Es war also 0,34 mal soviel Wasser als Salz diffundirt, ein Werth welcher etwas kleiner ist als das umgekehrte specifische Gewicht des Salzes; da die Annahme nicht erlaubt ist, dass bei der Diffusion ein Verhältniss der Ströme auftritt, welches unter jenem Werthe liegt, so muss die Aequivalent-Zahl durch einen Beobachtungsfehler verkleinert worden sein; da man bei dem Abtrocknen der erfrorenen, sehr zerfliesslichen Kürbisstücke leicht zu viel Flüssigkeit wegnimmt, so kann es leicht geschehen, dass das Wassergewicht zu gering ausfällt, was bei

Digitized by Google

der hier befolgten Methode ein zu kleines Aequivalent herbeiführt. Das Minimum des Aequivalents hätte der Theorie nach =0,476 sein müssen, gefunden wurde 0,34, eine Differenz, die sich immerhin durch die Methode des Versuchs erklärt. Es kommt hier nicht auf streng richtige Zahlen an, und ich halte es für völlig unmöglich, solche zu erhalten; es genügt aber zu zeigen, dass die erfrorenen Zellhäute sich bei der Diffusion anders verhalten als die frischen, dass zumal die endosmotischen Aequivalente kleiner werden. Und selbst wenn die Beobachtungsfehler noch grösser wären, als sie meiner Ueberzeugung nach sind, so würden doch die gemachten Versuche diese Forderung bestätigen. Die Thatsache allein, dass bei dem Liegen in Salzlösungen die erfrorenen Schnitte schwerer werden, während die frischen an Gewicht verlieren, wobei die angegebenen Beobachtungsfehler ihre Bedeutung verlieren, beweist einerseits den enormen Unterschied in der Diffusion erfrorener und frischer Häute und zeigt, dass bei den erfrorenen Schnitten mehr Salz eindringt als Wasser herausgeht. Der folgende Versuch bestätigt diess.

Versuch IV.

Zwei Querscheiben einer weissen Runkelrübe, etwas abgewelkt, wogen

No. I (gefroren) 44,8 Gr. No. II (frisch) 45,0 Gr.

Beide in eine Lösung von $KONO_5$ gelegt, welche bei 5° gesättigt, und bis 20° erwärmt war; nach 16 Stunden wog

No. I (erfroren) 55,2 Gr. No. II (frisch) 42,8 Gr.

Bei dem erfrorenen Stück überwog also die eingedrungene Salzlösung, bei dem frischen überwog dagegen das ausgetretene Wasser. Das erfrorene hatte durch das aufgenommene Quantum sein Volum bedeutend vergrössert, das frische dagegen durch den Verlust an Flüssigkeit ein sehr welkes Aussehen angenommen.

Versuch V.

Zwei Querscheiben derselben Runkelrübe (roth) 24 Stunden in kaltem Wasser, dann eine Stunde in Wasser von 20° wogen

No. I (frisch) 111,8 Gr. No. II (frisch) 111,9 Gr.

No. I zum Gefrieren hinausgelegt, dann beide in Wasser von 20° und nach ½ Stunde gewogen:

No. I (erfroren) 109,9 Gr. No. II (frisch) 111,8 Gr.

Digitized by Google

Nach 16stündigem Liegen in Wasser von 2,5° R. wog

No. I (erfroren) 108,7 Gr. No. II (frisch) 113,9 Gr.

Während das erfrorene über ein Gramm Wasser ausstiess, nahm das frische im kalten Wasser 2 Gramm auf (diese letztere Erscheinung gehört nicht zu dem gegenwärtigen Thema, ich werde sie in einer folgenden Abhandlung genauer besprechen).

Dann lagen beide Stücke ³/₄ Stunden lang in Wasser von 50° R.; es wog

No. I (erfroren) 105,0 Gr. No. II (frisch) 105,3 Gr.

Beide Stücke ½ Stunde lang in Wasser von 2° R. gelegt wogen dann

No. I (erfroren) 105,5 Gr. No. II (frisch) 106,5 Gr.

Nun wurden beide Stücke in eine gesättigte Lösung von *NaCl* bei 30° R. 3 Stunden lang liegen gelassen; sie wogen dann

No. I (erfroren) 109,3 Gr. No. II (frisch) 103,0 Gr.

Es hatte also wieder bei dem erfrorenen Stück das Eindringen, bei dem frischen das Austreten überwogen.

Der folgende Versuch mag noch einen weiteren Beleg dazu liefern, dass turgescente Gewebe, wenn sie rasch aufgethaut sind, Wasser ausstossen.

Versuch VI.

Eine Rübenscheibe wog nachdem sie 48 Stunden in Wasser von 1° R. gelegen hatte 92,4 Gr.; binnen fünf Stunden gefror sie im Freien und wog dann 89,2 Gr.; hatte also durch Verdunstung 3,2 Gr. verloren; in warmes Wasser getaucht und dann in Wasser von 1° R. gelegt wog sie nach einer Stunde 81,5 Gr., hatte also innerhalb des Wassers beinahe 8 Gr. ausgestossen; nach weiteren 17 Stunden hatte sie unter Wasser nochmals 2,5 Gr. verloren.

Die Ausstossung von Flüssigkeit nach dem Aufthauen lässt sich nur durch die Contraction der filtrationsfähig gewordenen Zellhäute erklären, durch dieselbe Veränderung, welche die Infiltration der Lufträume bestimmt. Durch Diosmose lässt sich die Thatsache nicht erklären, denn dann müsste die Scheibe schwerer werden, so wie es frische Scheiben thun.

Um die erhöhte Permeabilität erfrorener Gewebe anschaulich zu machen, braucht man nur zwei gleichdicke Scheiben einer weissen Rübe, von denen die eine erfroren ist, in eine Auflösung von Purpurschwefelsäure zu legen. Nach 24 Stunden

Digitized by Google

findet man auf einem Durchschnitt, dass die Färbung in den frischen Schnitt kaum 1^{mm} tief eingedrungen ist, dagegen $4—5^{mm}$ tief in den erfrorenen.

Die Frage, warum bei raschem Aufthauen die Zellhäute permeabler werden, bei langsamem Aufthauen aber nicht, gehört wohl zu den schwierigeren Aufgaben der Molekularphysik und dürfte nur auf theoretischem Wege zu lösen sein.

Wie sich nun auf Grundlage der erhöhten Permeabilität der Zellhäute die Phänomene des Erfrierens an einander anschliessen, will ich in folgenden Sätzen darzustellen versuchen.

1) Wenn ein gefrorenes Gewebe langsam aufthaut, so erleidet es keine Veränderung; die hierzu nöthige Dauer des Aufthauens ist je nach den Pflanzen sehr verschieden.

2) Wenn ein gefrorenes Gewebe zu rasch aufthaut, so erleiden die Zellhäute desselben eine sehr wesentliche Veränderung, sie werden filtrationsfähig.

3) Die nächste immer eintretende Folge dieser Veränderung ist die Infiltration der Lufträume mit Flüssigkeit.

4) Die Filtrationsfähigkeit der Zellhäute gestattet den Inhaltsflüssigkeiten bei geringem Druck ein Austreten.

5) Das leichte Austreten der Flüssigkeit, welches zu dem allgemeinen Irrthum führte, dass erfrorene Gewebe wasserreicher seien, bewirkt eine starke Gewichtsabnahme des Gewebes, selbst wenn es unter Wasser liegt.

6) Die Fähigkeit erfrorener Zellhäute, das Wasser bei sehr geringem Drucke durchfiltriren zu lassen macht es unmöglich, dass erfrorene Gewebe selbst unter Wasser turgid werden, sie sind immer schlaff.

7) Die Permeabilität der Zellhäute erlaubt den verschiedenen Inhaltsstoffen sich zu mengen und so werden chemische Prozesse herbeigeführt, welche eine Zersetzung der Gewebestoffe erzeugen können.

8) Wenn rasch aufgethaute Gewebe mit der Luft in Berührung bleiben, so dringt diese in die Flüssigkeiten ein und es beginnt eine rasche Zersetzung welche meist mit Farbenveränderung verbunden ist; unter Wasser geschieht diess langsamer.

9) Die erhöhte Permeabilität erfrorener Zellhäute bedingt eine rasche Verdunstung der Flüssigkeiten, da die Häute ihre zurückhaltende Kraft verloren haben.

Digitized by Google

Durch diese Sätze sind die Erscheinungen des Erfrierens noch nicht erschöpft. Es ist möglich dass unter Umständen die Kälte an sich eine Zerstörung herbeiführt, welche tödtlich werden kann. Ich möchte dreierlei Arten des Kälte-Todes unterscheiden 1) Tödtung durch niedere Temperaturen über Null, herbeigeführt durch Sistirung der Saftbewegung; 2) Tödtung durch rasches Aufthauen gefrorener Gewebe; 3) Tödtung durch Beschädigungen im Momente des Erstarrens selbst.

In Bezug auf die Aenderung der Zellhäute durch das rasche Aufthauen ist mir nur eine einzige Notiz bekannt, sie findet sich bei Göppert (Wärmeentwickelung in d. Pflanz. S. 25); er sagt: »Die Zellen sind unverletzt, die Wände derselben nicht zerrissen, sondern nur etwas erschlafft.« Ich weiss nicht, ob Göppert unter dem Ausdruck »erschlafft« etwas Aehnliches verstand, wie ich ihn hier gebraucht habe; jedenfalls hat er im Laufe seiner Untersuchungen kein besonderes Gewicht darauf gelegt. Göppert spricht seine Ansicht über das Erfrieren folgendermassen aus (S. 44) »Dass die Kälte zunächst das Leben vernichtet und unmittelbar nach dem erfolgten Tode als nächste Wirkung desselben Veränderungen und Zersetzungen der vegetabilischen Substanz entstehen, die rücksichtlich ihres Ursprungs und der Qualität der neugebildeten Mischungsverhältnisse die grösste Aehnlichkeit mit den durch Gährungsprozess hervorgerufenen Productionen besitzen«; er fügt jedoch bei, dass diese Sätze einstweilen als hypothetisch anzusehen sind.

Meine Ansicht von dem Erfrieren im gewöhnlichen Sinne des Worts unterscheidet sich also von der Göppert's dadurch, dass er den ersten Moment der Tödtung in das Gefrieren selbst verlegt, ich dagegen das Gefrieren als unschädlich betrachte und nur in der Art und Weise des Aufthauens die Ursache des Todes finde. Das Gefrieren ist also für mich nur insofern die Bedingung des Erfrierens, als es ein Aufthauen nach sich zieht; aber eben weil diess meine Ansicht ist, muss ich den unendlich reichhaltigen Untersuchungen Göppert's einen um so grösseren Werth zugestehen. In seinem Werke behandelt er hauptsächlich die Bedingungen unter denen Pflanzen gefrieren, und die Veränderungen, welche durch das Aufthauen eintreten, können nur dann ihre Geltung erlangen wenn vorher das Gefrieren stattgefunden hat.

Von neueren Erklärungsversuchen über den Hergang des

Digitized by Google

Erfrierens ist mir nur H. Hoffmann's schon citirte Skizze bekannt (Pflanzenklimatologie S. 322—327). Kurz zusammengefasst lautet seine Ansicht so: »Bei dem Erstarren der Zellflüssigkeiten stossen diese einen Theil ihrer absorbirten Luft aus, welche neben dem Eiskörper innerhalb der Zellhaut bleibt;« nach dem Aufthauen der Zellflüssigkeit werde diese Luft nicht sogleich wieder absorbirt, sie wirke »alsbald zersetzend auf das Blattgrün (!) sie tödtet das Blatt.« Da diese auf bekannte physikalische Erscheinungen basirte Hypothese einen Schein von Wahrheit zulässt, so versuchte ich diejenige Prüfung derselben, welche mir die einzig entscheidende zu sein scheint. Es kommt darauf an die Luft zu entfernen, welche sich bei dem Gefrieren der Zellenflüssigkeiten absondert, um sie unschädlich zu machen. Ich brachte Blätter von Raps, Rüben, Kohl, Bohnen, Tabak in einen kleinen Recipienten, der mit der Luftpumpe durch ein beugsames Röhrensystem verbunden war. Der Recipient wurde bis auf 5 Linien Quecksilberdruck entleert und in diesem Zustande in eine Kältemischung gestellt. Während die Blätter sich abkühlten und endlich gefroren wurde das Vacuum beständig auf 3 Linien erhalten. Bekanntlich können ganze Pflanzen nicht nur Stunden, sondern Tage lang im luftleeren Raume ohne sichtbaren Schaden zu leiden zubringen; demnach konnten auch in diesem Falle die Blätter durch das Auspumpen nicht getödtet werden, besonders da es nur eine halbe Stunde dauerte, und selbst wenn es ihnen schadet so würde doch der Effekt nicht mit dem des Erfrierens übereinstimmen.

Die in den Zwischenräumen und den Zellflüssigkeiten enthaltene Luft musste bei meinem Versuch offenbar schon vor dem Gefrieren zum grossen Theil entwichen sein, und wenn während des Gefrierens in der That eine Ausstossung von Luft stattfindet, so musste diese eben ausgeschiedene Luft durch die Zellhäute hindurch diffundiren, und in das Vacuum eintreten; es konnte also bei dem folgenden Aufthauen der von Hoffmann vermuthete Effekt nicht eintreten.

Nachdem die Blätter sichtlich erstarrt waren nahm ich den Recipienten aus der Mischung und stellte ihn in die 10—12° warme Zimmerluft; während des Aufthauens, was nicht einmal sehr rasch erfolgte, wurde das Vacuum sorgfältig auf seinem früheren Stande erhalten. Als das Aufthauen vollendet war hatten die noch immer im luftleeren Raume befindlichen Blätter alle

Digitized by Google

Kennzeichen der erfrorenen, sie waren bei der Bewegung des Recipienten schlaff, durchsichtig, infiltrirt; endlich wurde Luft eingelassen, die Blätter erwiesen sich bei der näheren Besichtigung als vollständig erfroren und änderten in Kurzem ihre Farbe.

Ich glaube, dass Hoffmann's Vermuthung durch dieses Experiment widerlegt wird. Einen direkten Beweis für seine Ansicht führt Hoffmann nicht an, die Analogien aus denen er sie herleitet, würden sich auch mit anderen Hypothesen in Uebereinstimmung bringen lassen; ich lasse daher die Sache auf sich beruhen.

Nachtrag.

Ich habe es versucht, die von Le Conte und v. Mohl beschriebenen Eis-Krystalle welche aus feuchtem Boden emporwachsen, entstehen zu lassen, und ein nicht ganz ungenügendes Resultat erhalten.

Buchenerde (schwarzer Mulm aus dem Inneren ausgefaulter Stöcke) wurde in ein mit Abfluss versehenes Gefäss, von ungefähr einem Liter Raum, ziemlich fest mit der Hand eingedrückt und dann mit kaltem Wasser gesättigt; nachdem das überflüssige Wasser unten abgelaufen war, wurde das eiserne Gefäss mit seinem gut, doch nicht luftdicht passenden Deckel verschlossen; es blieb ungefähr ein Zoll Raum zwischen der Oberfläche des Humus und dem Deckel. Am 7. Februar Abends wurde das Gefäss in's Freie gestellt. Die Temperatur war bei plötzlich erheitertem Himmel etwas unter Null gesunken, und gegen Morgen stand das Quecksilber auf 2^0R. Als ich am Morgen den Deckel abnahm fand sich die Erde ziemlich fest gefroren; auf der Oberfläche, die nicht sehr eben war, fand sich ein Ueberzug von Eiskrystallen, welcher mit den Beschreibungen Le Conte's und v. Mohl's recht wohl übereinstimmte, nur waren die Gebilde bei Weitem kleiner. Die dicksten Krystalle waren kaum 1^{mm} dick, dagegen viele $3—4^{mm}$ lang, meist viele neben einander zu compacten Massen vereinigt; sie standen auf der jedesmaligen Unterlage senkrecht, an den Rändern einer Spalte in dem Boden horizontal; manche waren stark gekrümmt, besonders die ganz einzeln stehenden. Sie bestanden aus einem ganz klaren, wie es schien, von Luftblasen freien Eise. Da die Lufttemperatur nicht niedrig genug war, so gelang es mir nicht eine mikroskopische Untersuchung zu machen; die Anwendung einer starken

Digitized by Google

Lupe ist wegen der Annäherung des Gesichts an die kleinen, so leicht schmelzenden Massen unthunlich. Ich glaube, wenn das Quantum der Erde grösser und in einem irdenen, schlecht leitenden Gefäss gewesen wäre, so hätten die Krystalle grössere Dimensionen erreicht.

Der stark verweste Buchenhumus zeigt bei dem Aufthauen eine Erscheinung, welche den erfrorenen Zellhäuten eigen ist. Wenn man einen grossen Trichter damit anfüllt, dann die Erde öfter mit Wasser begiesst und endlich vollständig abtropfen lässt, so dass nach mehreren Stunden kein Tropfen mehr fällt, wenn man dann den Trichter über Nacht in's Freie stellt, so dass der feuchte Boden gefriert, und man bringt nun den Trichter in ein Zimmer, wo der Humus langsam aufthaut, so beginnt bei dem Aufthauen abermals ein Ablaufen von Wasser und hält so lange an als das Thauen. Ich habe den Versuch öfter mit demselben Erfolg wiederholt. Statt des Trichters wandte ich zuletzt ein Gefäss aus Eisenblech an; es besteht aus einem etwa 4 Zoll hohen und ebenso breiten Cylinder, der sich unten trichterförmig schliesst und eine kleine Oeffnung lässt; oben ist der Cylinder durch einen gut passenden Deckel geschlossen. Humus (ungefähr 400 *CC.* festgedrückt) der seit 24 Stunden nicht mehr getropft hatte, fing bei dem Aufthauen von Neuem zu tropfen an, und lieferte binnen 6 Stunden ungefähr 30 *CC.* Wasser; dieses Wasser wieder oben aufgegossen wird nicht zurückgehalten, es läuft rasch durch. Es tritt also in dem Humus bei dem Aufthauen eine Verminderung der Wassercapacität ein, er kann nicht mehr soviel Wasser enthalten, als vor dem Gefrieren. Ich habe mich überzeugt, dass diese Aenderung nicht etwa mit der Temperatur des Wassers zusammenhängt. Gleich bei den ersten beiden Versuchen nahm ich Erde welche im Keller die Temperatur 0,5°R. angenommen hatte und übergoss sie so lange auf dem Trichter mit Wasser von 0° bis das Thermometer, dessen Kugel mitten in der Erde steckte ebenfalls 0° zeigte. Während des Abtropfens hielt sich die Temperatur nahe bei 0°. Demnach hatte das vor dem Gefrieren absorbirte und festgehaltene Wasser die Temperatur des bei dem Aufthauen auslaufenden.

Das ebenbeschriebene Gefäss wurde mit Filtrirpapier (in kleine Stücke zerrissen) angefüllt und dieses mit Wasser von 0° gesättigt. Nachdem das Abtropfen aufgehört hatte liess ich

Digitized by Google

das imbibirte Papier über Nacht gefrieren; am Morgen zeigten sich auf der Oberfläche der Papierstücke Krystalle, ziemlich dick und kurz, meist Krusten bildend, jedoch ohne die zierliche Form der Bodenkrystalle oder derer auf den Kürbisstücken; als das Papier in dem Gefäss zu thauen anfing, begann unten Wasser auszulaufen und es tropfte so lange als das Thauen anhielt.

Sowie also gefrorene saftige Pflanzentheile bei dem Aufthauen Wasser ausstossen, so thun diess auch imbibirte Körper vegetabilischen Ursprungs.

Ich glaube das bekannte merkwürdige Verhalten des erfrorenen Stärkekleisters lässt sich unter demselben Gesichtspunkt auffassen. Wenn man Stärkekleister von beliebiger Consistenz hart gefrieren und dann langsam oder rasch aufthauen lässt, so verliert er dabei bekanntlich seinen kleisterigen Zustand. Der aufgethaute Kleister bildet eine feste, elastische, zähe zusammenhängende Masse von porösem Gefüge; er lässt sich zwischen den Händen zerreiben; drückt man ihn, so quillt aus den Poren klares Wasser hervor. Die aufgethaute Stärke hält also weniger Wasser fest als die frische, gekochte. Bei dem Erfrieren scheinen die Stärketheilchen sich fester an einander zu hängen und dabei einen Theil ihres adhärirenden Wassers fahren zu lassen; die Wassercapacität der Stärke wird also vermindert.

Es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass in den Zellhäuten erfrorener Pflanzentheile etwas Aehnliches stattfindet, wie bei dem Stärkekleister. Offenbar wird das in den Zellhäuten imbibirte Wasser zwischen den Molekülen der Cellulose festgehalten, ähnlich wie das Wasser zwischen denen der Stärke. Sowie nun bei dem Erfrieren die Stärkemoleküle sich näher zusammenziehen, dabei einen Theil ihres Wassers loslassen und so einen grobporigen Körper bilden, so können auch die Zellstoffmoleküle der Zellhäute sich in neuer Art aggregiren und dabei Wasser ausstossen, welches sich sozusagen in den Lücken des neu arrangirten Aggregats ansammelt, wodurch zugleich die erhöhte Permeabilität begreiflich wird. Dass bei erfrorenen Zellhäuten die Zellstoffmoleküle in der That anders unter einander verbunden sind als bei den frischen, geht aus der Zähigkeit ausgedrückter, aufgethauter Gewebetheile hervor. Indessen führe ich diese Thatsachen nicht an, um meine oben ausgesprochene Ansicht über das Erfrieren dadurch zu stützen, sondern nur um zu zeigen,

Digitized by Google

dass analoge Veränderungen durch das Erfrieren auch in anderen vegetabilischen Substanzen hervorgebracht werden.

Es scheint, dass nur Zellhäute von bestimmter Constitution fähig sind, zu erfrieren, d. h. durch zu rasches Aufthauen permeabler, filtrationsfähig zu werden. Reifes Holz scheint dieser Veränderungen nicht fähig zu sein, wenigstens habe ich bisher an frischen, durchtränkten Holzstücken keine Aenderungen durch das Gefrieren wahrgenommen, welche sich mit denen der saftigen Theile vergleichen lassen. Auch die sehr jugendlichen Gewebe scheinen des Erfrierens unfähig zu sein; ob die Moose, Flechten und Algen erfrieren können ist mir unbekannt und scheint noch niemals untersucht worden zu sein.

Das Erfrieren der zarten, noch lebensthätigen Wurzeln scheint denselben Bedingungen zu unterliegen, wie das der Stengel und Blätter. Nach dem lang anhaltenden Barfrost des Novembers 1859 trat plötzlich warmer Sonnenschein ein; die Erde in den Tharandter Thälern war überall tief gefroren; an den besonnten Stellen thaute sie in einigen Stunden soweit auf, dass ich verschiedene Wurzelstöcke von Wald- und Wiesenpflanzen ausgraben konnte; ich fand zahlreiche junge Wurzeln, welche erst unmittelbar vor dem Frost entstanden sein konnten; sie waren viele Tage hindurch gefroren gewesen und doch jetzt nach dem Aufthauen so frisch, als ob sie in der besten Vegetation begriffen wären. Offenbar wirkt hier der umgebende Boden als schlechter Wärmeleiter schützend gegen zu rasches Aufthauen. Die Wurzeln des Raps werden durch rasches Aufthauen ebenso getödtet, wie die grünen Theile. Winterraps (mit 4—5 grossen Blättern) stand in mit Erde gefüllten Glasgefässen, an deren Wänden Wurzeln herabliefen. Als die Erde gefroren war und dann im geheizten Zimmer aufthaute, gingen die Wurzeln ein, sie schrumpften zusammen.

Das Gefrieren und Aufthauen unter Wasser scheint jugendliche dünne Wurzeln nicht so zu schützen wie die Umgebung des Bodens. Eine junge Pflanze von Vicia Faba hatte ihr Wurzelsystem in Wasser vollständig entwickelt. Das Gefäss wurde solange in eine Kältemischung gestellt, bis die untere Hälfte des Wassers sammt den hineinragenden Wurzeln gefroren war. Binnen 24 Stunden thaute das Eis auf; sämmtliche Wurzeln waren, soweit sie im Eis gesteckt hatten, infiltrirt, durchsichtig, schlaff; nach einigen Tagen wurden sie braun; die oberen Theile der-

Digitized by Google

selben Wurzeln, welche nicht gefroren waren, behielten ihre Frische und die Pflanze ist seitdem, ohne eine einzige Wurzelspitze zu besitzen normal weiter gewachsen.

Die Wurzeln von Myosotis palustris sind viel empfindlicher als die Stengel und Blätter. Eine Anzahl bewurzelter Stengel dieser Pflanze nahm ich im December aus einem Bach, wo sie unter Wasser standen und ganz frisch aussahen. In einem grossen Glase unter Wasser getaucht wuchsen sie im Zimmer weiter und entwickelten nebst neuen Blättern viele Nebenwurzeln. Einmal gefror das ganze Wasser und thaute dann ziemlich rasch bei direktem Sonnenlicht auf; sämmtliche Wurzeln waren getödtet und wurden später schwarz, die Stiele und Blätter waren dagegen völlig erhalten und bald kamen neue Wurzeln zum Vorschein.

Ich glaube dass in diesen beiden Fällen die Wurzeln obgleich sie von dickem Eis umgeben waren zu rasch aufgethaut sind und darum zu Grunde gingen; denn in beiden Fällen gingen Licht- und Wärmestrahlen durch das Eis hindurch und mussten die gefrorenen Wurzeln rasch erwärmen und zum Thauen bringen, während das umgebende Eis durch die geleitete Wärme nur langsam aufthaute.

Das Erfrieren bei Temperaturen über Null scheint je nach den Pflanzenarten und den äusseren Umständen verschiedene Ursachen zu haben.

Cl. Bierkander (Bemerkungen über einige Gewächse und Bäume, die bei grösserer oder geringerer Kälte um Abo beschädigt oder getödtet werden; königl. Schwedische Abhand. für d. J. 1778; bei Göppert Wärmeentwickelung S. 124) giebt an, dass Cucumis sativus, Melo, Cucurbita Pepo, Impatiens Balsamina, Mirabilis longiflora, Ocymum basilicum, Portulacca oleracea, Solanum tuberosum bei 1° bis 2° Wärme in den Nächten des Septembers und Octobers getödtet wurden.

Da die Temperatur von dünnen Pflanzentheilen nicht nur von der Lufttemperatur, sondern auch von ihrer Verdunstung und noch mehr von ihrem Strahlungsvermögen abhängt, so ist die Annahme erlaubt, dass Pflanzen selbst bei niederen Wärmegraden im eigentlichen Sinne erfrieren können. Bei heiterem Himmel im Freien und zumal bei trockener Luft kann die Temperatur der Blätter bei + 2° Luftwärme selbst auf 2°—3° unter den Eispunkt sinken; diess wird besonders bei solchen Blättern

Digitized by Google

stattfinden, welche auf einem zarten Parenchym eine haarige Epidermis haben; jenes bedingt eine rasche Verdunstung, diese eine erhöhte Wärmestrahlung.

Im November und December 1859 und im Januar und Februar 1860 hatte ich eine grössere Anzahl von Tabakpflanzen, zwei Kürbispflanzen, Schminkbohnen, Kohl und Raps in Gefässen an den Fenstern des Laboratoriums stehen. Die Pflanzen waren sämmtlich gesund und kräftig und in langsamer Vegetation begriffen. Jedesmal, wenn ich nach einer kalten Nacht in das Laboratorium kam, wo dann die Lufttemperatur neben den Pflanzen gewöhnlich auf + 4° bis + 2° R. hinabgesunken war, fand ich die Blätter des Tabaks, der Bohnen, der Kürbisse im Zustande höchster Erschlaffung, sie hingen herab und waren zum Theil eingerollt. Wenn ich über Nacht die Fenster mit den Vorhängen verdeckte so waren am Morgen die Blätter trotz derselben Lufttemperatur frisch; es konnte nicht zweifelhaft sein, dass die Wärmestrahlung im ersten Falle durch die unverdeckten Fensterscheiben den Pflanzen geschadet hatte. Wenn dagegen das Local mehrere Tage nicht geheizt wurde und die Luft längere Zeit auf + 4° bis + 2° R. blieb, so trat jener Zustand von Schlaffheit auch bei verhangenen Fenstern ein. Dieser Zustand verdiente umsomehr Beachtung, als er alle Symptome eines weit fortgeschrittenen Welkens zeigte und doch war die Erde in den Töpfen beinahe mit Wasser gesättigt. Ich kam auf den Gedanken, dass diese Schlaffheit in der That weiter Nichts als ein starkes Welken sei, dann musste offenbar trotz der feuchten Erde die Wasseraufnahme aufgehört haben. Viele von den Pflanzen standen in gläsernen Gefässen; einige derselben wurden in Wasser (20°—30° R.) gesetzt und durch halbirte grosse Holzdeckel der Wasserdampf von den Blättern abgehalten; die Erde in den Glasgefässen wurde nicht befeuchtet; ein darin steckendes Thermometer zeigte die Erwärmung der Wurzeln an; als diese auf 10°—15° R. gestiegen war begannen die Blätter wieder turgid und steif zu werden und in 1—2 Stunden war die ganze Pflanze vollkommen frisch. Offenbar war die Thätigkeit der Wurzeln durch die erhöhte Temperatur so gesteigert worden, dass Wasser in die welken Theile hinaufgetrieben wurde. Mit den Kürbispflanzen machte ich wiederholt folgenden Versuch: der Glastopf wurde mit Schnee umgeben; als die Erde in demselben auf + 3° bis + 4° R. abgekühlt war, fingen die Blätter an zu

Digitized by Google

welken; nach 2—3 Stunden hingen sie schlaff herab. Alsdann wurde das Glasgefäss wie oben in warmes Wasser gesetzt und in 1—2 Stunden war die Pflanze wieder völlig frisch. Bohnenpflanzen mit einigen grossen Blättern versehen und in irdenen Gefässen stehend wurden in einen mit 30° R. warmen Sand angefüllten grösseren Blumentopf gestellt; dieser selbst allseitig mit dicken Lagen von Watte umwickelt; oben mit halbirten Holzdeckeln bedeckt um die Blätter vor der aufsteigenden warmen Luft zu schützen. Ein zwischen den Wurzeln der Bohne steckendes Thermometer gab die Bodentemperatur, ein anderes dicht an den Blättern befestigtes die dort herrschende Lufttemperatur an.

Der ganze Apparat wurde nun um 10 Uhr früh in's Freie gesetzt; es war am 19. November 1859. Bis um 11 Uhr früh hatte sich die Erde durch den warmen Sand auf 27,4° R. erwärmt; das Thermometer neben den Blättern zeigte 0°; bis Nachmittag um 5 Uhr kühlte die Erde bis auf 7,5° R. aus und die Luft um die Blätter blieb beständig auf 0° stehen. Die Blätter hatten ihre ganze Frische behalten obgleich sie 7 Stunden lang in einer Luft von 0° sich befanden; wäre die Erde nicht erwärmt und die Wurzelthätigkeit so hoch gesteigert worden, so wären die Blätter unfehlbar erfroren. Merkwürdiger Weise zeigten die Blätter bei eintretender Nacht eine entschiedene Tagstellung; jedoch hatte die Pflanze nicht im geringsten gelitten; noch jetzt im Februar also nach beinahe 3 Monaten ist sie völlig gesund.

An den Tagen, wo jene Beobachtungen gemacht wurden bestimmte ich mit einem Regnault'schen Hygrometer öfter die Luftfeuchtigkeit. Der Thaupunkt lag immer mehrere Grade unter 0°; die Luft war also ziemlich trocken und die Verdunstung musste energisch genug stattfinden. Demnach kann ich jene heftige Affektion der Pflanzen durch Temperaturen von + 2° bis + 4° R. nur als eine Folge der Verdunstung betrachten, welche bei sistirter Wurzelthätigkeit ein starkes Welken bedingt; sind die Wurzeln durch höhere Temperatur zur Wasseraufnahme befähigt, so schadet jene niedere Luftwärme den Blättern nicht.

Die von Hardy (Observations sur quelques espèces ligneuses des pays chauds exposés à des températures de + 1° à + 5°; Auszug in der bot. Zeitg. 1854. S. 202) gemachten Beobachtungen lassen sich, wie es scheint, nicht auf die angegebene Art erklären. Die tropischen Holzgewächse standen im freien Lande und wurden durch Schilfdecken geschützt. Eine tiefe Erkältung

Digitized by Google

der Blätter konnte also nicht stattfinden, da weder Strahlung noch Transspiration bedeutend genug sein konnten. Die meisten dieser Pflanzen waren aber erst ein Jahr alt und wurden von den niederen Temperaturen (+bis 5° +1° wahrscheinlich Celsius) bei stattfindender Vegetation überrascht. Das Temperaturminimum, bei welchem die Vegetation dieser Gewächse stattfindet, wo Assimilation und Organbildung möglich sind, dürfte kaum unter 15° R. liegen, denn schon bei den Schminkbohnen und Kürbissen findet keine Vegetation unter 12° R. statt*). Wenn nun die chemischen Prozesse, welche nur bei höheren Temperaturen möglich sind, mitten in ihrem Verlaufe von Temperaturen überkommen werden, bei denen sie nicht mehr stattfinden können, so ist es wohl möglich, dass plötzliche Störungen eintreten, welche die normalen Prozesse unterbrechen und so die Pflanzen tödten. Diese schon von A. De Candolle ausgesprochene Ansicht scheint indessen nichts weniger als befriedigend; denn die Bohnen und Kürbisse können mitten in ihrer Vegetation von niederen Wärmegraden überrascht werden, welche jedes weitere Wachsthum sistiren, ohne dadurch getödtet zu werden.

Leider sind die hierher gehörigen Thatsachen noch viel zu wenig in ihren Bedingungen gekannt; sie verdienen aber nicht bloss von physiologischer Seite die grösste Beachtung, sondern sind auch, wie A. De Candolle wiederholt bemerkt, für die Pflanzengeographie und die Geschichte der Arten von entschiedener Bedeutung.

Die Pflanzen unseres Klimas scheinen von niederen Temperaturen über dem Eispunkt nicht in der Weise afficirt zu werden, wie Kürbis, Bohne und Tabak. Im Herbst und Winter, wo die Luft anhaltend zwischen 0° und 5° R. temperirt war, konnte ich im Freien keine wildwachsenden Pflanzen finden, welche jenen Zustand von Erschlaffung gezeigt hätten. Die in Vegetation begriffenen Pflanzen von Grünkohl und Raps, welche neben den anderen im Laboratorium standen, zeigten niemals eine ähnliche Affektion. Ich liess die Erde von Rapspflanzen einige Stunden lang gefrieren, während die Blätter in einer Luft von 8°—10° R. sich befanden, ohne dass ein Welken eintrat; der Glastopf, in welchem eine grosse Kohlstaude seit drei Monaten vegetirte,

*) Um mich vor Missverständnissen zu wahren, muss ich hierbei auf eine frühere Arbeit von mir verweisen: Ueber die Wirkung verschiedener Temperaturgrade u. s. w. (im chemischen Ackersmann 1859. Heft 3).

Digitized by Google

wurde 17 Stunden lang in eine Kältemischung gesetzt, welche Anfangs — 8° hatte und sich am Ende auf + 1° R. erwärmte; die Erde war sehr feucht; es trat aber kein Welken der Blätter ein, die sich in einer Luft von 8° — 5° R. befanden.

Diese und die oben beschriebenen Versuche scheinen demnach zu beweisen, dass die Wurzelthätigkeit nur bei denjenigen Pflanzen durch niedere Wärmegrade sistirt wird, welche wärmeren Klimaten angehören, dass diess aber bei denen unseres Klimas nicht stattfindet.

Dass bei niederen Wärmegraden auch in den bei uns einheimischen Pflanzen Veränderungen stattfinden, welche während der eigentlichen Vegetation nicht eintreten, zeigt die von v. Mohl beschriebene winterliche Färbung der Blätter (Vermischte Schriften von v. Mohl).

Die Reihe von Erscheinungen, welche durch Temperaturerniedrigung herbeigeführt werden zeigt eine grosse Anzahl sehr verschiedener Wirkungen die in jeder Beziehung als qualitativ verschieden betrachtet werden müssen, nicht aber in quantitativer Art den Temperaturen irgendwie proportional sind. Ich habe schon in meinen »physiol. Unters. üb. die Keimung der Schminkbohne« (Sitzungsber. der k. k. Akademie der W. XXXVII. 1859) darauf hingewiesen, dass man die verschiedenen Wärmegrade in ihren Wirkungen auf die Vegetation vielmehr als qualitativ verschiedene Kräfte, denn als quantitativ verschiedene Intensitäten einer Kraft auffassen muss. Die ausserordentliche Complication des vegetativen Organismus bringt es mit sich, dass verschiedene Intensitäten derselben Kraft qualitativ verschiedene Wirkungen hervorrufen. Wenn die Temperatur unter einen bestimmten Grad hinabsinkt, so hört zuerst die Assimilation und die Neubildung von Organen auf; sinkt sie noch tiefer ohne den Eispunkt zu erreichen, so treten Störungen in der Saftleitung ein; hält diese niedere Temperatur längere Zeit an und ist das Licht thätig, so treten eigenthümliche Prozesse auf, welche mit einer Farbenänderung des Laubes verknüpft sind; sinkt sie unter den Eispunkt so tritt Erstarrung der Säfte und Zellhäute ein, die entweder an und für sich schädlich wirkt oder insofern tödtet, als ein rasches Aufthauen darauf erfolgt.

Tharandt den 9. Februar 1860.

Digitized by Google

A. F. Möbius, *Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit.*

In meiner Abhandlung »über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik,« welche unter den im Jahre 1846 bei Begründung unserer Gesellschaft der Wissenschaften von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft herausgegebenen Abhandlungen sich befindet, habe ich einen meinem barycentrischen Calcul ähnlichen Algorithmus für sphärische Figuren aufgestellt und unter den verschiedenen von ihm auf Gegenstände der Sphärik gemachten Anwendungen als erstes Beispiel die Entwickelung der vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in ihrer grösstmöglichen Allgemeinheit gegeben. Es geschah dieses, wie ich auch in dem Vorworte zu jener Abhandlung bemerkt habe, hauptsächlich aus dem Grunde, weil die gedachten Grundformeln in den bisherigen Lehrbüchern immer nur für solche Dreiecke bewiesen werden, deren Winkel sowohl, als Seiten kleiner als 180° sind. Gleichwohl sind die Formeln auch ohne diese Restriction gültig, und es scheint dem jetzigen Stande der Wissenschaft angemessen, sie gleich von vorn herein in ihrer Allgemeinheit darzuthun.

In der That wird erst dadurch, dass man den Begriff eines sphärischen Dreiecks in möglichster Allgemeinheit auffasst*), eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen den Formeln

*) Gauss sagt in dieser Beziehung in seiner Theoria motus corporum coelestium, Seite 51: Quodsi quidem idea trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera nec anguli ullis limitibus restringantur (quod plurima commoda insignia praestat, attamen quibusdam dilucidationibus praeliminaribus indiget) etc.

Digitized by Google

einerseits und der Construction andererseits zu Wege gebracht. Denn wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln eines Dreiecks irgend drei Stücke gegeben sind und ein viertes gesucht wird, so ergeben sich für das gesuchte mittelst der zugehörigen Formel stets zwei im Allgemeinen verschiedene Werthe: und, übereinstimmend hiermit, kann man unter Zulassung auch überstumpfer Seiten und Winkel mit den drei gegebenen Stücken immer zwei verschiedene Dreiecke construiren*), in deren einem der eine, im andern der andere der zwei durch die Formel gefundenen Werthe dem gesuchten Stücke zukommt, während, wenn noch die an sich willkührliche Bedingung hinzugefügt wird, dass keine Seite und kein Winkel 180° überschreiten soll, in der Mehrzahl der Fälle nur der eine der zwei aus der Formel für das vierte Stück folgenden Werthe statthaft ist.

Sind z. B. von einem sphärischen Dreiecke ABC zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C gegeben, und soll die dritte Seite c gefunden werden, so ist diese von dem durch A und B zu legenden Hauptkreise entweder der eine, oder der andere der zwei Theile, in welche dieser Kreis durch A und B zerlegt wird, und hat daher zwei einander zu 360° ergänzende Werthe. Andererseits wird c aus a, b und C durch die Formel $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ gefunden, wonach dem durch seinen Cosinus bestimmten Bogen c ebenfalls zwei Werthe zukommen, deren Summe $= 360°$ ist.

Oder soll aus denselben drei Stücken a, b, C der Winkel A gefunden werden, so ergeben sich, jenachdem man für die dritte Seite c, als den einen Schenkel des Winkels A, entweder den einen, oder den andern der zwei einen ganzen Kreis bildenden Bögen AB nimmt, zwei um 180° verschiedene Winkel, indem sie beide den Schenkel AC gemein haben, der andere Schenkel des einen aber und der andere des andern Winkels in dem durch A und B zu legenden Hauptkreise von A aus nach entgegengesetzten Richtungen fortgehen, und die zwei Winkel selbst von AC aus nach einerlei Sinne zu rechnen sind. — Ueberein-

*) Mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn die drei Seiten gegeben sind, indem sich mit diesen nur Ein Dreieck construiren lässt. Allein für die Winkel desselben kann man das einemal die innern, das anderemal die äussern nehmen, so dass auch in diesem Falle das gesuchte Stück, nämlich einer der drei Winkel, zwei verschiedene (einander zu 360° ergänzende) Werthe hat.

Digitized by Google

stimmend hiermit findet sich mittelst der Formel $\sin b \operatorname{cotg} a - \sin C \operatorname{cotg} A = \cos b \cos C$ zwischen a, b, C und A, der Winkel A durch seine Tangente; und man weiss, dass jeder Tangente zwei Winkel zukommen, deren Differenz $= 180^0$ ist.

Auf gleicheArt wird in allen andern Fällen, in denen die zwei Werthe des gesuchten Stücks zufolge der allgemeiner aufgefassten Construction entweder 360^0, oder 180^0 zur Summe, oder 180^0 zur Differenz haben, dieses Stück trigonometrisch resp. durch seinen Cosinus, oder seinen Sinus, oder seine Tangente gefunden.

Wenn ich nun auch in der oben citirten Abhandlung die vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in ihrer völligen Allgemeinheit dargethan habe, so ist dieses doch mit einem den Elementen fremdartigen Mittel, einem dem barycentrischen nachgebildeten Calcul, geschehen, und ich achte es daher nicht für überflüssig noch zu zeigen, wie sich jene Formeln in der zu wünschenden Allgemeinheit ganz elementar aus den Grundbegriffen der Trigonometrie und mittelst einiger Sätze aus der Geometrie der Lage entwickeln lassen.

---

1. Bezeichnen A und B zwei Punkte der Kugelfläche, so soll unter AB der von A bis B sich erstreckende Bogen des durch A und B zu legenden Hauptkreises verstanden werden. Nur muss vorher noch der Sinn des Fortgangs im Kreise bestimmt worden sein, indem ohnedies der Bogen zweideutig ist, und seine zwei Werthe 360^0 zur Summe haben. — Alle Bögen eines und desselben Hauptkreises werden nach dem einmal festgesetzten Sinne desselben gerechnet, und es ist daher, wenn A, B, C in einem Hauptkreise liegen: $AB + BC = AC$, $AC + CB = AB$, u. s. w.

2. Um den Winkel bc zu bestimmen, den von zwei Hauptkreisen b und c der Kugelfläche der letztere mit dem erstern bildet, müssen vorher die Sinne dieser Kreise und der Sinn der Drehung um den durch ihre gegenseitigen Durchschnitte zu legenden Durchmesser der Kugel bestimmt worden sein. Der Winkel bc ist alsdann derjenige, um welchen b um diesen Durchmesser nach letzterem Sinne gedreht werden muss, bis b mit c auch dem Sinne nach zusammenfällt. Den Sinn der Drehung aber wollen wir im Folgenden dadurch bestimmen, dass wir von den zwei Durchschnitten des b mit c, welche A und A' heissen mögen, den einen A als Scheitel-, den andern A' als Fusspunkt

Digitized by Google

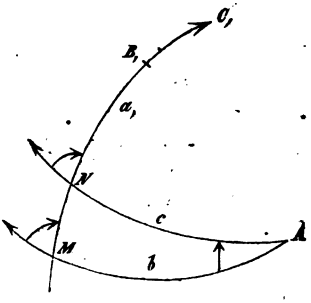
betrachten, und angeben, ob die Drehung, vom Scheitelpunkte A aus gesehen, nach der Rechten, oder nach der Linken erfolgen soll.

Heisst α der nach diesen Bestimmungen sich ergebende Werth des Winkels bc, so geht α über in $\alpha + 180^0$, wenn zum Sinne des b oder des c der dem ursprünglichen entgegengesetzte genommen wird.

Dagegen verwandelt sich α in $360^0 - \alpha$ (oder schlechthin in $-\alpha$), wenn bei unverändertem Scheitelpunkte die Drehung nach entgegengesetztem Sinne geschieht, sowie wenn bei unverändertem Sinne der Drehung, jedesmal z. B. nach der Rechten, der Scheitel- und der Fusspunkt mit einander vertauscht werden.

3. Im Folgenden wird von den zwei gegenseitigen Durchschnitten zweier Hauptkreise immer nur der eine in Betracht kommen, und dieser eine bei dem von den zwei Kreisen gebildeten Winkel stets als der Scheitelpunkt angesehen werden. Auch wird man alle in einer und derselben Figur vorkommenden Winkel nach einerlei Sinne der Drehung rechnen, jeden z. B. durch eine Drehung nach rechts um seinen Scheitel entstanden betrachten.

4. Bei der in Art. 2 gedachten Drehung des Kreises b um A bis zu seiner Coincidenz mit c beschreibt der Punkt M des b, welcher von A um 90^0 absteht, einen Hauptkreisbogen MN, welcher den Winkel bc misst. In diesem neuen Hauptkreise, welcher a_1 heisse, und von welchem A der eine Pol ist, geschieht die Bewegung von M nach einem Sinne, welcher, von A aus betrachtet, nach der Rechten gehend erscheint, wenn die Drehung des b um A nach der Rechten geschieht; und einem in a_1 nach diesem Sinne Fortgehenden wird der Pol A immer zur Rechten, und der andere Pol A' immer zur Linken liegen. Wir wollen hiernach den Pol A den rechten und den andern A' den linken Pol von a_1 nennen, und es erhellet, dass umgekehrt dadurch, dass man weiss, welcher von den zwei Polen eines Hauptkreises der rechte (linke) Pol sein soll, der Sinn des Hauptkreises gegeben ist.



Macht man demnach in zwei sich in A schneidenden Hauptkreisen b und c nach vorheriger

Bestimmung ihrer Sinne die Bögen $AM = AN = 90°$, legt durch M und N einen dritten Hauptkreis a_1 und bestimmt dessen Sinn also, dass A sein rechter Pol ist, so ist der um A nach der Rechten gerechnete Winkel $bc = MN$.

Ferner fliesst unmittelbar aus der Anschauung dieser Construction, dass jeder der beiden Winkel ba_1 in M und ca_1 in N, wenn er nach der Rechten gerechnet wird, $= 90^0$ (nicht 270^0) ist.

Ist also A der eine Pol des Hauptkreises a_1, und b ein durch A und einen beliebigen Punkt M des a_1 gelegter zweiter Hauptkreis, so ist bei solcher Bestimmung der Sinne von b und a_1, dass $AM = 90^0$, und A der rechte Pol von a_1 ist, der nach der Rechten gezählte Winkel $ba_1 = 90^0$.

Wird dagegen $MA = 90^0$ oder, was dasselbe ist, $AM = 270^0$ gesetzt, und damit dem Kreise b der dem vorigen entgegengesetzte Sinn gegeben, während der Sinn von a_1 nicht geändert wird, und folglich A der rechte Pol von a_1 bleibt, so wird $ba_1 = 270^0$. — In beiden Fällen ist daher $AM = ba_1$, und wir haben somit den allgemeinern Satz:

α. Ist A der rechte Pol des Hauptkreises a_1, und M ein beliebiger Punkt des a_1, so ist, welches auch der Sinn des durch A und M zu legenden Hauptkreises b sein mag, der um M nach rechts gezählte Winkel $ba_1 = AM$. — Wir schliessen hieraus noch:

β. Schneiden sich zwei Hauptkreise a_1 und b rechtwinklig in M, und liegen daher die Pole eines jeden in dem jedesmal andern, so sind, wenn A und B_1 die rechten Pole von a_1 und b bezeichnen, nach den hierdurch zugleich bestimmten Sinnen dieser Kreise die Bögen MB_1 und AM derselben einander gleich (jeder $= \pm 90^0$).

Denn, alle Winkel der Figur nach der Rechten gezählt, hat man, weil A der rechte Pol von a_1 ist, $AM = ba_1$; und eben so, weil B_1 der rechte Pol von b ist, $B_1M = a_1b$; also auch $MB_1 = ba_1 = AM$.

Das sphärische Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

5. Ist A einer der beiden Pole des Hauptkreises a_1, sind M und N zwei Punkte des a_1, und bezeichnet man die durch A und M und durch A und N zu legenden Hauptkreise mit b und c, so verhält sich nach beliebiger Wahl der Sinne von a_1, b, c und des gemeinsamen Sinnes der Drehung für die Winkel der Figur

$$\sin AM : \sin AN : \sin MN = \sin ca_1 : \sin ba_1 : \sin bc,$$

Digitized by Google

[also auch $= \sin a_1 c : \sin a_1 b : \sin cb$, welche drei letztern Glieder aus den drei ersten $\sin AM$, u. s. w. hervorgehen, wenn man jeden der Punkte A, M, N in den nicht durch ihn gehenden Hauptkreis, also in a_1, c, b verwandelt.]

Beweis. Die Richtigkeit dieser Proportion erhellet geradezu aus dem vor. Artikel, wenn die Sinne von b, c und a_1 dadurch bestimmt werden, dass $AM = AN = 90^0$, und dass A der rechte Pol von a_1 ist, und wenn man die Winkel durch Drehungen nach der Rechten schätzt, indem dann $bc = MN$ und $ca_1 = ba_1 = 90^0$ wird.

Wird hierauf bloss der Sinn von b in den entgegengesetzten verwandelt, so gehen AM, ba_1, bc über in $360^0 - AM$, $180^0 + ba_1$, $180^0 + bc$, und die übrigen Bögen und Winkel bleiben unverändert; mithin verändern in der Proportion bloss die Glieder $\sin AM$, $\sin ba_1$ und $\sin bc$ ihre Zeichen, und sie selbst besteht daher fort. — Dasselbe gilt und ergiebt sich auf analoge Weise, wenn entweder für den Sinn von c, oder für den von a_1 der entgegengesetzte genommen wird.

Wenn ferner ohne Aenderung der Sinne von b, c, a_1 die Winkel durch Drehungen nach der Linken bestimmt werden, so verwandelt sich jeder der drei Winkel ca_1, u. s. w. in seine Ergänzung zu 360^0, und es ändern folglich in der Proportion nur die drei letzten Glieder ihre Zeichen, was ebenfalls die Richtigkeit der Proportion nicht beeinträchtigt.

Dass endlich diese Sinnesänderungen auch in Verbindung mit einander eintreten können, bedarf keiner weitern Erörterung.

Das sphärische Dreieck mit einem rechten Winkel.

6. Lehnsätze. 1) Der Winkel $\alpha\beta$, welchen von zwei sich in einem Punkte O schneidenden Geraden die eine β mit der andern α bildet, ist bestimmt, wenn von jeder derselben die Richtung, nach welcher man sie sich von einem Punkte beschrieben denkt, und in der sie beide enthaltenden Ebene der Sinn der Drehung bestimmt ist; es ist der Winkel, um welchen die Gerade α nach letzterem Sinne um O gedreht werden muss, bis sie mit β auch der Richtung nach zusammenfällt.

2) Ist G ein beliebiger Punkt in β, und F die rechtwinklige Projection von G auf α, so ist mit Berücksichtigung der Zeichen,

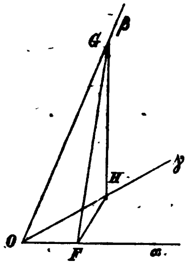
Digitized by Google

welche den Abschnitten OF und OG zu Folge der Richtungen von α und β zukommen, das Verhältniss

$$OF : OG = \cos\alpha\beta, = \cos\beta\alpha,$$

weil mit Aenderung des Sinnes der Drehung das Verhältniss der Abschnitte sich nicht ändert.

3) Schneiden sich zwei Ebenen rechtwinklig in den Geraden γ, ist G ein Punkt der einen Ebene, α eine Gerade der andern, H die rechtwinklige Projection von G auf γ, und F die rechtwinklige Projection von H auf α, so ist F auch die rechtwinklige Projection von G auf α.



7. Folgerungen. 1) Der gegenseitige Durchschnitt der zwei in letztbemerkter Construction in einer Ebene liegenden Geraden α und γ heisse O, und die durch O und G zu ziehende Gerade nenne man β. Alsdann ist, zu Folge des zweiten Lehnsatzes, nach willkührlicher Annahme der Richtungen in α, β, γ:
$OF : OG = \cos\alpha\beta$, $OF : OH = \cos\alpha\gamma$, $OH : OG = \cos\gamma\beta$; mithin $\cos\alpha\gamma . \cos\gamma\beta = \cos\alpha\beta$.

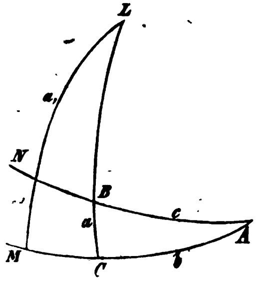
2) Eine um O, als Mittelpunkt, beschriebene Kugelfläche werde von den Geraden α, β, γ mit ihren über O hinaus nach ihren (positiven) Richtungen sich erstreckenden Theilen in A, B, C getroffen. Ersichtlich ist alsdann $\cos AB = \cos\alpha\beta$, $\cos AC = \cos\alpha\gamma$, u. s. w., und von den drei durch A und B, durch A und C und durch C und B zu legenden und im Folgenden mit c, b, a bezeichneten Hauptkreisen schneiden sich a und b rechtwinklig, weil die Ebenen dieser zwei Kreise einerlei mit den einander rechtwinklig schneidenden Ebenen $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ sind. Wir schliessen nach allem Diesen:

Wenn drei Punkte A, B, C einer Kugelfläche also liegen, dass die durch A und C und durch C und B zu legenden Hauptkreise einander rechtwinklig schneiden, so ist (unabhängig von den Sinnen der drei Hauptkreise)

$$\text{I} \ldots \cos AC . \cos CB = \cos AB,$$

eine Formel, aus welcher sich, ohne abermals gerade Linien zu Hülfe zu nehmen, alle übrigen Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten lassen.

Digitized by Google



8. Man bestimme die Sinne der drei Hauptkreise a, b, c willkührlich und mache diesen Bestimmungen gemäss in a den Bogen CL, in b den AM, in c den AN, jeden derselben $=90^0$. Hiernach ist L der eine Pol von b, folglich $ML=\pm 90^0$ und $AL=\pm 90^0$. Wegen des Letztern aber liegen L, M, N in einem Hauptkreise a_1, dessen einer Pol A ist, und dessen Sinn man also bestimme, dass $ML=+90^0$.

In dem dadurch entstandenen bei N rechtwinkligen Dreiecke BLN ist nun nach vor. Artikel: $\cos BL=\cos BN.\cos NL$. Es ist aber, wo auch B in a liegen mag, $CB+BL=CL=90^0$ (Artk. 1), und ebenso $AB+BN=90^0$, $MN+NL=90^0$; folglich $\cos BL=\sin CB$, $\cos BN=\sin AB$, $\cos NL=\sin MN$, und damit

$$\sin CB=\sin AB.\sin MN.$$

Ferner verhält sich (Art. 5) in dem zweirechtwinkligen Dreiecke AMN

$$\sin a_1 b:\sin cb=\sin AN:\sin MN=1:\sin MN,$$

und in dem zweirechtwinkligen Dreiecke LMC

$$\sin ab:\sin a_1 b=\sin ML:\sin CL=1:1.$$

Es folgt hieraus $\sin MN.\sin ab=\sin cb$, und die vorige Gleichung geht damit über in $\sin CB.\sin ab=\sin AB.\sin cb$ oder, was dasselbe ist, in

$$\text{II, ...} \quad \sin BC.\sin ab=\sin AB.\sin bc;$$

eine stets gültige Formel, wie auch die Sinne der Hauptkreise a, b, c bestimmt worden sein mögen, und welches auch der gemeinschaftliche Sinn der Drehung ist, nach welchem der Winkel ab $(=\pm 90^0)$ in C und bc in A gerechnet werden. — Die Unabhängigkeit der Formel von diesen Sinnen erkennt man übrigens schon aus ihr selbst, indem, wenn z. B. der Sinn von a in den entgegengesetzten verwandelt wird, $\sin BC$ und $\sin ab$ allein ihre Zeichen ändern.

Dieselben Bemerkungen gelten auch für die nächstfolgenden Formeln.

9. Ziehen wir noch die zwei bei C und N rechtwinkligen Dreiecke BCM und MNB in Betracht, so haben wir zufolge I.:

$$\cos CM.\cos BC=\cos MB=\cos MN.\cos BN,$$

Digitized by Google

und daher nach vor. Artik., und weil MN entweder $= bc$, oder $= 360^0 - bc$ ist:

$$(\alpha) \ldots \sin AC . \cos BC = \cos bc . \sin AB.$$

Dividirt man diese Gleichung durch I., so kommt:

$$\text{III} \ldots \operatorname{tang} AC = \operatorname{tang} AB . \cos bc;$$

und wenn man II. durch (α) dividirt:

$$\text{IV} \ldots \operatorname{tang} BC . \sin ab = \sin AC . \operatorname{tang} bc.$$

Ferner folgt aus II., wenn man A und B, also auch a und b gegenseitig vertauscht: $\sin AC . \sin ba = \sin BA . \sin ac$ oder

$\text{II}^* \ldots \sin AC . \sin ab = \sin AB . \sin ac$, und eben so aus IV.

$\text{IV}^* \ldots \operatorname{tang} AC . \sin ab = \sin BC . \operatorname{tang} ca.$

Die Division von II*. durch (α) giebt aber:

$$\text{V} \ldots \cos bc . \sin ab = \cos BC . \sin ac,$$

und die Multiplication von IV*. mit IV.:

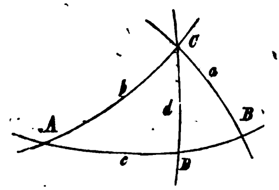
$$\sin ab^2 = \cos BC . \cos AC . \operatorname{tang} bc . \operatorname{tang} ca,$$

oder mit Anwendung von I., und weil $\sin ab^2 = 1$ ist:

$$\text{VI} \ldots \operatorname{cotg} bc . \operatorname{cotg} ca = \cos AB.$$

Das sphärische Dreieck im Allgemeinen.

10. Seien A, B, C drei beliebige Punkte der Kugelfläche, und werden die durch B und C, durch C und A, durch A und B zu legenden Hauptkreise wiederum mit a, b, c bezeichnet. Man lege durch C einen vierten den c rechtwinklig schneidenden Hauptkreis d und nenne D den einen, gleichviel welchen, seiner beiden Durchschnitte mit c. Alsdann verhält sich, nach willkührlicher Bestimmung der Sinne von a, b, c, d und des gemeinschaftlichen Sinnes der Drehung bei den Winkelschätzungen, in den bei D rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD, nach II. in Artikel 8.:



$$\sin DC : \sin bc = \sin CA : \sin cd$$
$$\sin CB : \sin DC = \sin cd : \sin ac$$

folglich $\sin CB : \sin bc = \sin CA : \sin ac$ oder

$$(\text{A}) \ldots \sin BC : \sin bc = \sin CA : \sin ca.$$

11. Um die zwischen den drei Bögen BC, CA, AB und dem Winkel bc bestehende Relation zu entwickeln, suche man zu-

nächst aus den zwei Bögen CA, AB und dem von ihnen gebildeten Winkel bc den Bogen BC zu bestimmen. — Mit Anwendung des im vor. Artik. gebrauchten Hülfspunktes D sind die hierzu dienenden Gleichungen:

(a) $\text{tang}\, DA = \text{tang}\, CA.\cos bc$, nach III.,

(b) $DB = DA + AB$ (Art. 1),

$$\left.\begin{array}{l}\text{(c)}\ \cos CA = \cos CD.\cos DA\\ \text{(d)}\ \cos BC = \cos CD.\cos DB\end{array}\right\}\ \text{nach I.}$$

Es folgt aber aus (b):

$$\cos DB : \cos DA = \cos AB - \text{tang}\, DA.\sin AB;$$

und wenn man hierin statt des Verhältnisses $\cos DB : \cos DA$ das ihm nach (c) und (d) gleiche $\cos BC : \cos CA$, und statt $\text{tang}\, DA$ seinen Werth aus (a) setzt:

$$\text{(B)} \ldots \cos BC = \cos CA.\cos AB - \sin CA.\sin AB \cos bc.$$

12. Durch ein ähnliches Verfahren kann auch die Gleichung zwischen den drei Winkeln bc, ca, ab und dem einen Bogen BC entwickelt werden. Wie bekannt, lässt sich aber diese Gleichung ohne alle Rechnung aus der vorigen (B) selbst, mittelst des Polardreiecks ableiten. Wir wollen uns auch hier dieses Dreiecks bedienen, müssen aber vorher den dazu nöthigen Fundamentalsatz der Sphärik, welcher die Gleichheit des Winkels zweier Hauptkreise und des gegenseitigen Abstandes ihrer Pole ausspricht, in grösserer Allgemeinheit und mit grösserer Schärfe, als es gewöhnlich geschieht, darstellen, nämlich (Fig. zu Artk. 4):

Sind B_1 und C_1 die rechten Pole zweier auch ihren Sinnen nach gegebenen Hauptkreise b und c, ist A einer der zwei Durchschnittspunkte des b mit c, also zugleich einer der beiden Pole des durch B_1 und C_1 zu legenden Hauptkreises, welcher a_1 heisse, und wird der Sinn dieses a_1 also bestimmt, dass A sein rechter Pol ist, so wird der in A nach rechts gezählte Winkel bc vom Bogen B_1C_1 des a_1 gemessen.

Beweis. Man mache in b und c die Bögen $AM = AN = 90^0$, so sind M und N Punkte des a_1, und es ist $bc = MN$ (Artik. 4).

Weil ferner A und B_1 die rechten Pole der sich in M rechtwinklig schneidenden Hauptkreise a_1 und b sind, so ist (Art. 4. β) $MB_1 = AM, = 90^0$, und ebenso, weil C_1 der rechte Pol von c ist: $NC_1 = AN, = 90^0$; folglich $MB_1 = NC_1$, d. i. $MN + NB_1 = NB_1 + B_1C_1$, folglich $bc, = MN, = B_1C_1$.

Es braucht übrigens kaum bemerkt zu werden, dass der

Digitized by Google

eben bewiesene Satz auch dann noch gilt, wenn darin überall links statt rechts gesetzt wird.

13. Kommt jetzt zu den zwei Hauptkreisen b und c ein dritter a hinzu, von welchem nach Bestimmung seines Sinnes der rechte Pol A_1 ist, so sind die Durchschnitte von a mit b und c, die man, wie im Früheren, C und B nenne, Pole der durch A_1 und B_1 und durch C_1 und A_1 zu legenden Hauptkreise, welche c_1 und b_1 heissen; und wenn die Sinne dieser neuen Hauptkreise also bestimmt werden, dass C und B ihre rechten Pole sind, so hat man, alle Winkel nach rechts gezählt, eben so, wie

$$(\alpha)\ \ldots\ bc = B_1C_1,\ \text{auch}\ ca = C_1A_1,\ ab = A_1B_1.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen sind aber die zwei Systeme

$$A, B, C, a, b, c \ \text{und}\ A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1$$

nicht allein von einerlei Beschaffenheit, insofern nämlich, als a, b, c die durch B und C, u. s. w. gelegten, und a_1, b_1, c_1 die durch B_1 und C_1, u. s. w. gelegten Hauptkreise sind, sondern es hängt, wie von dem ersten Systeme das zweite, auch von dem zweiten das erste ab. Denn auf gleiche Art, wie A_1, B_1, C_1 die rechten Pole von a, b, c sind, sind A, B, C die rechten Pole von a_1, b_1, c_1. Mithin muss es auch gestattet sein, in den Gleichungen (α) die Elemente des einen mit den entsprechenden Elementen des andern Systems zu vertauschen, und es müssen daher die um A_1, B_1, C_1 nach rechts gezählten Winkel

$$(\beta)\ b_1c_1 = BC,\ c_1a_1 = CA,\ a_1b_1 = AB\ \text{sein}.$$

Nun ist wegen der gleichen Beschaffenheit der beiden Systeme und mit Anwendung von (B) auf das zweite derselben:

$$\cos B_1C_1 = \cos C_1A_1.\ \cos A_1B_1 - \sin C_1A_1.\ \sin A_1B_1.\ \cos b_1c_1;$$

mithin ist auch in Folge der Gleichungen (α) und (β):

$$(\text{C})\ \ldots\ \cos bc = \cos ca.\ \cos ab - \sin ca.\ \sin ab.\ \cos BC,$$

welches die in Art. 12 verlangte Gleichung ist. — Zu erinnern ist hierbei nur noch, dass nach willkührlicher Annahme der Sinne von a, b, c die drei Winkel bc, ca, ab, statt, wie im Vorigen, nach der Rechten, auch nach der Linken gezählt werden können; — wie auch schon daraus erhellet, dass bei Verwandlung des gemeinschaftlichen Sinnes der Drehung in den entgegengesetzten das hierbei allein in Betracht kommende Product $\sin ca.\ \sin ab$ sein Zeichen nicht ändert.

14. Was noch die Gleichung zwischen zwei Bögen CA und AB, dem von ihren Kreisen gebildeten Winkel bc und dem einen

Digitized by Google

ca der beiden andern Winkel anlangt, so kann man dieselbe auf ähnliche Art, wie in Art. 11, dadurch erhalten, dass man aus den drei ersten der genannten Stücke das vierte zu bestimmen sucht, in dieser Absicht durch C einen Hülfskreis d rechtwinklig auf c legt, u. s. w. Man gelangt indessen ungleich kürzer zum Ziele, wenn man nach Lagrange's Vorgange (Journ. de l'éc. polyt., Cahier VI) in der Gleichung

$$\cos CA = \cos AB . \cos BC - \sin AB . \sin BC . \cos ca,$$

welche aus (B) durch gegenseitiges Vertauschen von A und B und von a und b folgt, für $\cos BC$ seinen Werth aus (A) setzt und in der resultirenden Gleichung

$$\cos CA . \sin AB + \sin CA . \cos AB . \cos bc + \sin BC . \cos ca = 0$$

für $\sin BC$ seinen aus (A) fliessenden Werth setzt. Denn es ergiebt sich somit

$$\text{(D)} \quad \operatorname{cotg} CA . \sin AB + \cos AB . \cos bc + \sin bc . \operatorname{cotg} ca = 0.$$

Mag noch bemerkt werden, dass die Willkühr des gemeinschaftlichen Sinnes der Drehung, nach welchem die Winkel bc und ca zu schätzen sind, ähnlicherweise, wie bei demselben Falle im vorigen Artikel, schon aus der Form des Gliedes $\sin bc . \operatorname{cotg} ca$ hervorgeht.

---

15. Im Bisherigen haben wir nicht sowohl ein sphärisches Dreieck, als vielmehr ein System von drei Punkten A, B, C einer Kugelfläche und die drei sie paarweise verbindenden Hauptkreise a, b, c betrachtet und, nachdem vorher die Sinne der drei Hauptkreise, sowie der gemeinschaftliche Sinn der Drehung für Winkel, willkührlich festgesetzt worden waren, die zwischen den Bögen $BC, \ldots$ und den Winkeln $bc, \ldots$ statt habenden Relationen zu entwickeln gesucht.

Etwas anders verhält es sich bei einem sphärischen Dreieck, als bei welchem von Sinnen nie die Rede zu sein pflegt. Man definirt ein solches als ein System dreier Hauptkreisbögen, welche drei Punkte A, B, C einer Kugelfläche paarweise verbinden. Da aber ein Kreis durch zwei in ihm liegende Punkte B und C in zwei Theile getheilt wird, so ist vorher noch zu bestimmen, welcher der beiden einander zu 360° ergänzenden Bögen unter BC gemeint sein soll; und diese Bestimmung vertritt hier die Bestimmung des Sinnes des durch B und C zu legenden Hauptkreises a. — Aehnlicherweise verhält es sich mit den Bögen CA und AB.

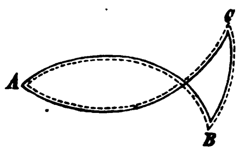
Digitized by Google

Was ferner die Winkel des Dreiecks ABC anlangt, so hat jeder derselben, z. B. der Winkel, den die zwei von A ausgehenden Bögen AB und AC mit einander machen, ebenfalls zwei einander zu 360^0 ergänzende Werthe. Um zwischen ihnen zu unterscheiden, durchgehe man in Gedanken auf der äussern Seite der Kugelfläche den Perimeter des Dreiecks nach dem Sinne ABC, nenne die Seite jedes der drei Bögen, welche auf diesem Wege zur Rechten (Linken) liegt, die innere (äussere) Seite des Bogens und verstehe unter dem innern (äussern) Winkel bei A denjenigen, innerhalb dessen die innern (äussern) Seiten seiner zwei Schenkel AB und AC fallen. Sowie nun im Vorigen die drei Winkel bc, ca, ab nach einerlei Sinne der Drehung gerechnet wurden, so haben wir auch jetzt für die drei Winkel des Dreiecks gleichnamige Winkel, d. i. entweder die drei innern, oder die drei äussern zu nehmen *).

Um jetzt diesen Bestimmungen gemäss die obigen vier Gleichungen (A), . . . (D) in die allbekannten für ein sphärisches Dreieck umzuwandeln, wollen wir, wie es gewöhnlich ist, die innern Winkel des Dreiecks bei A, B, C mit A, B, C und die ihnen gegenüberliegenden Bögen mit a, b, c bezeichnen. Wir wollen ferner den Sinn des Hauptkreises a also bestimmen, dass ein in a nach diesem Sinne von B bis C fortgehender Punkt den Bogen a selbst, nicht dessen Ergänzung zu 360^0, beschreibt. Hiernach ist $BC = \mathrm{a}$, und ebenso $CA = \mathrm{b}$ und $AB = \mathrm{c}$, wenn wir auf entsprechende Weise auch die Sinne von b und c festsetzen.

Ferner ist der Winkel $bc = CA \wedge AB, = AD \wedge AB$, wenn AD ein nach demselben Sinne, wie CA, gerechneter Bogen des Hauptkreises b ist. Die Schenkel des Winkels A aber sind AB und AC. Von diesen hat nach der obigen Bestimmung der Bogen AB seine

---



*) Zur Erleichterung der Auffassung kann man, wie in nebenstehender Figur geschehen ist, die innere Seite des Perimeters durch eine dicht neben ihm auf seiner rechten Seite laufende punktirte Linie andeuten. Es ist hier jeder der beiden Bögen CA und $AB > 180^0$, und der dritte $BC < 180^0$ angenommen worden, und man ersieht aus der Figur augenblicklich, dass alsdann von den innern Winkeln bei A, B und C die zwei letzten erhaben sind, und der erste hohl ist. — Das umgekehrte Verhältniss würde stattfinden, wenn man in der Figur die Buchstaben B und C gegenseitig vertauschen wollte, indem dann die punktirte Linie auf die der anfänglichen entgegengesetzte Seite des Perimeters fallen würde.

Digitized by Google

innere Seite zur Rechten, und AC seine innere Seite zur Linken. weil CA, wie AB, seine innere Seite zur Rechten hat. Der innere Winkel A ist mithin derjenige, um welchen der Bogen AB um A rechts bis zur Coincidenz mit AC,— oder, was dasselbe ist, AC um A links bis zur Coincidenz mit AB,— gedreht werden muss. Nehmen wir die Drehung nach der Rechten zur Normaldrehung, nach welcher dann auch der Winkel bc mit derselben Spitze A zu rechnen ist, so wird $\mathrm{A}=AB^\wedge AC$, folglich $bc+\mathrm{A}=AD^\wedge AB+AB^\wedge AC=AD^\wedge AC=180^0$, weil AD und AC von entgegengesetzten Sinnen sind; folglich $bc=180^0-\mathrm{A}$; und auf gleiche Weise $ca=180^0-\mathrm{B}$ und $ab=180^0-\mathrm{C}$.

Durch Substitution von a, .. $180^0-\mathrm{A}$, .. für BC, .. bc, .. in (A), .. (D) gehen aber diese Gleichungen über in:

[A] $\sin \mathrm{a} : \sin \mathrm{A} = \sin \mathrm{b} : \sin \mathrm{B}$,

[B] $\cos \mathrm{a} = \cos \mathrm{b}.\ \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{b}.\ \sin \mathrm{c}.\ \cos \mathrm{A}$,

[C] $\cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B}.\ \cos \mathrm{C} + \sin \mathrm{B}.\ \sin \mathrm{C}.\ \cos \mathrm{a}$,

[D] $\sin \mathrm{c}.\ \mathrm{cotg}\, \mathrm{b} - \sin \mathrm{A}.\ \mathrm{cotg}\, \mathrm{B} = \cos \mathrm{c}.\ \cos \mathrm{A}$.

Ganz auf dieselbe Weise können endlich die sechs Formeln für ein rechtwinkliges Dreieck aus I., II., .. VI in Art. 7, 8. u. 9 hergeleitet werden. Setzt man nämlich den Winkel ab der sich in C rechtwinklig schneidenden Hauptkreise a und b, $=90^0$ (nicht $=270^0$), so wird auch $\mathrm{C}=180^0-ab=90^0$; die für bc, ca, AB, BC, CA zu machenden Substitutionen bleiben dieselben, und man erhält somit:

$$\cos \mathrm{a}.\ \cos \mathrm{b} = \cos \mathrm{c},\quad \sin \mathrm{a} = \sin \mathrm{c}.\ \sin \mathrm{A},$$
$$\mathrm{tang}\, \mathrm{b} = \mathrm{tang}\, \mathrm{c}\ \cos \mathrm{A},\ \text{u. s. w.}$$

SITZUNG AM 10. MÄRZ 1860.

O. Funke, *über photographische Vervielfältigung der Myographioncurven.*

Ein vortreffliches Mittel, die auf der Russtafel des Pflüger'schen Myographion verzeichneten Curven der Reizungs-Erregbarkeits- und Leitungsgesetze der Nerven und Muskeln mit grösster Schärfe und vollkommenster Genauigkeit in beliebiger Anzahl zu copiren, bietet die Photographie. Ich fiel auf den Gedanken, die Photographie zu diesem Zweck zu verwenden, als es mir darauf ankam, bestimmte Exemplare solcher Curven mit möglichster Treue wiederzugeben und aufbewahren zu können. Die gewöhnliche Methode der Abnahme derselben auf Gelatinepapier hat, abgesehen von der Unmöglichkeit der directen Vervielfältigung, die Nachtheile, dass die Copie nicht immer durchweg scharf und deutlich ausfällt, dass man auf dem Gelatinepapier keine nachträglichen Bezeichnungen einzelner Theile der Curve anbringen kann, dass beim Trocknen des befeuchteten Gelatinepapiers zuweilen Verzerrungen der Curven entstehen. Die genaue Ausmessung der Curven und ihre Wiedergabe in Form einer tabellarischen Zusammenstellung der gefundenen Ordinatenwerthe liefert zwar genaue Ausdrücke für die Bedeutung der Curven, aber sicher nicht so übersichtliche, zur Demonstration geeignete Bilder der Gesetze, als die directe photographische Copie, bei welcher alle Nachtheile der zuerst genannten Methode in Wegfall kommen. Nach Ueberwindung einiger unbedeutenden technischen Schwierigkeiten ist mir die Herstellung tadelfreier Photographien vollständig gelungen. Das Verfahren ist so einfach und liegt so auf der Hand, dass ich mich auf einige kurze Andeutungen beschränken kann. Selbstverständlich wird die Russplatte, auf welcher die Curve verzeichnet ist, als negative Platte benutzt, und auf empfindlichem Silberpapier unverrück-

Digitized by Google

bar befestigt, dem Lichte ausgesetzt, welches ausschliesslich durch die russfreien Linien hindurchdringen und in genau entsprechenden Linien das Silbersalz des Papiers zersetzen kann. Letztere werden dann nach bekannten photographischen Methoden durch unterschwefligsaures Natron fixirt.

Der Hauptübelstand liegt nun in Folgendem. Will man sich auf eine einzige Copie beschränken, so legt man die negative Platte vorsichtig mit der Russseite auf das Papier, und erhält dann ein vollkommen scharfes Bild. Beabsichtigt man aber, eine Reihe von Copien zu erhalten, so ist diese Art des Auflegens nicht anwendbar, weil der Russ theilweise auf dem Papier haften bleibt. Dem liesse sich abhelfen, wenn sich ein Mittel finden liesse, den Russ auf der Glasplatte zu fixiren; zweifle ich nun auch nicht, dass dies zu erzielen ist, so haben doch alle von mir in dieser Richtung bisher angestellten Versuche nicht den gewünschten Erfolg gehabt. So lange ein solches Verfahren nicht gefunden ist, muss man, wenn mehrfache Copien von einer Platte gemacht werden sollen, das positive Papier auf der Rückseite der Glasplatte anbringen, wobei natürlich der Uebelstand eintritt, dass das Licht nicht allein die senkrecht hinter den russfreien Linien gelegenen Papiertheilchen trifft, sondern auch in grösserer oder geringerer Ausdehnung die seitlich gelegenen Theilchen, so dass die Linien verbreitert sich abbilden, oder auch statt einer einfachen zwei, selbst drei dicht nebeneinander laufende Linien zum Vorschein kommen. Dieser Uebelstand ist indessen nicht so gross, als er scheinen könnte und lässt sich auf ein Minimum reduciren. Nimmt man möglichst dünne Glasplatten (von Tafel- nicht Spiegelglas), und copirt im directen Sonnenlicht, indem man die Glasfläche senkrecht gegen die Sonnenstrahlen stellt und mit der Sonne dreht, blendet man ferner durch schwarzes Papier alles störende Seitenlicht ab, so erhält man auch von der Hinterseite der Glasplatte Bilder, welche nichts zu wünschen übrig lassen. Es erscheinen dann vollkommen scharfe, feine und dunkelschwarze Bilder der Linien, von einem schmalen blassen Hof umgeben, welcher die Deutlichkeit der Linien nicht stört, und bei gehörig langem Verweilen der Copien im unterschwefligsauren Natron fast vollständig verschwindet. Das Copiren im directen Sonnenlicht gewährt dazu den Vortheil, dass bei gehöriger Empfindlichkeit des Papiers schon in 10—15 Min. die Zersetzung des Silbers vollkommen beendet ist. Ist man auf das diffuse Licht des hellen

Digitized by Google

Himmels angewiesen, so kann man durch Abblenden alles Seitenlichts und gehörig langes Verweilenlassen im Licht immerhin befriedigende Bilder erhalten, und sind die Linien zu breit oder zu blass, so ist nichts leichter, als nach der negativen Platte als Vorlage die Copien mit Tusche zu retouchiren, und zwar bei nur leidlicher Gewissenhaftigkeit mit vollkommner Sicherheit, in der Ordinatenlänge keinen Fehler über $^1/_4$ Mill. zu machen. Ein solcher Fehler ist aber in den meisten Fällen ohne allen Belang. Am allerwenigsten kann man irren, wo statt einfacher breiter Linien je zwei parallele erscheinen; man zieht dann die eine treu nach dem Muster der andern, welche als Controle stehen bleibt, mit Tusche aus.

Ich mache auf diese Methode aufmerksam, weil ich glaube, dass sie in praxi in manchen Fällen von grossem Nutzen ist. Ich habe mir mit Hülfe derselben eine grosse Reihe von Photographien für alle Gesetze, welche der Muskel überhaupt graphisch ausdrücken kann, hergestellt und dieselben (selbstverständlich neben der experimentellen Beweisführung) ausserordentlich geeignet zur Demonstration jener Gesetze befunden.

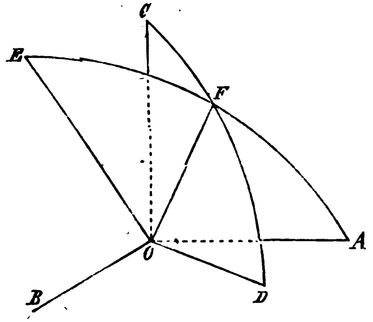
Digitized by Google

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 1. JULI 1860.

O. Schlömilch. *Ein neuer statischer Beweis für das Parallelogramm der Kräfte.*

Die Grösse der Resultante von zwei, unter einem rechten Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräften P und Q ist bekanntlich sehr leicht zu finden ($R = \sqrt{P^2 + Q^2}$), dagegen verursacht die Bestimmung der Lage von R einige Mühe und führt in der Regel zu einer Functionalgleichung. Da letztere unvermeidlich zu sein scheint, so kann es nur noch darauf ankommen, diese Gleichung durch elementare Betrachtungen aufzulösen oder zu ersetzen. Das Folgende enthält einen Versuch dieser Art, welchem ein bisher unbenutztes Princip zu Grunde liegt.

Man denke sich im Raume drei aufeinander senkrechte Kräfte



$OA = U$, $OB = V$, $OC = W$ und deren Resultante OF; diese lässt sich auf zweierlei Weise bilden. Construirt man erst aus OA und OB die Resultante OD und combinirt diese mit OC, so muss OF in der Ebene COD liegen; vereinigt man dagegen OB mit OC zur Resultante OE und verbindet diese mit OA, so gehört OF zur

Ebene AOE. Hieraus folgt, dass OF der Durchschnitt der Ebenen COD und AOE ist, und man findet nun leicht (z. B. mittelst der sphärischen Trigonometrie).

$$\tan AOF = \frac{\tan AOD}{\cos BOE} = \tan AOD . \sqrt{1 + \tan^2 BOE.}$$

Um diese Gleichung mehrmals nacheinander anwenden zu können bezeichnen wir mit $\angle (P, Q)$ den Winkel, welchen die Resultante der beiden Kräfte P und Q mit der ersten Kraft P einschliesst (immer $P \perp Q$ vorausgesetzt) und haben statt der vorigen Gleichung die folgende

1) *) $\tan (U, \sqrt{V^2 + W^2}) = \tan (U, V) . \sqrt{1 + \tan^2 (V, W)}.$

Wir betrachten zunächst den speciellen Fall $V = U$. Da die Resultante zweier gleichen Kräfte den Winkel zwischen letzteren halbirt, so ist $\angle (U, U) = 45^0$ und

2) $\tan (U, \sqrt{U^2 + W^2}) = \sqrt{1 + \tan^2 (U, W)}.$

In dieser Gleichung setzen wir der Reihe nach $W = U, U\sqrt{2}, U\sqrt{3}, \ldots U\sqrt{n^2}$ und substituiren jede entstehende Gleichung in die nächst folgende; diess giebt

$$\tan (U, U\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$
$$\tan (U, U\sqrt{3}) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$
$$\tan (U, U\sqrt{4}) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

u. s. w.

überhaupt

$$\tan (U, Un) = n.$$

Hierin liegt der Satz, dass

3) $\tan (U, S) = \frac{S}{U}$

ist sobald S ein Vielfaches von U ausmacht.

In der Gleichung 1) schreiben wir ferner P und Q für U und V also

$$\tan (P, \sqrt{Q^2 + W^2}) = \tan (P, Q) . \sqrt{1 + \tan^2 (Q, W)}$$

und setzen der Reihe nach $W = Q, Q\sqrt{2}, Q\sqrt{3}, \ldots Q\sqrt{m^2}$.

---

*) Diess ist in der That eine Functionalgleichung. Setzt man nämlich

$$\tan (U, V) = f\left(\frac{V}{U}\right) = f(x), \quad \tan (V, W) = f\left(\frac{W}{V}\right) = f(y),$$

$$\tan (U, \sqrt{V^2 + W^2}) = f\left(\frac{\sqrt{V^2 + W^2}}{U}\right) = f(x\sqrt{1 + y^2}),$$

so nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an

$$f(x\sqrt{1+y^2}) = f(x) \sqrt{1 + [f(y)]^2}.$$

Digitized by Google

Mit Rücksicht auf die vorhin entwickelten Werthe von tan $(U, U\sqrt{2})$, tan $(U, U\sqrt{3})$ u. s. w. und durch Substitution von jeder Gleichung in die folgende erhalten wir

$$\tan (P, Q\sqrt{2}) = \tan (P, Q) . \sqrt{2}$$
$$\tan (P, Q\sqrt{3}) = \tan (P, Q) . \sqrt{3}$$
u. s. w.

überhaupt

$$\tan (P, Qm) = \tan (P, Q) . m$$

oder umgekehrt

$$4) \qquad \tan (P, Q) = \frac{\tan (P, mQ)}{m}.$$

Wenn sich nun P und Q wie die ganzen Zahlen m und n verhalten, so ist mQ ein Vielfaches von P nämlich $mQ = nP$, mithin nach Formel 3) tan $(P, mQ) = \frac{mQ}{P} = n$ und nach No. 4)

$$\tan (P, Q) = \frac{n}{m} = \frac{Q}{P}.$$

Für alle rationalen Verhältnisse $\frac{Q}{P}$ ist hiermit die Lage der Resultante bestimmt; für irrationale Verhältnisse benutzt man die bekannte Methode der Einschliessung in rationale, einander immer näher rückende Grenzen. Ebensowenig braucht hier auseinander gesetzt zu werden, wie man nachher den Fall behandelt, wo P und Q keinen rechten Winkel einschliessen.

Digitized by Google

G. Th. Fechner, *über die Contrastempfindung.*

a) Vorbemerkungen.

Das Folgende enthält Beiträge zur Lehre von den Erscheinungen, die auf dem Contrast beruhen. Theils wird es sich um Klarstellung der allgemeinen Gesichtspuncte, unter welchen diese Erscheinungen aufzufassen sind, theils um die Ursachen, Abhängigkeitsverhältnisse und näheren Bestimmungen derselben handeln. Das Resumé zum Schluss gibt eine kurze Uebersicht der Resultate.

Die meisten der Beobachtungen, zu denen diese Untersuchung Anlass gegeben hat, gehören dem Gebiete des Gesichtssinnes an. In Betreff des krankhaften Zustandes meiner dabei gebrauchten Augen und der Mitzuziehung anderer Beobachter habe ich hiebei auf das zu verweisen, was ich in meiner frühern Abhandlung über das binoculare Sehen*) angeführt habe. Ueberhaupt ist die ganze folgende Untersuchung in Zusammenhang mit jener über das binoculare Sehen geführt worden, und ergänzt sich mit ihr in gewissem Sinne, indem man das, was die Contrastverhältnisse von einer Netzhaut zur anderen hinüber anlangt, vielmehr in jener als dieser Abhandlung zu suchen hat. Von andrer Seite ergänzt sie sich mit den Untersuchungen, welche ich früher in Pogg. Ann. XLIV. 221. 513. und L. 193. 427. über Contrastfarben bekannt gemacht habe, indem sie sich meist auf den Contrast zwischen Schwarz und Weiss bezieht. Leider hat der Zustand meiner Augen auch hier der Weiterführung mancher Beobachtungen eine unwillkommene Gränze gesetzt.

---

*) Abhandl. d. math. phys. Classe der sächs. Societät. V. S. 345. 351.

Digitized by Google

Wo im Folgenden von der Anwendung eines schwarzen Grundes die Rede ist, diente stets schwarzes glanzloses Russpapier oder eine schwarze glanzlose Tafel dazu. Eine inwendig schwarze Röhre ward in der Regel durch einen mit der schwarzen Seite nach Innen zusammengerollten Bogen Russpapier hergestellt. Die drei Sorten grauen Papieres, die zu mehreren der folgenden Versuche dienten, warfen, nach einem in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen S. 365 angegebenen Verfahren bestimmt, ungefähr folgende Mengen weisses Licht zurück, wenn weisses Velin 1000 zurückwirft

no. 1 = 575
no. 2 = 385
no. 3 = 228.

Die meisten Beobachtungen sind in einem Zimmer mit nur einem Fenster auf einem unmittelbar am Fenster stehenden, mit dunkelgrünem Wachstuch überzogenen Tische, über welchen hinaus man ins Freie sieht, in verbreitetem Tageslichte angestellt.

Die Gränze zwischen zwei benachbarten contrastirenden Flächen, z. B. Schwarz und Weiss, nenne ich kurz Contrastgränze.

Wenn ich im Folgenden von Wachsthum oder Abnahme einer Empfindlichkeitssumme spreche, so ist diess ein kurzer Ausdruck für ein Verhältniss folgender Art. Wird bei gegebener Empfindlichkeit ein grösserer Theil der Netzhaut mit Licht gereizt oder die Netzhaut stärker als bisher mit Licht gereizt, so sage ich, dass die Summe der Lichtempfindung wächst, im Gegenfalle, dass sie abnimmt.

b) Allgemeines über Contraste.

Unter Contrastempfindung oder kurz Contrast wird hier die Empfindung eines Unterschiedes oder ein empfundener Unterschied zwischen gegebenen sinnlichen Eindrücken verstanden.

Da wir die Sinnesreize, welche den contrastirenden Eindruck machen, nicht an sich selbst empfinden, vielmehr der Eindruck, den sie in unserer Seele hervorbringen, nur in Empfindungen besteht, so kann der Contrast auch als Empfindung eines Unterschiedes zwischen Empfindungen erklärt werden,

Digitized by Google

womit er den Charakter eines höheren Seelenphänomens annimmt, als die einzelnen Empfindungen, wozwischen er besteht und eine psychische Beziehung herstellt.

Die Empfindungen, wozwischen der Contrast besteht, mögen der Contrastempfindung gegenüber absolute Empfindungen oder auch Empfindungen schlechthin heissen.

Wichtig ist, einen Unterschied zwischen Empfindungen noch nicht für einen empfundenen Unterschied, und also mit jenem noch keinen Contrast gegeben zu halten. In zwei verschiedenen Menschen können Empfindungen bestehen, deren Unterschied sehr gross ist; aber weder der eine noch der andere empfindet diesen Unterschied, er wird überhaupt nicht empfunden, indem jeder nur eine beider Empfindungen hat. In denselben Menschen können sehr verschiedene Empfindungen zu verschiedenen Zeiten fallen, ohne dass er doch etwas von einem Unterschiede derselben empfindet, indem die erste in ihm ihrer sinnlichen Nachwirkung und ihrer Erinnerung nach ganz erloschen ist, wenn die zweite eintritt. Wenn ein Ton in Höhe oder Stärke continuirlich steigt, und die Empfindung mit steigt, so wird nothwendig die kleinste Aenderung des Tons eine Aenderung der Empfindung mitführen, denn sonst könnte nach dem Continuitätsprincip eine grosse Aenderung des Tons auch keine grosse Aenderung der Empfindung merklich werden lassen, aber die Aenderung der Empfindung wird erst als Aenderung empfunden, wenn sie eine gewisse Grösse übersteigt.

Also ist ein empfundener Unterschied und mithin ein Contrast nicht überhaupt zu statuiren, wo verschiedene Eindrücke und davon abhängige verschiedene Empfindungen bestehen, sondern nur wo sie in demselben Individuum unter solchen Verhältnissen so nahe zusammentreffen, und der Unterschied so gross wird, um aus einem blossen Empfindungsunterschiede einen empfundenen Unterschied zu machen, und die Stärke des Contrastes hängt nicht minder von der Weise jener Begegnung, als von dem Unterschiede der Componenten des Contrastes ab, kann daher selbst bei sehr stark differenten Einwirkungen null werden.

Contraste finden ebensowohl zwischen successiven als gleichzeitigen Eindrücken statt, wonach wir kurz Folge-Contrast und Simultan-Contrast unterscheiden können. Wir wissen nicht, worauf es beruht, dass ein Vergangenes noch sein

Digitized by Google

Verhältniss zum Gegenwärtigen in der Seele geltend machen kann, möglicherweise darauf, dass das Vergangene in Nachwirkungen fortbesteht, zu denen die neuen Einwirkungen in Verhältniss treten. Indess hier haben wir nur das Factum anzuerkennen.

Contraste bestehen ebensowohl zwischen Eindrücken verschiedener Stärke, Beispiel Weiss und Schwarz, als verschiedener Qualität, Beispiel Roth und Grün, wonach wir kurz quantitativen und qualitativen Contrast unterscheiden können. Beim quantitativen Contrast kann die eine Componente im Gränzfalle null sein. In gewisser Weise lassen sich die qualitativen Contraste auf quantitative zurückführen. Wenn Grün neben Roth ist, fehlt das Roth neben dem Roth und fehlt das Grün neben dem Grün; und besteht also von beiden Seiten zugleich ein quantitativer Unterschied im Sinne der ersten Art des Contrastes. Doch ist noch fraglich, inwiefern mit dieser Zurückführung etwas zu gewinnen ist.

Die Contrast-Empfindung ist eine Empfindung sui generis, die, nach ihrer Abhängigkeit von der Differenz absoluter Empfindungen oder dem diese Differenz begründenden Verhältniss der Reize, zur Summe der absoluten Empfindungen, welche die Componenten des Unterschiedes gewähren, hinzutritt, und den Totaleffect für die Seele steigert, ohne irgendwie selbst als Summe oder als Function einer Summe absoluter Empfindungen erklärbar zu sein.

Wäre dem nicht so, so müsste sich der Effect in der Seele überall vermindern, wo sich durch Verminderung eines Empfindungsreizes die Summe absoluter Empfindungen vermindert, wogegen man es als allgemeine Thatsache ansehen kann, dass Verminderung oder Beseitigung eines Empfindungsreizes den Effect für die Seele überall vergrössert, wenn sie dient, die Gleichförmigkeit zeitlich oder räumlich zu unterbrechen oder aufzuheben, und es kann Verminderung eines Reizes auf diese Weise selbst als kräftiger Reiz für die Seele auftreten, der sie nicht nur unmittelbar eben so stark, oft lästig, afficirt, sondern auch die Aufmerksamkeit entsprechend anzieht, als Steigerung eines Reizes.

Wenn wir auf der Mitte eines weissen Grundes ein schwarzes Feld anbringen, oder gar das monotone Weiss durch ein scheckiges Muster aus Weiss und Schwarz ersetzen, so vermindern wir die Summe des absoluten Lichteindruckes erheblich, aber Nie-

Digitized by Google

mand wird in Zweifel sein, dass der Effect für die Seele durch den Contrast im Ganzen gewachsen ist. Ein anderes auffälliges Beispiel gewährt die Pause in einer rauschenden Musik.

Auf mein sehr reizbares Auge machen einzelne helle Sonnenflecke in der Stube einen so starken Eindruck, dass ich sie nicht wohl vertrage, indess ich im vollen Sonnenschein auf der Strasse gehen oder in den hellen Himmel sehen kann, ohne es lästig zu fühlen, ungeachtet hiebei die ganze Netzhaut mit derselben oder grösserer Intensität gereizt ist, als erstenfalls nur eine begränzte Stelle.

Wie wirksam der Contrast sich bei den Phänomenen des binocularen Sehens erweist, contrastirende Eindrücke im einen Auge zur Präponderanz über gleichförmige im andern Auge zu bringen, ist im 7. Abschnitt meiner Abhandlung über das binoculare Sehen dargelegt.

Aus der doppelten und in gewissem Sinne von einander unabhängigen Bestimmung unserer Seele durch absolute Empfindungen und Contraste erklären sich viele scheinbare Paradoxieen. Die Empfindung des Schwarz im geschlossenen Auge oder beim Blick auf eine schwarze Fläche ist an sich eine positive Empfindung, wie wir zugestehen werden, wenn wir sie gegen das Nichtssehen mit dem Finger halten; doch wird Schwarz wie ein Mangel empfunden. Tiefes Schwarz ist eine schwächere Lichtempfindung als Grau und macht doch in der Regel einen stärkeren Eindruck in der Seele als Grau.

Um diess richtig zu deuten, unterscheide man die Summe absoluter Licht-Empfindung, die wir beim Schwarzsehen haben, von der Contrast-Empfindung des Schwarz gegen die vorausgegangene, die umgebende oder die mittlere Helligkeit, die wir in Erinnerung haben. Absolut genommen bleibt immer Schwarz eine positive Lichtempfindung, was wir auch zugeben werden, wenn wir sie gegen das Nichtssehen mit dem Finger halten, und eine schwächere Lichtempfindung als das Grau. Aber der Unterschied des Schwarz von der mittleren Helligkeit ist grösser als der des Grau, und diese grössere Differenz macht einen grösseren Eindruck ihrer Art in der Seele.

Mit der Kälte ist es anders als mit dem Schwarz und es findet nur Analogie nicht Gleichheit beider Fälle statt. Indess die absolute Stärke der Lichtempfindung mit Verminderung des Lichtreizes entschieden durch alle Grade der Vertiefung des

Digitized by Google

Schwarz abnimmt, und blos der Contrast-Eindruck sich verstärkt, wächst dagegen die Empfindung von einem Puncte, wo wir es weder warm noch kalt finden, absolut mit zunehmender Kälte; und es kann uns starke Kälte eben so stark, nur ganz anders, sinnlich afficiren, als starke Hitze. Diess hindert aber nicht, dass sich im Gebiete der Temperaturempfindungen ebensowohl auch Contraste von demselben Charakter geltend machen, als im Gebiete der Lichtempfindung. Und so kann uns eine warme Temperatur kühl gegen eine wärmere und eine kalte warm gegen eine kältere erscheinen.

Es ist leicht, im Gebiete anderer Sinnesempfindungen Erfahrungen von ähnlichem Charakter zu machen. Wenn ich bei meinen Versuchen über die Empfindlichkeit für Gewichtsunterschiede eine Reihe Versuche mit schweren Gewichten gemacht habe, und gehe unmittelbar zu sehr leichten über oder hebe ein unbelastetes Gefäss, so glaube ich nicht nur keine Last zu fühlen, sondern das gehobene Gefäss scheint mir so zu sagen ein negatives Gewicht zu haben.

Diese Empfindung der Leichtigkeit statt Schwere ist immer etwas Positives und nicht mit Abwesenheit oder Unbewusstsein der Empfindung zu verwechseln. Wohl aber ist die Differenz der Empfindung von der vorausgegangenen in negativem Sinne und die Empfindung dieser Differenz bestimmt in diesem Falle das Bewusstsein.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich das Gesetz erörtert, dass ein Lichtunterschied immer gleich merklich erscheint, nicht, wenn der absolute Unterschied der photometrischen Intensitäten, sondern wenn der relative Unterschied, und hiemit, wenn das Verhältniss der Intensitäten dasselbe bleibt; ich habe (an den Sterngrössen) gezeigt, wie überhaupt der empfundene Lichtunterschied als eine Function des Verhältnisses der Intensitäten der Lichtreize anzusehen; und habe darauf hingewiesen, dass dieses Gesetz sich auch für andere Sinnesreize (allerdings nicht ohne Beschränkung) gültig erweist. Hienach wird auch die Grösse des Contrastes, welcher durch zwei quantitativ contrastirende Reize (Contrastcomponenten) entsteht, da er eben nichts Anderes als ein empfundener Unterschied ist, diesem Gesetze im Allgemeinen gehorchen, und als eine Function

*) Abhandl. d. sächs. Soc., math. phys. Cl. IV. S. 457.

Digitized by Google

des Verhältnisses der Reizgrössen (gründlicher der dadurch ausgelösten physiologischen Thätigkeiten, woran die Empfindungen hängen) anzusehen sein.

In der That bietet derselbe Stern, der in sehr starkem Contrast gegen den umgebenden Nachthimmel erscheint, gar keinen Contrast gegen den Tageshimmel dar, sondern verfliesst ununterscheidbar damit, ungeachtet der Zuwachs, den er der Himmelshelligkeit zufügt, bei Tage eben so gross als bei Nacht ist. Aber das Verhältniss der Helligkeit des Tageshimmels ohne Stern und mit Zuwachs des Sternes nähert sich der Gleichheit so sehr, dass die Contrastwirkung zwischen beiden unmerklich wird. Hienach kann man mit schwachen Reizen bei viel geringerer Summenwirkung der Eindrücke doch viel stärkere Contrastwirkungen erlangen, als mit starken Reizen, wenn man ein grosses Unterschiedsverhältniss der schwachen erzeugt.

c) Hebung der Eindrücke durch den Contrast.

Der Contrast führt von selbst eine Wirkung mit, die aber nicht als Grund desselben anzusehen ist. Schwarz neben Weiss erscheint im Allgemeinen schwärzer, Weiss neben Schwarz weisser, lichter, als in continuo für sich betrachtet. Roth und Grün in Nachbarschaft erhöhen wechselseitig ihren Farbeneindruck. Plötzliche Stille nach dem Lärm macht den Eindruck einer tieferen Stille, als wenn es lange still war. Ich will diess kurz die Hebung der Eindrücke durch den Contrast nennen, was also nicht mit Aufhebung derselben zu verwechseln ist, und zunächst die allgemeinen Verhältnisse derselben besprechen.

Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man geneigt sein, das Wesentliche des ganzen Contrastes auf die wechselseitige Hebung der Eindrücke zu reduciren, und nur eine Steigerung der Summe absoluter Empfindungen darin zu sehen, ohne es nöthig zu halten, auf die hinzutretende Wirkung eines besonderen Differenzgefühls Rücksicht zu nehmen. Inzwischen lehrt eine leichte Ueberlegung, dass die Summe der absoluten Empfindungen durch die Hebung nicht wächst, sondern blos die Differenz, so dass man zur Erklärung der in Verhältniss zu monotonen Eindrücken starken Wirkung des Contrastes immer darauf verwiesen bleibt, eine eigenthümliche Leistung der Differenz beim Contrast anzuerkennen, welche nun aber durch die Hebung nicht

Digitized by Google

erst erzeugt wird, sondern nur wächst. In der That, wenn die absolute Helligkeit des Weiss durch Contrast mit Schwarz zunimmt, so nimmt zugleich die des Schwarz ab; ja es wird sich durch die Versuche des folgenden Abschnittes herausstellen, dass durch die Hebung die Helligkeit des Schwarz für die Wahrnehmung im Allgemeinen mehr vermindert wird, oder die Tiefe des Schwarz mehr wächst, als die Helligkeit des Weiss, so wie, dass die Hebung der Eindrücke durch Gegenwirkungen aufgehoben oder selbst überboten werden kann, indess doch der Contrast noch besteht.

Die Hebung der Eindrücke ist hienach blos ein Nebeneffect, aber weder die Ursache noch nothwendige Begleitung der Contrastempfindung.

Der Grund der Hebung der Eindrücke durch den Contrast kann in einem doppelten Umstande gesucht werden. Er kann erstens darin gesucht werden, dass, indem wir z. B. das Weiss mit Schwarz oder umgekehrt vergleichen, beiderseits eine andere Einheit oder ein anderer Ausgangspunct für den Vergleich unterliegt, als wenn wir jedes mit sich vergleichen, und dass diese andere Einheit oder dieser andere Ausgangspunct das Urtheil in dem Sinne der wechselseitigen Hebung beider Eindrücke stimmen muss. Denn das Weiss muss natürlich heller in Verhältniss zum Schwarz als zum Weiss, und das Schwarz dunkler in Verhältniss zum Weiss als zum Schwarz erscheinen. Wir sind aber sehr geneigt, dieses relative Heller und Dunkler mit einem absoluten zu verwechseln.

Der Grund der Hebung könnte aber auch zweitens darin gesucht werden, dass durch die Nachbarschaft des Weiss und Schwarz die physiologische Thätigkeit, von welcher die Lichtempfindung abhängt, und die wir, wo es um Kürze zu thun ist, kurz das innere Licht nennen können, auf den weissen Stellen relativ gesteigert, auf den schwarzen relativ vermindert ist gegen den Fall, dass Weiss oder Schwarz in continuo über die Netzhaut verbreitet wären. Stützt man, wie diess durch eine, mit dem Sprachgebrauche übereinstimmende, Definition geschehen kann, den Begriff der Empfindlichkeit für das Licht darauf, dass die Empfindlichkeit um so grösser genannt wird, je stärker die Empfindung bei gegebenem äusseren Lichtreize ist, oder ein je geringerer äusserer Lichtreiz eine Helligkeitsempfindung gegebener Stärke bewirkt, so würde man auch sagen können, dass

Digitized by Google

durch den Contrast die Empfindlichkeit für das Licht auf dem Weiss zunehme, auf dem Schwarz abnehme, indem die Thätigkeit, von welcher die Lichtempfindung abhängt, das innere Licht, auf dem Weiss bei gleichem äusseren Lichtreize wächst, wenn in der Nachbarschaft befindliches Weiss mit Schwarz vertauscht wird, umgekehrt auf Schwarz abnimmt, wenn benachbartes Schwarz mit Weiss vertauscht wird.

Kurz: man kann den Grund der Hebung der Eindrücke durch den Contrast entweder in ein höheres psychisches Gebiet verlegen, indem man ihn als eine Sache eines Vergleichsurtheiles fasst, oder kann ihn in die Sinnlichkeit verlegen und als eine Sache abgeänderter Empfindlichkeit für das äussere Licht oder, was dasselbe sagt, abgeänderter Stärke des dadurch erregbaren inneren Lichtes, fassen.

Endlich wäre auch noch ein Drittes möglich, dass nämlich beide Ansichten mit einander bestehen; und in der That wird sich zeigen lassen, dass man mit einer allein nicht ausreicht.

Wenn Nachts der Vollmond durch eine Oeffnung in den Gardinen scheint, und einen hellen Fleck im Zimmer hervorbringt, so erscheint mir dieser der umgebenden Nacht gegenüber von blendender Helligkeit, viel heller als ein weisses Papier am Tage, das doch ungleich heller erleuchtet ist. Nun ist unstreitig Nachts das ausgeruhte Auge empfindlicher gegen das Licht als das Auge im vollen Tageslichte; aber hiervon kann die scheinbar so grosse Helligkeit des Mondfleckes nicht allein und nicht einmal hauptsächlich abhängen. Denn ich könnte schwarze Schrift in dem Mondflecke nicht oder nur mit einer für mein Auge unerträglichen Anstrengung lesen, indess ich Schrift auf einem weissen Papierblatte am Tage leicht lese. Der Erfolg ist also hier unstreitig wesentlich Sache eines Vergleichsurtheiles.

Wenn mir nach gehobenen schweren Gewichten die Hebung eines leichten Gefässes den Eindruck einer ganz besonderen Leichtigkeit, ja negativen Schwere macht, so kann diess nicht davon abgeleitet werden, dass ein ermüdeter Arm die Schwere eines Gewichtes minder stark empfindet, als ein nicht ermüdeter, denn es findet in dieser Hinsicht factisch das Gegentheil statt, sondern nur daher, dass man das leichte Gewicht in Vergleich mit dem vorher gehobenen schweren Gewicht für leichter als sonst hält.

Digitized by Google

In dieser Hinsicht habe ich bei meinen Versuchen über die Empfindlichkeit für Gewichtsunterschiede, bestehend in fortgesetzter vergleichsweiser Hebung von zwei, etwas ungleich belasteten Gefässen, eine sehr merkwürdige Erfahrung gemacht. Vor Beginn dieser Versuche war einmal der linke Arm durch wiederholtes Heben eines 9¼ Pf. schweren Bleigewichtes, bis es nicht mehr ging, sehr stark ermüdet worden. Unmittelbar nach der Ermüdung hob ich von den beiden Gefässen, deren eines 1000, das andere 1060 Grammen schwer war, das schwerere links stehende Gefäss mit dem linken ermüdeten Arm zuerst, das rechte mit dem rechten nicht ermüdeten Arm zu zweit. Doch erschien bei dieser ersten Doppelhebung das linke schwerere und mit dem ermüdeten Arm gehobene Gefäss entschieden als das leichtere; indem seine Schwere offenbar gegen das vorgängige starke Gewicht von 9¼ Pfund so leicht befunden wurde, während das zweit gehobene weniger gegen dieses als gegen das zuvor gehobene Gewicht von 1060 Grammen beurtheilt wurde. Hingegen trat bei den späteren Doppelhebungen (wobei immer abwechselnd das linke und rechte Gefäss das erst aufgehobene war) eben so entschieden das Gegentheil ein, d. h. es wurde das linke Gefäss als das schwerere befunden. Diese Erfahrung ist viermal mit gleichem Erfolge nach jedesmal neuer gleich starker Ermüdung des linken Armes gemacht worden. Dabei fühlte ich jedesmal deutlich, wie sich das Verhältniss von der ersten zur zweiten Doppelhebung änderte, so dass schon die zweite Doppelhebung das Uebergewicht für das Gefühl bei einer dieser kleinen Versuchsreihen zweideutig erscheinen, bei dreien links fallen liess.

Wundt in seiner Abhandlung über Tastversuche in Henle und Pfeufer Zeitschr. 1858 theilt folgende Erfahrungen mit, welche dasselbe, was sich aus Vorstehendem für die intensive Seite der Empfindung folgern lässt, auch für die extensive beweisen, und ich selbst habe oft genug Gelegenheit gehabt, Aehnliches bei meinen Tastversuchen zu beobachten.

»Als ein weiterer bemerkenswerther Umstand gehört hieher, dass ein unmittelbar vorangegangener Eindruck auf den ihm nachfolgenden von Einfluss ist. So z. B. wird immer, wenn man auf einen Eindruck mit weiter Zirkelöffnung einen solchen mit engerer Zirkelöffnung folgen lässt, die letztere Entfernung grösser geschätzt, als unter gewöhnlichen Verhältnissen; und das Entgegengesetzte findet Statt, wenn umgekehrt der engeren die weitere Zirkelöffnung nachfolgte. Hier wird die grössere Entfernung kleiner geschätzt als gewöhnlich .... Etwas Analoges beobachtet man, wenn man viele Eindrücke nach einander stattfinden lässt, indem man dabei allmälig von weiterer zu engerer Zirkelöffnung übergeht; hier verkleinern sich die geschätzten Entfernungen lange nicht in dem gleichen Masse wie die wirklichen, sondern viel langsamer, und es werden selbst da noch

Digitized by Google

deutlich zwei Eindrücke wahrgenommen, wo solches ohne dieses Verfahren bei Weitem nicht mehr wäre möglich gewesen .... Genau das Entgegengesetzte aber findet statt, wenn man in der umgekehrten Reihenfolge verfährt, wenn man den engeren Zirkelöffnungen, die anfangs sogar noch keine räumlich getrennten Wahrnehmungen möglich machen, allmälig die weiteren folgen lässt. Hier schleicht man sich unbemerkt über jene Gränze hinaus, macht also die Empfindungskreise grösser und von dem Augenblicke an, wo die zwei Eindrücke deutlich von einander geschieden werden, wachsen die geschätzten Entfernungen langsamer, als die gemessenen. So kommt es, dass man bei diesem letzteren Verfahren für dieselben Entfernungen beträchtlich geringere Werthe erhält, als bei dem vorangegangenen.«

Bei diesen Versuchen sähe man gar nicht ein, wie eine abgeänderte Empfindlichkeit als Grund der Hebung in Betracht kommen sollte.

In diesen und unzähligen anderen Fällen kann also die Hebung der Eindrücke wesentlich nur von einem Vergleichsurtheile in dem S. 78 angegebenen Sinne abhängig gemacht werden, und vielleicht ist man geneigt, die Hebung überall blos davon abzuleiten, und die Ableitung von einer durch die Nachbarschaft verschiedener Eindrücke modificirten Empfindlichkeit als eine müssige Hypothese anzusehen. Inzwischen dürfte sich aus dem Folgenden ergeben, dass die Hebung jedenfalls wesentlich mit, bei manchen Versuchsformen möglicherweise allein, auf Rechnung dieses zweiten Grundes zu schreiben ist.

Man muss in der That in dieser Hinsicht zwei Versuchsformen unterscheiden. Wenn ich den Abends gesehenen Mondschein mit dem Tages gesehenen weissen Papier in der Erinnerung vergleiche, so beurtheile ich beider Verhältniss nach dem Verhältnisse, was sie zu den ihnen gleichzeitigen Lichteinflüssen hatten, und der Mondschein scheint mir das Papier an Helligkeit zu überwiegen, weil er die gleichzeitigen Lichteindrücke der Umgebung stark überwiegt, indess das weisse Papier solche nur wenig überwiegt. Ueberhaupt, wenn ich einmal zwei contrastirende Eindrücke A, B, das andremal zu einer anderen Zeit zwei andere a, b habe, so werde ich jenesfalls die Stärke von A nach dem Verhältniss zu B und diesesfalls die von a nach dem Verhältniss zu b beurtheilen, wenn B und b die im Durchschnitt zu den betreffenden Zeiten statt findenden Eindrücke

Digitized by Google

sind, und wenn ich dann *a* mit *A* in der Erinnerung vergleiche, so wird mir *a* eben so stark als *A* oder stärker erscheinen können, ungeachtet es vielleicht absolut schwächer ist, wofern es nur ein stärkeres Verhältniss zu *b* hatte, als *A* zu *B*. Hierauf lässt sich der Erfolg der bisher betrachteten Fälle zurückführen. Anders aber, wenn wir einen Eindruck, z. B. Weiss, continuirlich im Auge halten, indess wir nachbarlich Weiss und Schwarz wechseln lassen und beobachten, was das erste Weiss gewinnt oder verliert. Dann werden wir uns, wenn die sinnliche Stärke des im Auge gehaltenen Weiss sich nicht durch Aenderung des Reizes oder der Empfindlichkeit ändert, auch der Uebereinstimmung desselben mit sich selbst bewusst bleiben können; trotz der sich zum Vergleich darbietenden neuen Nachbarschaft; entsprechend, wenn wir Schwarz constant im Auge halten, und Schwarz und Weiss nachbarlich wechseln lassen. Nun will ich zwar nicht behaupten, dass nicht auch bei dieser Versuchsform das Vergleichsurtheil Antheil an den beobachteten Hebungsphänomenen habe, da ich eine reine Entscheidung in dieser Hinsicht nicht zu fällen weiss; aber jedenfalls lehrt die Weise, wie diese Phänomene eintreten, dass sie nicht allein davon abhängen können, und lässt es selbst noch fraglich ob sie wesentlich mit davon abhängen.

Sollte nämlich auch bei dieser Versuchsform der Erfolg allein vom Vergleichsurtheil im angegebenen Sinne abhängen, so müsste die wechselseitige Hebung dabei Weiss und Schwarz in gleichem Verhältnisse betreffen, das Weiss eben so viel durch Nachbarschaft des Schwarz an scheinbarer Helligkeit gewinnen, als das Schwarz durch Nachbarschaft des Weiss an Tiefe zunehmen, gegen den Fall, dass beide ihr Gleiches neben sich behalten. Aber der Erfolg ist nach den Thatsachen des folgenden Abschnittes sehr unsymmetrisch für das Weiss und Schwarz, und zwar nimmt in den meisten Fällen, wenn schon nicht ausnahmslos, das constant im Auge gehaltene Schwarz durch Vertauschung des nachbarlichen Schwarz mit Weiss mehr an Schwärze zu, als das constant im Auge gehaltene Weiss durch Vertauschung des nachbarlichen Weiss mit Schwarz an Weisse gewinnt, oder es scheint erstenfalls die Hebung (auf dem Schwarz) deutlich, wenn sie zweitenfalls (auf dem Weiss) zweideutig oder gar durch die unten zu betrachtenden Gegenwirkungen überwogen erscheint.

Ferner: die Hebung durch den Contrast ist in der Nähe des

Digitized by Google

Contrastrandes zu beiden Seiten desselben am stärksten und nimmt von da ab, daher vom Contrast abhängige Randscheine, deren Verhältnisse weiterhin näher betrachtet werden. Sollte nun die Hebung blos vom Vergleichsurtheile abhängen, so müsste man erwarten, dass auch diese Randscheine zu beiden Seiten der Contrastgränze von Schwarz und Weiss symmetrisch wären, was ebensowenig der Fall ist; sie sind im Allgemeinen deutlicher und ausgedehnter auf dem Schwarz als Weiss, und überhaupt deutlicher und ausgedehnter auf der dunkeln als hellen Contrastcomponente, auf der ich in der Regel überhaupt nichts von einem ausgedehnten Randscheine wahrnehme. Der stärkste Contrast müsste ferner die deutlichsten Randscheine geben; aber Grau an Weiss oder Dunkelgrau an Hellgrau gibt unerwarteterweise einen deutlicheren Randschein als Schwarz an Weiss oder Hellgrau.

Endlich sollte man erwarten, wenn die hebende Wirkung bei der angezeigten Versuchsform Sache eines Vergleichsurtheiles wäre, dass die hebende Wirkung sich bei allen Personen in entsprechender oder doch ähnlicher Weise wiederfinden müsste. Hingegen bin ich erstaunt gewesen, zu finden, dass manche Personen unter denselben Umständen, wo ich und Andere die auffälligsten Phänomene der Hebung beobachteten, nichts Deutliches wahrnehmen konnten.

Alle diese Verhältnisse aber sind leicht im Allgemeinen verständlich, wenn man hier ein Spiel der Empfindlichkeit oder des inneren Lichtwechsels im Sinne der Erörterung S. 78 f. sehen will, wenn schon die Deutung der Erfolge im Einzelnen noch Schwierigkeiten machen kann. Setzen wir, dem Weiss wachse eben so viel inneres Licht zu, wenn nachbarliches Weiss mit Schwarz vertauscht wird, als dem Schwarz entzogen wird, wenn nachbarliches Schwarz mit Weiss vertauscht wird, oder das, was dem Schwarz einesfalls entzogen wird, gehe auf das Weiss andernfalls über, was nur ein anderer Ausdruck dafür ist, dass die Empfindlichkeit für das eine um eben so viel zunehme, als für das andere abnehme, so wird diese Aenderung doch auf dem Schwarz spürbarer sein müssen als auf dem Weiss, weil nach einem bekannten Gesetze ein positiver oder negativer Lichtzuwachs nach Verhältniss weniger gespürt wird, als die Intensität, der er zuwächst, grösser ist. So wäre die Dissymmetrie zu Gunsten der Hebung auf dem Schwarz erklärt. Freilich sollte man nach

6*

Digitized by Google

dem ausserordentlich grossen Unterschiede in der Intensität von Weiss und Schwarz hiernach einen noch viel stärkeren und ausnahmsloseren Unterschied der Hebung zu Gunsten des Schwarz erwarten, als doch wirklich statt findet. Denn wenn schon ich denselben nach den im nächsten Abschnitt folgenden Thatsachen im Ganzen für entschieden halte, scheint er doch mir selbst und manchen Andern nur mässig; einige konnten überhaupt keinen solchen finden; und ausnahmsweise fanden einige sogar den Vortheil der Hebung für das Weiss. Wahrscheinlich aber muss noch ein zweiter Umstand in Rechnung gezogen werden. Das Schwarz im geschlossenen Auge kann sich nicht unter eine gewisse Gränze vertiefen, und das innere Licht ist also, normalerweise wenigstens, überhaupt nur bis zu einer gewissen Gränze verminderbar. Nun ist zwar nach unten folgenden Thatsachen alles Schwarz, womit wir bei den Contrastversuchen operiren, von dieser Gränze noch ziemlich entfernt, noch der Verminderung wie der Vermehrung fähig, aber selbstverständlich nur einer geringeren Verminderung fähig, als das Weiss; indess die Vermehrbarkeit für beide gleich unbestimmt ist. Hiemit könnte wohl zusammenhängen, dass das lichtstärkere Weiss bei Vertauschung des nebenbefindlichen Weiss mit Schwarz auch absolut genommen stärkere Veränderungen der Lichtstärke in Plus erfährt, als das Schwarz bei Vertauschung des nebenbefindlichen Schwarz mit Weiss in Minus, und dass hierdurch der obbemerkte Nachtheil für das Weiss, dass die Aenderung eine grössere Intensität betrifft, zum Theil compensirt, ausnahmslos sogar übercompensirt würde. Die Voraussetzung, dass man das, was die eine Componente an innerem Lichte verliert, auf die andere übertragen denken könnte, wäre hienach natürlich nicht mehr statthaft, ist aber auch keine nothwendige und würde mit folgender zu vertauschen sein: je weiter sich eine Lichtintensität von der unteren Gränze entfernt, unter die sie für das Auge wegen des darin zurückbleibenden Augenschwarz nicht herabgehen kann, desto mehr beträgt bei demselben Wechsel der Nachbarintensitäten die absolute, desto weniger in den meisten Fällen die relative Aenderung der eigenen Intensität. Doch besteht kein festes Verhältniss in dieser Hinsicht; vielmehr ist dasselbe variabel nach Umständen und Individualität. Ich gebe diesen Satz zwar nur als einen hypothetischen, ohne welchen ich aber die allgemeine Richtung und Variabilität der Erfolge nicht wohl zu deuten wüsste.

Digitized by Google

Die Verhältnisse der Randscheine stimmen ganz gut hiemit. Wenn Grau an Weiss gränzt, sollte der Contrastrandschein auf der dunklen Componente aus doppeltem Grunde minder deutlich sein, als wenn Schwarz an Weiss gränzt; einmal, weil der Contrast bei Grau geringer ist, zweitens, weil die Aenderung des Grau eine grössere Intensität betrifft. Ist er nun doch deutlicher auf dem Grau als Schwarz, so scheint mir diess nur darauf beruhen zu können, dass die absolute Aenderung auf dem Grau doch so viel grösser als auf dem Schwarz ist, um das Uebergewicht der Deutlichkeit zu bewirken.

Davon, dass aber doch das schwärzeste Schwarz, was wir äusserlich zu erzeugen vermögen, noch erheblich Licht zurückwirft, welches ein entsprechendes Quantum inneres Licht im Sehorgan hervorrufen muss, kann man sich auf verschiedene Weise überzeugen; und da es nöthig ist, hierauf zu fussen, wenn man die Vertiefung des Schwarz beim Hebungsphänomen durch eine Verminderbarkeit dieses inneren Lichtes bis zu gewissen Gränzen erklärt, so führe ich einige belegende Thatsachen dazu an.

Neues glanzloses Russpapier erscheint tief schwarz, wenn man aber durch einen mit der schwarzen Seite nach Innen zusammengerollten Bogen solchen Papieres mit einem Auge unter Schluss des anderen nach einem weissen Grunde unter gewöhnlicher Tagesbeleuchtung hindurchsieht, sieht man den deutlichsten Lichtschimmer an der Röhrenwand, welcher von dem Augenende nach dem vorderen Ende an Helligkeit zunimmt, und nur ganz in der Nähe des Auges reines Schwarz. Auch braucht man nur denselben Bogen Russpapier, der bei senkrechtem Daraufsehen tiefschwarz und ganz glanzlos erscheint, unzusammengerollt unter sehr grosser Schiefe zu betrachten, um den Lichtschimmer darauf zu erkennen; und begreiflich tritt eine solche schiefe Betrachtung von selbst bei dem Versuche mit der Röhre ein.

Bei diesen Versuchen kommt durch die Schiefe eine Art spiegelnder Reflexion zur Geltung; aber auch bei senkrechtem Daraufsehen wirft das schwarze Russpapier erheblich Licht zurück.

Man nehme vor jedes beider Augen eine Röhre aus einem so vielfach zusammengerollten weissen Papierbogen, dass das Licht nur noch ganz wenig durchscheint, und sehe bei gewöhn-

Digitized by Google

lichem Tageslichte durch dieselben nach einem schwarzen Russgrunde, indem man die eine Röhre ganz auf den Grund aufsetzt, so dass alles Licht von dem durch die Röhrenmündung gefassten Theile des Grundes ausgeschlossen wird, ausser dem wenigen, was durch die Röhrenwand durchscheint; indess man die andere etwas erhoben über den Grund hält, so dass das Tageslicht freien Zutritt dazu behält. Durch erstere sieht man dann einen tief schwarzen, durch letztere einen im Verhältniss dazu sehr lichten Fleck, was nicht der Fall sein könnte, wenn das Schwarz des letzteren nicht von dem auffallenden Lichte erheblich viel zurückwürfe.

Wenn man anstatt zweier noch ein wenig durchscheinender Röhren aus weissem Papier zwei solche aus schwarzem Papier mit der schwarzen Seite nach Innen zu demselben Versuche anwendet, so sieht man blos den verhältnissmässig lichten Fleck unter der erhobenen Röhre, hingegen durch die auf den Grund aufgesetzte Röhre gar nichts; es ist so gut, als hätte man diess Auge geschlossen, indem jetzt für dieses Auge kein Unterschied mehr zwischen dem Schwarz des Grundes in der Röhrenmündung und der schwarzen Umgebung besteht; wogegen bei Anwendung der ein wenig durchscheinenden Röhren das Schwarz des Grundes in der Röhrenmündung sich gegen die vom durchscheinenden Lichte etwas erhellte Röhrenwand absetzt. Diess kann aber keinen Contrastvortheil gegen die andere Röhre begründen, wo derselbe Gegensatz besteht; und eben so wenig können die, für beide Röhren gleichen Verhältnisse binocularer Deckung*) die tiefere Schwärze des Fleckes in der aufgesetzten Röhre verursachen.

Auch mittelst zwei vor beide Augen genommenen inwendig schwarzen Röhren kann man übrigens die erhebliche Lichtreflexion des Schwarz constatiren, wenn man beim Hindurchsehen nach dem schwarzen Grunde beide Röhren gleich über den schwarzen Grund erhebt, und dessen Helligkeit unter der Röhrenmündung mit der tiefen Nacht in der Röhre vergleicht, welche man am Augenende derselben wahrnimmt.

Auch das Schwarz des schwarzen Gesichtsfeldes selbst kann sich bis zu gewissen Gränzen vertiefen und erhellen, indem das Nachbild eines weissen Objectes auf schwarzem Grunde im ge-

---

*) Hierüber vergleiche meine Abhandlung über das binoculare Sehen.

Digitized by Google

schlossenen Auge ein vertieft schwarzes Bild in einem dagegen hellern Augengrunde hinterlässt, wenn schon diese Vertiefung ihre Gränze hat.

Man kann sich das Spiel der Empfindlichkeit bei der Hebung durch den Contrast erläutern, indem man sich vorstellt, der Reiz des Lichtes wirke wie ein Blasenpflaster auf die Stellen der Netzhaut, die er in Anspruch nimmt, er leite die Thätigkeit, auf der die Empfindung beruht, von den benachbarten Stellen ab, oder, was dasselbe sagt, erniedrige die Reizbarkeit der Nachbarstellen gegen das Licht. So tritt das Phänomen der Hebung unter einen sonst geläufigen Gesichtspunct. Auch kann man damit die Neigung einer Farbe in Beziehung setzen, neben sich, ja selbst, wie ich in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen gezeigt habe, auf der andern Netzhaut die Complementärfarbe zu erzeugen, durch Erniedrigung der Empfindlichkeit oder Reizbarkeit für die Gleichfarbe in dem weissen Lichte.

In der That finden bei Farben sehr entsprechende Verhältnisse statt, als bei Hell und Dunkel. Wenn man durch zwei Oeffnungen im Laden eines finstern Zimmers Licht einfallen lässt, die eine mit einem Farbenglase bedeckt, die andere frei lässt, und nun mittelst derselben einen Doppelschatten von irgend einem Gegenstande auf eine weisse Tafel wirft, so erscheint der von der farbigen Oeffnung erleuchtete Schatten in der Farbe des Glases, der von der tageshellen erleuchtete in der Complementärfarbe. Aber weder wenn man die tageshelle Oeffnung zu gross noch wenn man sie zu klein macht, erscheint die Complementärfarbe am deutlichsten; sondern wenn man sie so gross macht, dass beide Schatten ungefähr gleich hell erscheinen. Ist die tageshelle Oeffnung zu gross, so wird die Complementärfarbe des von dieser Oeffnung erleuchteten Schattens mit zu viel weissem Lichte verdünnt; ist die tageshelle Oeffnung zu klein, so ist nicht genug weisses Licht vorhanden, an dem sich das Spiel der Empfindlichkeit geltend machen könnte, um noch eine deutliche Farbenerscheinung zu geben*), indem auch hier die Deutlichkeit der Farbenerscheinung einerseits um so mehr abnimmt, je grösser die Intensität des Weiss im Verhältniss zur Intensität der sich beimischenden Farbe ist, gerade so, als wenn diese vom inneren

*) Vgl. meine Beobachtungen hierüber in Pogg. Ann. L. 436.

Digitized by Google

Licht abhängige Farbe durch einen objectiven Farbenreiz direct hervorgerufen wäre, anderseits die Intensität dieser sich zumischenden Farbe um so geringer ist, eine je geringere Intensität des Weiss sie betrifft, was sich aber nicht für die Erscheinung der Färbung allgemein compensirt, sondern ein Maximum der Deutlichkeit der Erscheinung bei einem gewissen Verhältnisse der Helligkeit beider Schatten gibt.

Man könnte es für möglich halten, dass, indess im weissen Nachbarlichte einer Farbe die Empfindlichkeit für die Gleichfarbe herabgestimmt ist, sie in entsprechendem Verhältnisse für die Complementärfarbe erhöht wird, so dass beides gemeinsam zur Erscheinung der Complementärfarbe wirken könnte, wo dann die Entstehung der Complementärfarbe von keiner Veränderung der Helligkeit begleitet wäre. Bei einigen beiläufigen Versuchen (Pogg. L. 437) fand ich in der That, dass »wenn ich durch die tageshelle und die farbige Oeffnung des finstern Zimmers einen subjectiven und einen objectiven Schatten neben einander erzeugt hatte, und mich so weit von ihm entfernte, dass ich kleine Schrift innerhalb des erstern eben noch lesen oder einander nahe Puncte darin eben noch unterscheiden konnte, die Entfernung für diese Gränze noch dieselbe blieb, wenn ich nun die mit dem Farbenglase bedeckte Oeffnung verschloss, so dass die complementäre Färbung des Schattens aufhörte,« woraus ich schloss, »dass die objective Wirkung des Lichtes, das einen Schatten beleuchtet, dieselbe bleibt, mag er ungefärbt oder durch Gegenwart einer Nachbarfarbe gefärbt erscheinen.«

Inzwischen lässt dieser Versuch keine grosse Genauigkeit zu; und ich finde neuerdings, dass die directe Beobachtung der Helligkeit ein viel entschiedeneres und vom vorigen abweichendes Resultat gibt.

Eine quadratische Oeffnung des finstern Zimmers von 6 Zoll Seite ward mit einem Farbenglase bedeckt; eine andere tageshelle so weit offen gelassen, dass durch eine schattengebende Fläche ein subjectiv gefärbter quadratischer Schatten von etwas mehr als 6 Zoll Seite neben einem objectiv gefärbten entstand. Je nach dem ich die farbige Oeffnung verdeckte oder frei liess, erhellte sich der subjective Schatten deutlich unter Verschwinden oder verdunkelte sich unter Annahme der subjectiven Färbung*). Inzwischen kann man eben so gut umgekehrt den subjectiv gefärbten Schatten bei Verschwinden der Färbung sich erhellen, und bei Annahme derselben sich verdunkeln sehen; ersteres, wenn man das Farbeglas ganz entfernt, so dass durch die vorher davon bedeckte Oeffnung weisses Licht, wie durch die andere einfällt, letzteres, wenn man das Farbeglas wieder vorsetzt.

---

*) Dabei trat nicht nur eine complementäre Nachfarbe des objectiven Schattens, sondern auch, wenn der Eindruck intensiv gewesen war, des subjectiven Schattens ein, d. h. bei Verdeckung der farbigen Oeffnung nahm der subjective Schatten momentan und schwach die Farbe des verdeckten Glases an.

Digitized by Google

Offenbar hängen diese Erfolge unabhängig von aller Farbe einfach davon ab, dass bei Verschluss der farbigen Oeffnung das ganze Zimmer mit Ausnahme des subjectiven Schattens dunkler wird, dieser also durch Hebung wegen der relativen Helligkeit heller erscheint, umgekehrt bei Wegnahme des Farbeglases das ganze Zimmer mit Ausnahme des subjectiven Schattens heller wird, also der Schatten durch Hebung desshalb dunkler erscheint. Ueber die obige Frage selbst wird dadurch nichts entschieden; indess schien es nützlich, diese Versuche hier anzuführen, um falschen Folgerungen aus jenem früheren nicht hinreichend genauen zu begegnen.

Auch erhält man ganz entsprechende Erfolge, wenn man zwei gleich dunkle Schatten durch zwei Oeffnungen im Laden des finstern Zimmers ohne Zuziehung des Farbeglases erzeugt. Wenn man die eine Oeffnung verschliesst, verschwindet der, von der andern Oeffnung her beleuchtete Schatten, indem sich die Stelle, worauf er fiel, höchst auffällig zu erhellen scheint, während sich zugleich die Umgebung der Schatten verdunkelt.

Ein analoger Gesichtspunct, als der die Farbenphänomene mit den Phänomenen von Hell und Dunkel beim Contrast verknüpft, verknüpft auch die successiven mit den simultanen Contrastphänomenen.

Wenn das Auge durch Licht ermüdet ist, so sieht es nachher (nachdem die Nachdauer des Lichtes erloschen ist) vermöge abgestumpfter Empfindlichkeit dunkler, und wenn es im Dunkel ausgeruht ist, so sieht es nachher heller, was man nicht schöner nachweisen kann, als wenn man eine Zeit lang mit einem Auge bei Schluss des andern in den hellen Himmel sieht (besser einen bedeckten als blauen, um nicht Nachfarben in das Spiel zu bringen), dann mit beiden offnen Augen das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde erzeugt, wo das Bild im offen gebliebenen Auge ganz grau gegen das andere lichtweisse im ausgeruhten Auge erscheint; Versuche, die ich in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen S. 413 näher beschrieben habe.

Nun hat man blos anzunehmen, dass das Neben und Nach eines weissen Eindrucks insofern sich gleich stehen, als der weisse Eindruck dem Neben lebendige Kraft physiologischer Thätigkeit entzieht, für das Nach solche erschöpft, so hat man für die entsprechenden Erscheinungen im Neben und Nach den entsprechenden Grund. Helligkeit stumpft ab gegen die Helligkeit, die neben und die nach ihm ist, Dunkel steigert die Empfindlichkeit für die Helligkeit, die neben ihm und die nach ihm ist.

Digitized by Google

Nicht unwahrscheinlich hängt mit den besprochenen Verhältnissen der Hebung eine bis jetzt nur gelegentlich bemerkte Thatsache zusammen, die wohl verdiente, genauer untersucht zu werden, da sie messende Bestimmungen gestattet.

Arago*) bemerkt in seiner zweiten Abhandlung über Photometrie bei Beschreibung seines Photometers**), dass die Beurtheilung der photometrischen Gleichheit zweier Helligkeiten (in Form schmaler Spalten oder Schatten) sichrer sei, wenn sie in einem lichten, als wenn sie in einem schwarzen Grunde beobachtet werden***). Hankel hat diess bei der photometrischen Messung der grauen Gläser, von denen ich in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen gesprochen, bestätigt gefunden.

Nun scheint mir nicht, dass der Grund, den Arago hiefür angibt, dass das Auge erstenfalls mehr ermüdet werde, triftig sein könne, da man doch von dem helleren Grunde eine stärkere Ermüdung als von dem dunkleren erwarten müsste. Man bemerke aber, dass beide zu vergleichende Spalten oder Schatten, auf photometrische Gleichheit gebracht, in dem helleren Grunde durch die Hebung an Helligkeit verlieren, in dem dunkleren daran gewinnen müssen, und dass hienach ein zwischen ihnen eintretender kleiner Unterschied erstenfalls leichter spürbar sein muss, als zweitenfalls, sofern er erstenfalls geringere

---

*) Arago's Werke, herausgegeben von Hankel. Th. X. S. 164.

**) Ein vor ein Fenster gesetzter weisser Papierschirm, durch den das Licht durchscheint, davor eine Glasplatte in einer verticalen auf den Papierschirm senkrechten Ebene, davor ein horizontales, nach Rechts und Links drehbares, Rohr, durch das man hindurchsieht; die photometrisch zu vergleichenden Spalten und Schatten vor dem weissen Schirme rechts und links von der Glasplatte angebracht, und das Rohr, durch das man sieht, so lange nach der einen oder anderen Seite gedreht, bis das durch Transmission durch die Glasplatte durch gesehene Bild mit dem durch Reflexion davon gesehenen gleich hell erscheint.

***) „Wir haben, sagt er, bemerkt, dass die Beobachtung der hellen Spalten im reflectirten und durchgelassenen Lichte, wenn das übrige Auge sich in völliger Dunkelheit befindet, ermüdet, und eine etwas geringere Sicherheit gewährt, als das Verfahren, das wir gewöhnlich angewandt haben und jetzt näher angeben wollen." Diess Verfahren besteht in Substitution der von zwei schwarzen Nadeln geworfenen Schatten, deren einer blos vom reflectirten, der andere vom durchgelassenen Lichte des weissen Schirmes umgeben ist, für die zwei in schwarzen Platten befindlichen Spalten, deren eine ebenfalls blos vom reflectirten, die andere vom durchgelassenen Lichte erhellt ist, die aber von Schwarz umgeben sind.

Digitized by Google

absolute Intensitäten betrifft; es wäre denn, was sich a priori nicht entscheiden lässt, aber durch den Erfolg dieser Versuche selbst widerlegt zu werden scheint, dass mit Eintritt des Helligkeitsunterschiedes beider Spalten oder Schatten auch die Hebung beide in entsprechend ungleicher Weise beträfe, so dass dadurch jener die Unterscheidung fördernde Einfluss compensirt würde. Uebrigens kann dieser Einfluss bei Arago's und Hankel's photometrischem Verfahren um so eher geltend gemacht werden, als es sich dabei nur um schmale Spalten oder Schatten handelt; die Hebung durch den Contrast aber in der Nähe des Contrastrandes am stärksten ist, wie aus der Thatsache der unten zu betrachtenden Randscheine hervorgeht, also sich auch auf schmale Flächen stark in der ganzen Ausdehnung äussern muss.

Indessen bleibt doch bis auf weitere Versuche diese Erklärung problematisch.

Bei den Versuchen über die Hebung der Eindrücke durch den Contrast, wo die Hebung wesentlich auf Abänderung der Empfindlichkeit beruht, ist es wichtig, einige Complicationen zu berücksichtigen, welche im Grunde nie dabei fehlen und stets der Hebung entgegenwirken, ja unter Umständen dieselbe überbieten können, aus denen inzwischen die Unsymmetrie der Erfolge auf Schwarz oder Weiss nicht ableitbar ist.

Der Kürze halber nenne ich alle Erscheinungen und Wirkungen, welche wider den Sinn der gewöhnlichen hebenden Contrastwirkung laufen, also vielmehr eine Schwächung als Verstärkung des Gegensatzes der contrastirenden Eindrücke, vielmehr die Gleichfarbe als Complementärfarbe in der Nachbarschaft einer Farbe begünstigen oder erscheinen lassen, verkehrte oder umgekehrte, und die gewöhnlichen im Gegensatz dagegen directe.

Helmholtz hat in seiner Abhandlung gegen Brewster (Pogg. LXXXVI. 501.) darauf hingewiesen, dass, wenn sehr helles Licht irgend einer Art auf eine Stelle der Netzhaut trifft, Licht gleicher Art als ein schwächerer Lichtnebel über einen grossen Theil des Gesichtsfeldes verbreitet erscheint, abhängig von Lichtzerstreuung im Auge, wahrscheinlich nach Helmholtz veranlasst durch Beugung des Lichtes an den Rändern der Pupille, durch die nicht absolute Reinheit der durchsichtigen Medien des Auges und durch Reflexion von der Hornhaut (wie der

Digitized by Google

Augenspiegel des Verfassers lehrt), wodurch die nicht unbeträchtliche Menge des von der Netzhaut zurückkehrenden Lichtes theilweis wieder in den Hintergrund des Auges zurückgeworfen wird; wozu unstreitig noch zu fügen, dass auch direct von der erhellten Stelle der Netzhaut etwas Licht zerstreut nach den übrigen Stellen zurückgeworfen werden kann.

Als Versuche zum Belege führt Helmholtz u. a. an: man stelle des Abends ein Licht in der Nähe irgend eines grösseren schwarzen Feldes auf, z. B. neben einer Thür, die in ein dunkles Nebenzimmer geöffnet ist, und beobachte aufmerksam den Grad der Dunkelheit dieses Feldes, während man sich das Licht mit dem Finger abwechselnd verdeckt und frei lässt. Man wird leicht bemerken, dass, so oft die Lichtstrahlen frei in das Auge fallen, ein weisslicher Schein auf dem schwarzen Felde erscheint, welcher in der Nähe des Lichtes heller ist, sich aber schwächer auch in ziemlich entfernte Theile des Gesichtsfeldes erstreckt. Dasselbe beobachtet man auch, wenn Tageslicht, und in der auffälligsten Weise, wenn Sonnenlicht durch eine Oeffnung eines schwarzen Schirmes in das Auge gelangt. Bedeckt man die Oeffnung mit einem farbigen Glase, so hat der Lichtschein ebenfalls die Farbe des Glases.

Nun leuchtet ein, dass, wenn ich neben Schwarz befindliches Schwarz mit Weiss vertausche, von diesem Weiss aus sich Licht mit über das erste Schwarz zerstreuen muss, dessen Schwärze sich durch die hebende Wirkung des Weiss vertiefen sollte, und dass hiedurch die Hebung mehr oder weniger compensirt werden muss. Aehnlich, wenn ich die Hebung auf dem Weiss beobachten will. Indem ich das daneben befindliche Weiss mit Schwarz vertausche, fällt das zerstreute Licht weg, was sich über das erste Weiss vom Nachbarweiss aus mit verbreitete, und die dadurch entstehende Verdunkelung wirkt der Erhellung entgegen, welche die hebende Nachbarschaft des Schwarz mitführen sollte. Ich will diese Ursache verkehrter Contrastwirkung kurz die Diffusion nennen.

Wahrscheinlich ist die Diffusion in verschiedenen Augen verschieden. Für mich macht sich der Einfluss derselben sehr bemerklich, wenn ich bei aneinander gränzendem weissem und schwarzem Grunde das Weiss durch einen nach der Contrastgränze hingeschobenen schwarzen Bogen bis auf einen schmalen weissen Saum zudecke, und den schwarzen Bogen wieder zurückziehe. Die von der Hebung abhängige Vertiefung des schwarzen Grundes an der Contrastgränze wächst durch das Herbeischieben des schwarzen Grundes, indess sich beim Zurückschieben ein weisslicher Schein von der Contrastgränze bis zu einer

Digitized by Google

gewissen Weite merklich über den schwarzen Grund ergiesst, ungeachtet ich erstenfalls die weisse Fläche, welche die hebende Wirkung auf das Schwarz äussert, verkleinere, letztenfalls vergrössere, und die Diffusion Seitens des unbedeckt bleibenden Streifens beidesfalls bestehen bleibt. Diess beweist zugleich, dass die hebende Contrastwirkung des Weiss auf das Schwarz sich bei mir rascher mit der Entfernung schwächt, als die Gegenwirkung der Diffusion.

Stelle ich den Versuch umgekehrt an, indem ich einen weissen Bogen über dem Schwarz des halb weissen halb schwarzen Grundes nach der Contrastgränze bis zur Zurücklassung eines schmalen schwarzen Saumes hinschiebe und zurückziehe, so kann ich keine deutliche Veränderung auf dem weissen Grunde in der Nähe der Contrastgränze bemerken, was sich nach dem S. 83 angegebenen Princip erklären lässt, indem danach eben so wie die hebende Wirkung auch die Diffusionswirkung weniger deutlich auf Weiss als Schwarz sein muss.

Eine Person mit sehr guten Augen fand keine Aenderung auf dem schwarzen Grunde bei Versuchen mit Herbeischieben und Wegziehen des schwarzen Bogens.

In unmittelbarer Nähe der Contrastgränze kann die hebende Contrastwirkung auch durch die, von optischen Abweichungen im Auge abhängige, Irradiation gestört werden. In dieser Hinsicht kann es gut sein, den Contrastrand statt mit freiem Auge durch ein Loch in einem Kartenblatte zu betrachten.

Die Diffusion und die Irradiation sind Nebenursachen, welche der Hebung durch den Contrast vom ersten Momente an entgegen wirken, ohne dass man Grund hat, anzunehmen, dass sie mit der Dauer wachsen. Eine dritte aber wächst mit der Dauer, und scheint sich überhaupt nur mit der Dauer zu entwickeln, steht aber in directerem Gegensatze gegen die Ursache der Hebung, indem sie in einer sich allmälig entwickelnden gegensätzlichen Umstimmung der Empfindlichkeit beruht.

Die Hebung beim Contrast von Weiss und Schwarz beruht darin, dass die Empfindlichkeit für das Weiss durch die Nachbarschaft des Schwarz gesteigert, für das Schwarz durch die Nachbarschaft des Weiss gemindert ist; aber allmälig ermüdet das Auge durch Anblick des Weiss und erholt sich durch Anblick des Schwarz, und dadurch nähern sich, dem Einflusse der Hebung entgegen, beide Eindrücke.

Digitized by Google

In der That findet man allgemein, dass die hebende Contrastwirkung sich durch ihre Dauer schwächt. Ein weisser Fleck auf schwarzem Grunde überzieht sich bei anhaltender Betrachtung mit einem sich immer mehr verdunkelnden, ein schwarzer auf weissem Grunde mit einem sich immer mehr lichtenden weisslichen Schleier; ein farbiger Fleck auf complementärem Grunde verliert bei anhaltender Betrachtung immer mehr an Lebhaftigkeit der Farbe*). Was dem Fleck begegnet, begegnet dem contrastirenden Grunde im entgegengesetzten Sinne, nur dass man die Veränderung leichter jedesmal in dem begränzten Fleck wahrnimmt. Hiedurch nähern sich nothwendig die contrastirenden Eindrücke.

Man könnte nun geneigt sein, das nähere Verhältniss hiebei so zu fassen: da das Schwarz nur eine geringere Lichtintensität als das Weiss hat, mithin im Grunde auch, nur weniger, ermüdend auf das Auge wirken muss, als das Weiss, so wird die scheinbar zunehmende Erhellung eines schwarzen Feldes auf weissem Grunde darauf beruhen, dass das Auge durch das Weiss stärker ermüdet wird, als durch das Schwarz, und mithin das Schwarz, obwohl es an sich auch vielmehr dunkler als heller wird, doch heller zu werden s c h e i n t, weil es relativ gegen das Weiss erhellt wird.

Hiegegen aber könnte man sich auch denken, dass das innere Licht auf aneinander gränzendem Weiss und Schwarz, nach Massgabe als es durch die Ermüdung auf dem Weiss abnimmt, zugleich auf dem benachbarten Schwarz wächst, und dadurch eine w i r k l i c h e Erhellung desselben bewirkt, oder, was dasselbe sagt, dass, wenn Schwarz und Weiss, oder allgemeiner Helligkeiten von verschiedener Intensität in Verbindung betrachtet werden, die Empfindlichkeit für die geringere Intensität allmälig bis zu gewissen Gränzen zunimmt, indess sie für die stärkere abnimmt, was aus dem allgemeinen Ausdruck der Erholung und Ermüdung freilich nicht zu folgern wäre, indess immer noch die Anwendung dieser Ausdrücke gestatten würde, wenn man nur eben dieselben im Sinne dieser factischen Verhältnisse verstände, wie denn überhaupt, wenn wir von Er-

---

*) Im Allgemeinen bleibt dabei ein schmaler Saum an der Gränze des Grundes, welcher an dieser Veränderung keinen Antheil nimmt, und vielleicht, was noch nicht hinreichend untersucht ist, mit Irradiation zusammenhängt.

Digitized by Google

holung und Ermüdung als Ursachen der in Rede stehenden Phänomene sprechen, diess blos kurze allgemeine Ausdrücke für die Umstimmung der Empfindlichkeit im Sinne der Richtung ihres Erfolges sind, ohne über Gesetze und Grund derselben etwas auszusprechen.

Vielleicht neigt man sich von vorn herein vielmehr der ersten als zweiten Auffassung zu; doch scheint mir die zweite vorgezogen werden zu müssen. Nach Beobachtungen an Schwarz und Weiss mag zwar hierüber schwer rein zu entscheiden sein; aber folgende Thatsache an Farben, welche mit den Erscheinungen von Schwarz und Weiss in Zusammenhang steht, lässt meines Erachtens nur eine Erklärung im Sinn der zweiten Auffassung zu.

Betrachtet man recht anhaltend ein Farbenfeld auf weissem Grunde in hellem Lichte, so tingirt sich endlich der Grund sogar mit der Gleichfarbe des Feldes, statt mit der Complementärfarbe, indess zugleich die Netzhaut für die direct gesehene Farbe mehr und mehr ermüdet, so dass, wenn man nach einiger Zeit der Betrachtung den Farbenfleck entfernt, ein complementäres Nachbild davon bleibt, indess die Gleichfarbe des Feldes auf dem Grunde fortbestehen bleibt; auch braucht man nur während der Betrachtung, nachdem sich die Gleichfarbe auf dem Grunde entwickelt hat, das Auge ein wenig zu verschieben, um mit dem Theile der Netzhaut, der vorher von Farbe getroffen wurde, jetzt von Weiss getroffen wird, sofort einen complementären Rand zu sehen.

Wenn ich nicht irre, habe ich selbst hierüber die ersten Beobachtungen (Pogg. L. p. 440) bekannt gemacht, ohne freilich die Thatsachen damals triftig deuten zu können, und Brücke (Pogg. LXXXIV. p. 425) hat nachmals unter anderen Formen Entsprechendes gefunden.

Hierzu einige Anführungen aus meiner früheren Abhandlung. «Betrachtet man ein farbiges Papier auf weissem Grunde in verbreitetem Tageslichte oder in directem Sonnenlichte, so wird man anfangs überhaupt keine deutliche, oder höchstens eine ganz schwache complementäre Färbung an dem weissen Grunde wahrnehmen. Nach einiger Zeit aber färbt sich der Grund entschieden mit derselben Farbe, welche das Papier hat, welche Färbung namentlich in directem Sonnenlichte so lebhaft werden kann, dass sie der (sich immer mehr abschwächenden) Farbe des Papiers selbst kaum nachsteht. Diese Färbung des Grundes verbreitet sich mit gleichförmiger Stärke über die ganze Ausdehnung desselben, und es scheint auf die Grösse des farbigen Feldes dabei wenig anzukommen, so dass,

Digitized by Google

wenn man ein farbiges Feld von bloss einigen Quadratlinien Grösse auf einem weissen Papierbogen von mehr als 1 Quadratfuss Grösse aus der deutlichen Sehweite betrachtet, nach einiger Zeit der ganze Papierbogen sich gleichförmig mit der Farbe des Feldes überzieht. Entfernt man das farbige Feld von dem weissen Grunde, nachdem sich derselbe mit der Farbe tingirt hat, so erscheint nun statt des ersten ein Feld mit der subjectiven Complementärfarbe, um welches die Farbe des Feldes fortbesteht, und jetzt durch den Contrast um so deutlicher erscheint.» Ich übergehe hier die mannichfachen Abänderungen dieses Versuchs, die ich noch angeführt habe; indem ich nur bemerke, dass man die Erscheinung ebenso an einem weissen Felde auf farbigem Grunde wahrnehmen kann; es tingirt sich (bis auf einen schmalen Saum) bei anhaltender Betrachtung in hellem Lichte mit der Farbe des Grundes.

Unstreitig kann bei diesen Versuchen die mit der Dauer der Ermüdung zunehmende Annäherung der contrastirenden Eindrücke nicht im Sinne der ersten Auffassung erklärt werden; vielmehr scheinen mir solche Annäherungen nur durch folgendes Princip erklärbar, welches in die zweite Auffassung hineintritt, und mit dem Princip der Hebung in Conflict kommt.

Während nach diesem die durch einen Reiz erhöhte Thätigkeit eines Organes oder Organtheiles nur auf Kosten der durch den Reiz überhaupt nicht geschaffenen, sondern nur anders vertheilten lebendigen Kraft der Thätigkeit oder Erregung anderer Organe oder Organtheile zu Stande kommen kann, vorzugsweise solcher, die im directesten organischen Nexus mit dem direct gereizten Theile stehen, kann von anderer Seite nach einem anderen Princip die Thätigkeit der in organischem Nexus stehenden Theile nur in einem gewissen Zusammenhange erfolgen, wonach leicht eine Ueberpflanzung der Thätigkeit oder Erregung von einem direct gereizten Theile auf die mit ihm in Nexus stehenden stattfinden kann.

So kann die Entzündung, die ein Blasenpflaster hervorruft, ableitend auf nahe liegende Theile wirken, es kann sich aber auch eine Entzündung auf nahe liegende Theile verbreiten. Es kann das Ergriffensein gewisser Theile von Krämpfen den Torpor anderer mitführen; es können sich aber auch Krämpfe von einem Theile auf Nachbartheile überpflanzen, solche gemeinsam mit fassen, oder umgekehrt die Ruhe sich von gewissen Theilen auf andere mit verbreiten. Und so kann auch nach Umständen die Erregung einer begränzten Stelle der Netzhaut die Nachbarstellen antagonistisch in der Erregbarkeit für dieselbe Thätigkeit herabstimmen oder sympathisch sich auf solche überpflan-

Digitized by Google

zen; und es ist kein Hinderniss sich zu denken, dass die letztere Wirkung im Verhältniss zur ersten mit der Dauer gesetzlich zunimmt.

Bei den successiven Contrastphänomenen haben wir einen entsprechenden Conflict als bei den simultanen, der sich aber der Zeitfolge nach in umgekehrtem Sinne entwickelt. Vermöge der Nachdauer der Eindrücke und der Zeit, welche ein Reiz braucht, seinen Eindruck in voller Stärke zu entwickeln, bleibt hinter dem Reize oder der Ruhe ein gleichartiger Zustand mehr oder weniger lange zurück, was hier das Analogon der verkehrten Contrastwirkung bildet, wonach sich erst die Hebung des nachfolgenden heterogenen Eindrucks durch den Contrast geltend machen kann.

Wenn Helmholtz in seiner Abhandlung gegen Brewster die Fälle, wo man in der Nachbarschaft einer Farbe die Gleichfarbe inducirt gesehen, schlechthin als Sache der Diffusion erklärt, so ist diess meines Erachtens dahin zu modificiren, dass die Diffusion dabei unstreitig überall mit im Spiele ist, und beiträgt, die verkehrte Contrastwirkung hervorzurufen. Aber es ist unmöglich, den Haupterfolg bei den von mir oben angeführten, durch Wiederholung auch Seitens meiner Zuhörer constatirten, Versuchen davon abzuleiten; weder die Allmäligkeit, mit der sich die inducirte Gleichfarbe entwickelt und steigert, noch die Gleichförmigkeit, mit der sie sich über den Grund verbreitet, noch die Kleinheit der erforderlichen Farbenfläche, von der sie ausgeht, noch die Fortdauer der Gleichfarbe nach Entfernung der Farbenfläche, würden damit erklärlich sein.

Um die von der Umstimmung der Empfindlichkeit abhängigen verkehrten Contrasterscheinungen von denen zu unterscheiden, welche von Diffusion abhängen, wird man hauptsächlich darauf zu achten haben, ob sie sich durch die Dauer steigern. Im Allgemeinen aber wird keine reine Scheidung beider möglich sein, weil keine solche in der Wirklichkeit stattfindet.

Nach Allem wird die Hebung der Eindrücke durch den Contrast oder die directe Contrastwirkung insofern immer als der Normalfall angesehen werden können, als die umgekehrte, wo sie überhaupt spürbar wird, erst durch allmälige Umstimmung der Empfindlichkeit oder durch Nebenwirkungen (Diffusion, Irradiation) erzeugt wird. Wo daher von Contrast-

Digitized by Google

wirkung schlechthin die Rede ist, wird auch stets die directe zu verstehen sein.

Uebrigens wäre wohl möglich, dass unter Umständen die Umstimmung der Empfindlichkeit so schnell einträte, um von Anfange herein die Richtung des Erfolges zu bestimmen.

Darin, dass die Hebung durch den Contrast sich je nach der Individualität in so verschiedener Deutlichkeit zeigt, stimmt sie ganz mit anderen, von einem Spiele der Empfindlichkeit abhängigen, subjectiven Phänomenen überein, was beitragen muss, sie mit denselben aus gleichem Gesichtspuncte betrachten zu lassen. Unstreitig zwar können Fälle vorkommen, wo der fehlende Erfolg der Hebung von einer sich vorzugsweise geltendmachenden compensirenden Wirkung der Diffusion, Irradiation, allmäligen Umstimmung abhängt; aber diess kann nicht überall der Grund sein, und ist wahrscheinlich selten der Grund; es muss auch angenommen werden, dass die hebende Wirkung an sich selbst bei verschiedenen Personen sehr verschieden ist. In der That sind bei mir jene drei Einflüsse, Diffusion, Irradiation, leichte Umstimmungsfähigkeit des Auges sehr entwickelt, doch finde ich die Hebung durch den Contrast unter den im folgenden Kapitel angegebenen einfachen Versuchsverhältnissen sehr entschieden, indess eine andere Person, die weder den weisslichen Schein am Contrastrande bei dem S. 92 angegebenen Versuche, noch die für mich sehr auffälligen Irradiationssäume wahrnimmt, noch endlich leicht subjective Farben sieht, mit einem Worte, die vortrefflichsten Augen hat, unter denselben Versuchsumständen (Versuch 1 u. 2) Nichts deutlich bemerken konnte; und ebenso habe ich andere Personen mit in jeder Hinsicht besseren Augen als die meinigen gefunden, welche die hebende Contrastwirkung weniger gut als ich wahrnahmen.

Ich halte es vielmehr für wahrscheinlich, dass die Stärke der hebenden Wirkung mit der Leichtigkeit der Ermüdung des Auges in einem gewissen Zusammenhange steht.

d) Directe und verkehrte Contrastphänomene.

Von den folgenden Versuchen sind die zuerst zu stellenden 1) und 2) sehr geeignet, die hebende Wirkung des Contrastes in augenfälliger Weise mit leichten Mitteln zu zeigen, wo nicht eine grosse Unempfänglichkeit für derartige Phänomene be-

Digitized by Google

steht, zugleich aber können sie, bei vergleichsweiser Anstellung mit verschiedenen Personen, dienen, die Verschiedenheit der Individualität in dieser Hinsicht zu constatiren, indess die vergleichsweise Anstellung von 2) und 3) die Dissymmetrie des Erfolges für Weiss und Schwarz bei den meisten Personen erkennen lässt, nicht minder aber auch grosse individuelle Unterschiede in dieser Hinsicht herausstellt. Will man die hebende Contrastwirkung in frappantester Weise darstellen, wo sie sich wohl Jedem mit objectiver Kraft aufdrängt, so hat man das unter 12) angegebene Verfahren einzuschlagen.

1) Man legt einen grauen Papierbogen (vom Grau No. 1, 2 oder 3), welcher der Grund heisse, vor sich, und überdeckt ihn auf jeder Seite mit einem weissen, halben oder Viertelbogen, so dass zwischen beiden weissen Bogen, den Seitenlagen, ein graues Feld, das Mittelfeld, von etwa 3 bis 4 Zoll Breite, ½ Fuss Länge, bleibt. Nun kommt man mit zwei schwarzen halben oder Viertelbogen, in jeder Hand einen, den Decken, seitlich herbei, deckt sie abwechselnd über die weissen Seitenlagen und hebt sie wieder davon ab, indem man zugleich das graue Mittelfeld fixirt. Es ist für mich, wenn das Weiss mit dem Schwarz überdeckt wird, genau so, als wenn jemand mit einem schwachen Lichte herbeikäme, das graue Mittelfeld zu beleuchten, und wenn das Schwarz entfernt wird, als wenn man eine Quelle der Beleuchtung des Grau entfernte. Wie leicht zu erachten, kommt es abgesehen von der jedesmaligen Richtung des Unterschiedes auf dasselbe heraus, die Seitenlagen schwarz zu nehmen und weisse Decken wechselnd aufzulegen und abzuheben.

2) Man wendet statt eines grauen Grundes einen schwarzen Grund mit weissen Seitenlagen und wechselnd auf- und abgehobenen schwarzen Decken an. Beim Ueberlegen der schwarzen Decken erhellt sich der schwarze Grund, bei Wegnahme vertieft sich für mich sein Schwarz in augenfälligster Weise. Letztenfalls wird das, für mich auf Schwarz stets sichtbare krankhafte Lichtflackern meines Auges sehr entschieden und in ganz ähnlicher Weise deutlicher, als wenn ich die Augen ganz schliesse, was mir nicht ohne Interesse scheint. Die Verdunkelung des Schwarz durch den Contrast erstreckt sich also nicht merklich auf diese subjective Erscheinung meiner kranken Augen, sondern

diese macht mir den Eindruck, als wenn sie in einer tiefern Nacht vor sich ginge.

3) Kehre ich den Versuch 2) in der Weise um, dass ich einen weissen Grund mit schwarzen Seitenlagen und weissen Decken anwende, so erhalte ich Verdunkelung des weissen Feldes bei der Ueberlage und Erhellung bei Wegnahme der weissen Seitendecken, welche Phänomene mir aber nicht so auffällig erscheinen, als die bei Versuch 2. Indem sich das Weiss bei Wegnahme der weissen Seitendecken erhellt, erscheint es mir zugleich reiner.

Nicht nur ich selbst, auch Ruete und Welcker haben den Erfolg bei den Versuchsweisen 1) und 2) sehr auffallend gefunden. Hingegen fand Volkmann den Erfolg bei beiden vergleichungsweise mit mir und Welcker angestellten Versuchen nur wenig auffällig, Kohlschütter und eine gelegentlich mit zugezogene Frau C, mit sehr gesunden Augen, erhielt sogar bei No. 1 schwach den verkehrten Erfolg, bei No. 2 Kohlschütter den directen Erfolg, Frau C nichts. Alle drei, Volkmann, Kohlschütter und Frau C haben Augen, welche schwer ermüden.

Den Vergleich von 2) und 3) anlangend, so erklärten nicht nur ich selbst, sondern auch Ruete und Kohlschütter (unabhängig von einander) den Erfolg bei 2) für augenfälliger als bei 3), und Kohlschütter konnte überhaupt bei 3) keinen deutlichen Erfolg wahrnehmen.

Um ein bestimmteres Urtheil fällen zu können, stellte ich den Versuch 2) und 3) mit eilf meiner Zuhörer vergleichsweise auf einmal an, wobei die Anordnungen des Versuches 2) und 3) ganz gleich nur in verkehrter Ordnung neben einander getroffen waren, und beide Versuche stets unmittelbar hinter einander von den betreffenden Personen angestellt wurden. Ueber die vorzugsweise zu erwartende Richtung des Erfolges war nichts vorhergesagt.

Von diesen 11 Personen erhielt 1 weder bei dem schwarzen Mittelfelde (Versuch 2) noch weissen Mittelfelde (Versuch 3) einen deutlichen Hebungserfolg, 1 erhielt auf dem weissen einen verkehrten, auf dem schwarzen deutlich den directen Erfolg, 2 erhielten bei dem schwarzen einen deutlichen, bei dem weissen keinen Erfolg, 4 erklärten den Erfolg entschieden für stärker auf dem Schwarz als Weiss, obwohl sie ihn auf beiden erkannten, 1 fand den Erfolg gleich deutlich auf Schwarz und Weiss,

Digitized by Google

und 2 erklärten den Erfolg, der eine ein wenig, der andere (von Zahn mit ungleich hell und farbig sehenden Augen) entschieden für deutlicher auf dem Weiss als Schwarz.

Da bei diesen Aussagen keine Theorie oder Vorausbestimmung des Urtheils eingewirkt hat, darf man wohl das Resultat derselben, wonach unter 10 Personen, die überhaupt einen Erfolg wahrnahmen, der directe Erfolg bei 7 deutlicher auf Schwarz als Weiss, nur bei 2 umgekehrt, bei 1 gleich war, für unzweideutig ansehen. Die grosse Verschiedenheit im Erfolge bei diesen verschiedenen Personen unter ganz gleichen Verhältnissen gibt zugleich einen überzeugenden Beleg für den grossen Einfluss, den die Individualität bei derartigen Phänomenen hat, und für die Nothwendigkeit, sich nicht blos mit eigenen Beobachtungen oder den Beobachtungen einzelner Individuen zu begnügen.

Wesentlich ist bei vorigen Versuchen, wenn man das directe Contrastphänomen beobachten will, das Mittelfeld nicht zu schmal zu nehmen. Gebe ich bei Versuch 2) dem Mittelfelde statt der Breite von ein paar Zoll blos die Breite von ein paar Linien, so nehme ich das umgekehrte Phänomen, d. i. bei Auflegen der schwarzen Decken Verdunkelung, bei Wegnahme Erhellung durch einen weisslichen Schein wahr; es werden sich aber wahrscheinlich in Bezug auf die Breite, wo diess eintritt, und andere Particularitäten der Erscheinung verschiedene Augen sehr verschieden verhalten. Bei mir selbst ist das verkehrte Contrastphänomen noch bei ½ par. Zoll Breite des Mittelfeldes ziemlich entschieden, und wird bei Fortsetzung des Versuches unter wiederholtem Auflegen und Abheben der Decken immer entschiedener. Dabei bleiben im Falle der Erhellung (bei Abheben der schwarzen Decken) tief schwarze Säume an den Gränzen des schwarzen Mittelfeldes, oder mit anderen Worten, das Mittelfeld erhellt sich nicht ganz bis zu seinen Rändern. Uebrigens wird der weissliche Schein des Mittelfeldes nicht nur bei Wiederholung des Auflegens und Abhebens der Decken, sondern auch bei anhaltender Betrachtung, wenn letztere entfernt bleiben, immer deutlicher.

Zu diesem verkehrten Contrastphänomen wirken Diffusion und Irradiation unstreitig vom Anfange herein zusammen und allmälige Umstimmung tritt noch hinzu.

Nehme ich bei Versuch 3) den weissen Zwischenraum zwischen den schwarzen Seitenlagen sehr schmal, so erhalte ich

Digitized by Google

doch kein verkehrtes Contrastphänomen, wie es bei Versuch 2) der Fall war, sondern das directe.

4) Die Dissymmetrie in der Stärke des Erfolges, welche sich bei den entgegengesetzten Versuchsanordnungen nach 2) und 3) zeigt, zeigt sich auch bei folgenden einfachen Versuchsweisen.

Wenn ich einen Bogen schwarzes Russpapier vor mich hinlege, diesen mit beiden Augen fixire, und dann von der Seite her einen Bogen weisses Papier darüber hinschiebe, so scheint die Tiefe des unverdeckten Theiles des Schwarz sichtlich zuzunehmen. Kehre ich jedoch den Versuch um, d. h. sehe nach einem weissen Bogen, indess ich einen schwarzen seitlich herbeischiebe, so kann ich keine deutliche Erhellung des weissen wahrnehmen.

Noch auffälliger als durch seitliches Herbeischieben eines weissen Bogens über den schwarzen Grund von einer Seite wird die Vertiefung des Schwarz durch Herbeischieben von zwei Seiten, indess die Umkehrung mit Herbeischieben von Schwarz über Weiss auch hiebei mir nur einen geringeren und manchmal zweideutigen Effect gibt.

Kohlschütter fand sowohl mit einseitigem als zweiseitigem Herbeischieben unter Anwendung des schwarzen Grundes das directe Hebungsphänomen wie ich, unter Anwendung des weissen das verkehrte.

5) Sehe ich nach einem weissen Grunde, sei es durch eine, aus einem halben Bogen weissen Briefpapieres einfach zusammengerollte, ganz licht durchscheinende oder durch eine schwarze Röhre, und schiebe einen schwarzen Bogen von der Seite her unter der Röhrenöffnung herbei, so dass das Weiss unter der Mündung halb zugedeckt wird, so kann ich beidesfalls keine deutliche Aenderung am übrigbleibenden Weiss bemerken; stelle ich aber denselben Versuch mit einem schwarzen Grunde und Herbeischieben von Weiss an, so erhalte ich bei Anwendung der schwarzen Röhre eine sehr starke Vertiefung des Schwarz, wenn der weisse Bogen herbeigeschoben wird, bei Anwendung der weissen durchscheinenden Röhre (deren innere Helligkeit zwischen Weiss und Schwarz steht, jedoch dem Weiss näher als dem Schwarz scheint) nur noch eine geringe.

Der Unterschied in der Anwendung der weissen und schwarzen Röhre bei schwarzem Grunde erklärt sich leicht daraus, dass bei Anwendung der weissen Röhre eine hebende Contrastwir-

Digitized by Google

kung auf das Schwarz unter der Röhrenmündung schon ohne Herbeischieben des Weiss statt gefunden hat, die nun blos noch einen Zuwachs durch das seitliche Herbeischieben des vollen Weiss erhält, während bei Anwendung der schwarzen Röhre die ganze volle Hebung durch das herbeigeschobene Weiss erst bewirkt wird. Auch bei Anwendung des weissen Grundes unter Anwendung der schwarzen Röhre muss die Hebung schon ohne Herbeischieben des Schwarz grösstentheils vollendet sein, aber unter Anwendung der weissen Röhre, welche in der inneren Helligkeit dem Weiss näher als dem Schwarz steht, hätte man eine stärker hebende Wirkung auf dem weissen als auf dem schwarzen Grunde bei Herbeischiebung des Gegentheiles zu erwarten, wenn nicht eine wirkliche Dissymmetrie der hebenden Wirkung für Weiss und Schwarz zu Gunsten des Schwarz statt fände.

Wo keine Röhre angewendet wird, wie bei den Versuchen 1) bis 3), darf man annehmen, dass die Umgebung der Contrastflächen sich im Ganzen mehr dem Weiss als Schwarz nähert, sofern der Himmel durch das Fenster über den Tisch hin (auf dem beobachtet wird, und dessen Helligkeit unbestimmt zwischen Weiss und Schwarz liegt), in das Auge scheint. Diess würde das Hebungsphänomen vielmehr auf dem Weiss als Schwarz begünstigen, indess der Erfolg das Gegentheil zeigt.

6) Lege ich zwei weisse Bogen über einem schwarzen Grunde so schief über einander, dass sie ein schwarzes V zwischen sich lassen, richte die inwendig geschwärzte Röhre vor einem Auge bei Schluss des andern darauf und führe sie vor der Spitze des V, wobei der weisse Grund von beiden Seiten mit gesehen wird, nach dem weiten Theile, wo blos Schwarz erscheint, so sehe ich die auffallendste Helligkeitszunahme. Und selbst ohne Röhre ist die Zunahme der Helligkeit von der Spitze des V nach dem weiteren Theile, nur minder auffällig, spürbar. Stelle ich diese Versuche umgekehrt mit schwarzen Bogen auf Weiss an, so sehe ich jetzt auch die Spitze des weissen V lichter, im Uebrigen aber keine entschiedene Helligkeitsverschiedenheit zwischen den Theilen des weissen V, wie sie sich bei dem schwarzen V zeigte.

Wende ich die weisse durchscheinende Röhre an, so finde ich mit schwarzem und weissem V dieselben Erfolge als mit der schwarzen Röhre, nur scheint mir auch hier der Erfolg bei dem schwarzen V etwas schwächer als mit der schwarzen Röhre.

Digitized by Google

7) Ein für den Zustand meiner Augen particuläres Verhältniss scheint mir doch Erwähnung zu verdienen.

Mein ganzes Gesichtsfeld findet sich bei Schluss der Augen mit einem lebhaft flackernden Lichtstaube erfüllt, so dass ich mir auf diese Weise den Eindruck eines tiefen Schwarz gar nicht zu verschaffen vermag; dagegen kann ich den Eindruck eines tiefen Schwarz durch den Contrast erhalten, wenn ich die Augen öffne und sie auf eine schwarze Fläche auf oder neben einer weissen richte, ungeachtet doch die schwarze Fläche noch einen guten Theil Licht in das Auge sendet, der bei Schluss des Auges wegfällt, was sich auch darin beweist, dass das Lichtflackern auf der schwarzen Fläche bei offenem Auge viel minder deutlich erscheint, als im geschlossenen Auge. Der Unterschied der Tiefe zwischen dem mit Licht melirten Augenschwarz bei Schluss des Auges und einem schwarzen Flecke auf weissem Grunde oder einer schwarzen Fläche neben einer weissen bei offenem Auge ist für mich sehr frappant und instructiv. Doch kann ich mir auch im geschlossenen Auge den Eindruck eines sehr tiefen Schwarz dadurch verschaffen, dass ich die Augen schliesse, nachdem ich Schwarz neben oder auf Weiss eine Zeit lang fixirt habe, indem dann das schwarze Nachbild des Weiss mit dem weissen des Schwarz einen sehr starken Contrast bildet.

Schliesse ich den Contrast mit dem Weiss aus, so macht sich die grössere Helligkeit des Schwarz bei offenen Augen als bei geschlossenen leicht geltend. Hiezu nehme ich eine inwendig geschwärzte Röhre vor ein Auge, bei Schluss des andern, indess ein schwarzer Bogen vor mir liegt, und schliesse und öffne abwechselnd das Auge, was durch die Röhre sieht, wo ich dann die Nacht im geschlossenen Auge ohne Vergleich tiefer finde, als das Schwarz des Fleckes, den ich auf dem schwarzen Bogen vor mir sehe und der durch das Tageslicht erhellt ist. Der Eindruck seiner Helligkeit wird übrigens hiebei durch den Contrast mit der inwendig gar nicht erleuchteten schwarzen Röhrenwand erhöht.

8) Lege ich ein kleines graues Feld (Grau No. 3) auf einen schwarzen und ein anderes gleiches auf einen weissen Grund, die an einander gränzen, so erscheint mir das graue Feld, sei es mit einem oder beiden Augen betrachtet, auf dem schwarzen Grunde deutlich lichter. Richte ich nun ein Auge mit einer inwendig schwarzen Röhre davor, unter Schluss des andern

Digitized by Google

Auges, auf beide graue Felder zugleich, die dazu nahe an der Gränze von Weiss und Schwarz liegen müssen, so nimmt der Unterschied der Helligkeit zwischen beiden erheblich zu, indem zwar beide grauen Felder hiebei an Helligkeit gewinnen, aber das auf dem weissen Grunde erheblich mehr als das auf dem schwarzen.

9) Zum Beweise, dass auch zwischen fernen Theilen des Gesichtsfeldes sich eine Contrastwirkung erstreckt, kann schon einigermassen der Umstand dienen, dass Verdunkelung und Erhellung durch den Contrast nicht auf die unmittelbare Nähe der Gränzlinie beschränkt bleiben. Zum bestimmteren Beweise dienen folgende Versuche.

Ich lege bei Vorderstellung gegen das Fenster ein kleines weisses Feld, Centralfeld, auf die Mitte eines schwarzen Grundes und schiebe dann seitlich einen weissen Bogen herbei, so dass das Schwarz des umgebenden Grundes mehr und mehr zugedeckt wird. Das weisse Feld verdunkelt sich um so mehr, je näher der weisse Bogen kommt, und erhellt sich wieder beim Zurückziehen. Die Wirkung tritt nicht erst bei der unmittelbaren Nähe, sondern nur wachsend mit der Nähe ein. Es gehört zwar einige Aufmerksamkeit dazu, den Erfolg der Verdunkelung und Erhellung wahrzunehmen; aber man nimmt ihn doch unzweideutig wahr, wenn man überhaupt für Contrastwirkungen empfänglich ist, und sowohl Funke als Grabau, als Welcker haben die Veränderung richtig erkannt, ohne von der zu erwartenden Richtung derselben avertirt zu sein. Auch eine oberflächliche Aufmerksamkeit aber reicht meist hin, sie wahrnehmen zu lassen, wenn man den Versuch mit Herbeischieben und Wegziehen eines weissen Bogens von beiden Seiten zugleich anstellt; die Verdunkelung und Erhellung des weissen Feldes wird hier für mich sehr auffällig, und Kohlschütter (ungeachtet er bei den vorerwähnten Contrastversuchen meist ein verkehrtes Phänomen auf Weiss beobachtete) sagte, es werde ganz grau. Volkmann jedoch fand den Effect weder bei dem einseitigen noch doppelseitigen Herbeischieben der weissen Bogen deutlich.

Das weisse Centralfeld kann grösser oder kleiner, ein paar Zoll oder ein paar Linien breit sein, und der Erfolg zeigt sich immer für mein Auge. Wenn ich hingegen den Versuch umkehre, d. i. ein schwarzes Centralfeld auf weissem Grunde anwende, so erhalte ich bei Anwendung eines hinreichend schmalen

Centralfeldes von ein paar Linien bis $^1/_2$ Zoll Breite vielmehr das verkehrte, als directe Phänomen, d. h. das Schwarz des Feldes vertieft sich beim Zusammenschieben der beiden schwarzen Seitenschieber, und erhellt sich beim Auseinanderschieben, indem es sich bis auf einen tief schwarz bleibenden Rand mit einem weisslichen Schleier überzieht, der bei Wiederholung des Versuches immer deutlicher wird, und unstreitig von Diffusion und Umstimmung abhängt. Sowohl ich als Funke fanden diesen Erfolg gegen unsere Erwartung unter denselben Umständen, wo uns ein kleines weisses Centralfeld auf Schwarz den directen Erfolg gab. Kohlschütter jedoch erhielt auch mit dem schwarzen kleinen Centralfelde den directen Erfolg. Wende ich inzwischen ein breites schwarzes Centralfeld an, so erhalte ich auch mit diesem das directe Phänomen.

Es ist mir noch nicht zur Klarheit gekommen, warum bei diesen Versuchsweisen die Umstände, welche das umgekehrte Phänomen begünstigen, für Schwarz sich verhältnissmässig stärker geltend machen, als für Weiss.

Stellte ich dieselben Versuche auf grauem Grunde (Grau No. 3) mit einem schmalen Centralfelde an, so erhielt ich bei weissem Centralfelde mit weissen Seitenschiebern das directe, bei schwarzem Centralfelde sowohl mit schwarzen als weissen Seitenschiebern das umgekehrte Phänomen, bei weissem Centralfelde mit schwarzen Seitenschiebern aber keine deutliche Aenderung überhaupt.

10) Anstatt die Seitenschieber herbeizuschieben und wegzuziehen kann man nach der Versuchsweise 2) verfahren, nachdem man auf die Mitte des schwarzen Mittelfeldes zwischen den Seitenlagen ein kleines weisses quadratisches Centralfeld von $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll Seite gelegt hat, welches solchergestalt in Entfernung von den Seitenlagen und Decken bleibt, und dass man nun die Decken abwechselnd auflegt und abhebt. Die Erhellung und Verdunkelung im Sinne directen Contrastes war mir noch merklich genug, wenn die Breite des Mittelfeldes $^1/_2$ par. Fuss betrug und die Beobachtung aus gewöhnlicher Sehweite geschahe, obwohl ein schmäleres Mittelfeld und mithin grössere Nähe des Centralfeldes an den Seitenlagen allerdings augenfälligere Resultate gibt. Kohlschütter constatirte den Erfolg bei 3 bis 4 Zoll Breite des Mittelfeldes.

Ein schwarzes schmales Centralfeld gab mir auf weissem

Digitized by Google

Grunde bei derselben Versuchsweise nur zweideutige Resultate, auf grauem Grunde (Grau No. 3) unter Umständen das directe, unter andern das verkehrte Phänomen, indess ein weisses auf grauem Grunde immer das directe Phänomen gab.

Zufolge der Versuche 9) und 10) hat man unstreitig bei Beurtheilung der Contrastwirkung, welche ein begränztes Feld von seiner Umgebung erfährt, niemals blos sein Verhältniss zur nächsten, sondern auch zur weitern Umgebung in Betracht zu ziehen, und wenn die unmittelbare Umgebung durch ihre grössere Nähe in Vortheil ist, so ist die weitere Umgebung durch ihre grössere Ausdehnung in Vortheil, so dass durch letzteren Umstand der Einfluss der grösseren Nähe unter Umständen compensirt oder überboten werden könnte. Künftige Untersuchungen zur Ermittelung bestimmterer Verhältnisse in dieser Beziehung sind ein Bedürfniss, speciell hierauf gerichtete Versuche mit mehr und minder schmalen Umgebungen aber besser von solchen anzustellen, bei welchen Diffusion und Irradiation, die immer hiebei störend sein werden, es doch weniger sind als bei mir.

Auf diesem Einflusse der fernen Umgebung beruht denn auch unstreitig theilweise der Erfolg folgender Versuche:

11) Wenn ich mit einem Auge bei Schluss des andern durch die inwendig geschwärzte Röhre, d. i. die zusammengerollte Röhre Russpapier, in gewöhnlicher Weise, bei einiger Entfernung der Röhrenmündung vom Grunde, auf irgend einen vom Tageslichte beleuchteten Grund sehe, sei es einen Bogen schwarzes Papier oder weisses Velinpapier, so erscheint derselbe entschieden heller, als wenn ich ihn mit demselben Auge frei ohne die Röhre betrachte, indem der durch die Röhre erblickte Fleck des Grundes beidesfalls heller als die unbeleuchtete schwarze Röhrenwand ist, also beidesfalls in Contrast damit tritt. Nun sollte man meinen, da der Russgrund doch nur wenig, der Velingrund stark von der schwarzen Röhrenwand in Helligkeit abweicht, müsste auch die Hebung bei Betrachtung des Velins durch die Röhre viel stärker sein, als bei Betrachtung des Russgrundes. Ich kann diess aber durchaus nicht finden; sondern im Gegentheil. Während ich manchmal in Zweifel bin, ob der Fleck auf dem Velin durch die schwarze Röhre wirklich heller ist, als das frei gesehene Velin (obschon ich anderemale diess entschieden genug finde), bin ich nie in Zweifel auf dem Schwarz, so entschieden ist der Unterschied. Noch zweifelhafter wird mir

Digitized by Google

der Unterschied, wenn ich in den Himmel durch die schwarze Röhre und ohne Röhre sehe, ungeachtet der Contrast zwischen dem hellen Himmel und der schwarzen Röhrenwand beim Blick durch die Röhre eine sehr kräftige Hebung mitführen sollte, die bei freiem Blick in den Himmel wegfällt. Hingegen erscheint der Unterschied zwischen der Betrachtung mit und ohne Röhre auf Grau entschiedener als auf Weiss. Andere, welche ich diese Versuche wiederholen liess, fanden es entsprechend.

Theilweis nun wird diess unstreitig auf dem früher geltend gemachten Principe beruhen, nach welchem derselbe Lichtunterschied an Schwarz leichter als an Weiss bemerklich wird. Aber der so ausserordentlich viel grössere Contrast zwischen der schwarzen unerleuchteten Röhrenwand und dem hellen Himmel als zwischen der schwarzen unerleuchteten Röhrenwand und dem vom Himmel erleuchteten Russgrunde würde dessenungeachtet eine sichtlichere Hebung bei den Versuchen mit dem hellen Himmel erwarten lassen, käme nicht zugleich Folgendes in Rücksicht:

Wenn ich die geschwärzte Röhre von dem Auge nehme und frei damit nach dem schwarzen Grunde blicke, auf den ich vorher durch die Röhre sahe, so wird dieser Grund für mich durch seinen Contrast mit der umgebenden Helligkeit des gesammten übrigen Gesichtsfeldes verdunkelt, wogegen bei weissem Velingrunde oder Himmelsgrunde eine Erhellung durch den Contrast mit den umgebenden dunkleren Gegenständen statt finden muss. In der That finde ich, wenn ich den ganzen Beobachtungstisch mit Schwarz überlege, eine Röhre nur von ungefähr 5 Zoll Länge anwende, und diese nahe über dem schwarzen Grunde halte, so dass bei Wegnahme derselben das über dem schwarzen Tische wenig erhobene Auge nicht viel Seitenlicht empfängt, den Unterschied der Helligkeit des schwarzen Grundes mit und ohne Röhre nur noch gering.

12) Nach Vorstehendem wird man die stärkste hebende Contrastwirkung dann erwarten müssen, wenn man um einen Fleck von constanter objectiver Helligkeit das g a n z e Gesichtsfeld ringsum abwechselnd erhellt und verdunkelt. Der Fleck wird sich erstenfalls ganz besonders auffällig subjectiv verdunkeln, zweitenfalls erhellen müssen.

In der That ist diess in unvergleichbar stärkerem Grade der

Digitized by Google

Fall, als bei den zuerst angeführten Versuchen 1) bis 3), wenn man den Versuch, wie folgt, im finstern Zimmer anstellt.

Im Laden eines übrigens verdunkelten Zimmers waren zwei quadratische Oeffnungen von ½ Fuss Seite angebracht, die durch Schieber verkleinert werden konnten. Ein schattengebender Gegenstand, wozu eine quadratische Tafel von etwas über ½ Fuss Seite diente, war vor die Oeffnungen im Zimmer aufgestellt, und warf einen Doppelschatten auf eine grosse weisse Tafel. Die eine Oeffnung wurde nun so weit verkleinert, dass der zugehörige Schatten verschwand, und blos der, der grossen unverkleinerten Oeffnung entsprechende, sichtbar blieb; dann die grosse Oeffnung abwechselnd verschlossen und wieder geöffnet. Bei diesem Wechsel von Verschluss und Oeffnung ändert sich objectiv nichts in dem Schatten, welcher der grossen Oeffnung entspricht, sondern nur in der Umgebung dieses Schattens, indem das ganze Gesichtsfeld ringsum sich bei dem Verschlusse verdunkelt (wobei der Schatten, welcher der verkleinerten Oeffnung entspricht, zum Vorschein kommt), bei der Oeffnung (unter Verschwinden dieses Schattens) sich erhellt. Aber ungeachtet der, der grossen Oeffnung entsprechende, Schatten objectiv derselbe bleibt, sieht man doch bei jedem Verschlusse der grossen Oeffnung eine gewaltige Erhellung, bei jeder Oeffnung eine entsprechende Verdunkelung dieses Schattens, so dass man sich kaum überreden kann, es sei blos eine subjective Erscheinung. Das Hebungsphänomen ist unter diesen Umständen gerade so zwingend, als die Erscheinung der complementären Schatten im finstern Zimmer, wenn man eine der Oeffnungen mit einem Farbenglase verdeckt.

Wenn ich sagte, dass der, der grossen Oeffnung entsprechende Schatten bei abwechselndem Verschluss und Oeffnung objectiv derselbe bleibt, so ist diess nicht ganz streng, indem bei der Oeffnung das zerstreute Licht, was die Wände in den Schatten zurückwerfen, sich vermehrt, und er also in der That objectiv etwas heller, beim Verschlusse dunkler wird, was aber die beobachtete Contrastwirkung weder erklärt noch steigert, sondern vielmehr derselben entgegenwirkt. Diese Gegenwirkung aber wird weit überboten von der Hebung.

Es ist sehr instructiv, diesen Erfolg mit dem zu vergleichen, welchen man erhält, wenn man eine inwendig schwarze Röhre auf die Mitte des Schattens, welcher der grossen Oeffnung

Digitized by Google

entspricht, richtet, während man den Wechsel mit Verschluss und Oeffnung vornehmen lässt. In diesem Falle, wo der Contrast mit der Umgebung wegfällt, fällt auch die hebende Wirkung weg, und der Schatten bleibt unverändert oder zeigt nur die kleine Aenderung, welche von dem Wechsel im Einfall des zerstreuten Wandlichtes herrührt. Auf diese Weise kann man sich direct überzeugen, dass das Phänomen wirklich subjectiver Natur sei.

Grabau, Hankel und Ruete haben durch Wiederholung diese Erfolge bestätigt. Hankel bemerkte dabei, dass bei grösserer Entfernung des Auges vom Schatten die Phänomene der Erhellung und Verdunkelung erheblich stärker erschienen, als bei grösserer Nähe, was auch leicht verständlich ist, weil eine grosse Nähe das Auge approximativ in den Zustand des Durchsehens durch eine Röhre nach der Mitte des Schattens versetzt.

Anstatt den einen Schatten durch Verkleinerung der einen Oeffnung ganz zum Verschwinden zu bringen, und dann die unverkleinerte Oeffnung abwechselnd zu schliessen und wieder zu öffnen, kann man auch beide Schatten durch gleiche Grösse der Oeffnungen auf gleiche Helligkeit bringen, und dann die eine Oeffnung abwechselnd schliessen und wieder öffnen. Auch hiebei habe ich das Hebungsphänomen sehr auffallend gefunden, doch war das Resultat bei der vorigen Versuchsweise noch stärker.

Verfuhr ich so, dass ich einen Schatten blos durch eine, sei es grössere oder kleinere Oeffnung erzeugte, diesen eine Zeit lang ins Auge fasste, dann die Oeffnung ganz schloss, so dass das ganze Zimmer dunkel wurde, so sahe ich ein lebhaft helles Nachbild an der Stelle des Schattens; eben so Grabau; indess Hankel den Schatten blos von gleichförmigem Dunkel verschlungen sahe.

Ich hätte die Versuche im finstern Zimmer gern noch mit einigen Abänderungen fortgesetzt; aber der öftere Wechsel zwischen Hell und Dunkel war für mein Auge sehr angreifend, so dass ich sie habe einstellen müssen.

13) So wie Schwarz neben Weiss schwärzer als neben Schwarz, Weiss neben Schwarz weisser als neben Weiss erscheint, ist es auch der Fall, wenn man das Neben mit Nach vertauscht, wie diess durch hinreichend bekannte Versuche bewiesen wird. Ich erinnere des Zusammenhanges wegen kurz

Digitized by Google

an folgende: Zieht man ein auf weissem Grunde liegendes schwarzes Feld nach einiger Betrachtung weg, so erscheint an der Stelle des weissen Feldes ein vertieft schwarzes Feld im schwarzen Grunde, und zieht man ein auf weissem Grunde liegendes schwarzes Feld nach einiger Betrachtung weg, so erscheint an dessen Stelle ein lichter weisses Feld im weissen Grunde, vorausgesetzt, dass das Auge für subjective Erscheinungen überhaupt hinreichend empfänglich ist. Unter Umständen kann aber auch die Erscheinung überwiegend durch die Nachdauer des Eindruckes bestimmt werden, was den verkehrten Contrastphänomenen analog ist.

14) In Zusammenhang mit der Thatsache, dass Schwarz nach oder neben Weiss schwärzer erscheint, steht offenbar die Thatsache, dass ein schwacher Farbeneindruck durch einen vorausgehenden oder nachbarlichen gleichartigen Farbeneindruck von grösserer Intensität ausgelöscht oder unscheinbar gemacht wird. Man decke ein helles Farbenglas über die Gränze von Weiss und Schwarz. Auf dem Weiss scheint natürlich eine verhältnissmässig intensive, auf dem Schwarz eine sehr schwache Farbe durch, diese aber löscht sich da, wo das Schwarz an Weiss gränzt, ganz in reinem Schwarz aus. Unter etwas anderer Form stellt sich dieselbe Thatsache so dar:

Ein helles Farbenglas, gross oder klein, auf die Mitte eines schwarzen Grundes gelegt, erscheint noch merklich farbig; wogegen ein schwarzer Fleck auf weissem Grunde mit demselben Farbenglase überdeckt inmitten des jetzt lebhaft farbig erscheinenden Grundes ganz schwarz erscheint.

Sehe ich mit einem Auge bei Schluss des andern auf einen schwarzen Grund durch eine am andern Ende mit einem blauen oder grünen Glase verschlossene inwendig geschwärzte Röhre, so sehe ich den Grund deutlich farbig; richte ich aber die Röhre mit dem Farbenglase auf die Gränze von Weiss und Schwarz oder wende sie auf einen weissen Grund, um sie nachher voll auf den schwarzen Grund zurückzuwenden, so erscheint der Farbeneindruck auf dem Schwarz merklich erloschen oder sehr geschwächt; verstärkt sich aber bei der letzten Versuchsweise allmälig wieder. Eigen aber ist, dass ich mit einem gelben oder rothen Farbenglase die Schwächung auf diese Weise nicht deutlich wahrnehme; ungeachtet die obigen Ueberdeckungsversuche sie erkennen lassen. Grabau fand diese Ergebnisse bestätigt.

Digitized by Google

15) Dass Farben geneigt sind, in ihrer Nachbarschaft die subjective Erscheinung von Complementärfarben hervorzurufen, ist bekannt genug und unter vielen Formen constatirt. Wenn subjective complementäre Nachbarfarben nicht überall erscheinen, liegt der Grund theils darin, dass schwache Färbungen nicht erkannt werden, wenn sie nicht ein gewisses Verhältniss der Intensität zum weissen oder andersfarbigen Lichte, dem sie sich beimischen, überschreiten, in welcher Hinsicht man einige Versuche und Erörterungen in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen vergleichen mag, theils darin, dass die besprochenen Ursachen der verkehrten Contrastwirkung unter Umständen überwiegend werden. Ohne auf die bekannten Versuche über complementäre Nachbarfarben hier zurückkommen zu wollen, führe ich nur folgende Versuche an, welche beweisen, dass auch hier die Fernwirkung des Contrastes besteht.

Wiederhole ich an einem kleinen weissen Felde auf schwarzem Grunde die Versuche 9) oder 10), indem ich statt weisser Seitenschieber oder Decken einfarbige anwende, so kann ich im Allgemeinen keinen oder nur einen zweideutigen Erfolg subjectiver Färbung des weissen Centralfeldes wahrnehmen. Verfahre ich aber nach 10) so, dass ich z. B. rothe Seitenlagen und grüne Decken, oder blaue Seitenlagen und orange Decken anwende, so wird je nach Auflegen oder Abheben der Decken, namentlich nach einigen Wiederholungen des Versuchs, der Wechsel der Complementärfärbung am weissen Centralfelde für mein Auge sehr deutlich, auch wenn ich das weisse Centralfeld sehr stetig fixirt halte, so dass die Färbung nicht als Nachfarbe von den seitlich gesehenen Seitenlagen und Decken erklärt werden kann.

Noch augenfälliger lässt sich die Fernwirkung des Farbencontrastes durch Versuche im finstern Zimmer darthun, wohin einige Versuche gehören, die ich in dem folgenden, gegen eine Abhandlung des Prof. Osann gerichteten, Artikel anführe.

16) Stelle ich den Versuch 2) mit schwarzem Grunde und beliebig weissen oder schwarzen Seitenlagen an, welche letztere durch Freilassung des ganzen schwarzen Grundes vertreten werden können, und nehme die Decken farbig statt weiss oder schwarz, so erhalte ich, welche Farbe ich auch anwenden mag, stets das umgekehrte Contrastphänomen, d. h. das schwarze Mittelfeld überströmt sich mit einem Schein nicht von der Complementär-

Digitized by Google

farbe, sondern Gleichfarbe, was auch erfolgt, wenn ich auf einem schwarzen Bogen von beiden Seiten her einen farbigen nach der Mitte schiebe. Dieser sofort eintretende Erfolg kann wohl nur von Diffusion abhängen. Auf einem weissen statt schwarzen Grunde erhalte ich hiebei keinen deutlichen Erfolg, indem die geringe Färbung unstreitig vom Weiss absorbirt wird. Stelle ich den Versuch 1) mit einem farbigen statt grauen Grunde, mit zum Grunde complementärfarbigen Seitenlagen und dem Grunde gleichfarbigen Decken an, so erhalte ich bei orangenem oder hellgrünem Grunde sehr entschieden und sofort das directe Phänomen, d. h. der Grund (das Mittelfeld) nimmt an Sättigung der Farbe zu, wenn die ihm gleichfarbigen Decken abgehoben werden, und die complementärfarbigen Seitenlagen zum Vorschein kommen; wird dagegen weisslicher oder schwärzlicher (je nach der geringeren oder grösseren Helligkeit der Seitenlagen), jedenfalls unscheinbarer, wenn sie aufgelegt werden; und zwar scheint mir der Erfolg um so auffälliger zu werden, je öfter ich den Versuch hinter einander wiederhole. Hingegen erhalte ich mit einem rothen Grunde (bei grünen Seitenlagen) und violetem Grunde (bei gelben Seitenlagen) eben so entschieden und von vorn herein das umgekehrte Phänomen; d. h. die Farbe des Grundes wird gesättigter, lebhafter, wenn die gleichfarbigen Decken aufgelegt werden, unscheinbarer, wenn sie abgehoben werden; auch bleibt diess so bei fortgesetzter Wiederholung des Versuchs. Ich habe Roth und Grün von sehr verschiedenem Verhältniss der Dunkelheit gegen einander angewandt; und immer blieb das umgekehrte Phänomen für den rothen Grund gleich entschieden. Bei tiefblauem Grunde mit hellgelben Seitenlagen erhielt ich das umgekehrte Phänomen, mit orangefarbenem mehr oder weniger zweideutige, wechselnde, oder bei Fortsetzung der Versuche aus dem Directen ins Umgekehrte umschlagende Phänomene. Auch hellgelber Grund mit hellvioleten Seitenlagen gab zweideutige Resultate.

Das Statthaben des directen Phänomens bei hellgrünem und orangefarbenem Grunde und das umgekehrte bei rothem Grunde hat auch Grabau constatirt; wogegen Kohlschütter bei orangefarbenem, blauem, grünem, rothem Grunde überall das directe Phänomen erhielt. Einst stellte ich den Versuch mit rothem Grunde vergleichungsweise mit einer Mehrzahl von Personen an,

Digitized by Google

von denen einige eben so bestimmt den directen als andere den verkehrten Erfolg zu erhalten versicherten.

Auch wenn ich den Versuch 10) mit der Fernwirkung des Contrastes an einem kleinen farbigen Centralfelde auf schwarzem oder weissem Grunde mit gleichfarbigen Seitenlagen und complementären Decken (oder umgekehrt) anstelle, so erhalte ich bei einem orangenen und grünen Centralfelde eben so entschieden das directe Phänomen, als bei einem rothen das umgekehrte.

17) Manche sind geneigt, zu glauben, dass eine Farbe, um als solche zu erscheinen, überhaupt eines Gegensatzes bedarf, und zwar schliessen sie diess daraus, dass der Himmel oder eine Gegend bei Betrachtung durch eine farbige Planbrille oder überhaupt durch ein Farbenglas zwar im ersten Augenblicke in der Farbe des Glases erscheint, der Eindruck aber sich schnell schwächt und bald der Farbeneindruck so sehr verschwindet, dass man die Farbe des Glases danach nicht mehr erkennen würde. Da man nun die Gegend doch noch hell durch das Glas sieht, so kann es allerdings scheinen, als ob der Farbeneindruck des Lichtes allein dadurch erloschen sei, dass die Relation zu den vorausgegangenen heterogenen Eindrücken allmälig ihre Wirkung eingebüsst hat, und neue gleichzeitige heterogene Eindrücke nicht vorhanden sind.

Indess ist jenes, meist mit schwach blauen oder grünen Brillen erhaltene Resultat keineswegs allgemein gültig. Denn wenn ich ein dunkelrothes Glas vor die Augen nehme, so macht die intensiv rothe Farbe des dadurch gesehenen Himmels oder eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde nach Minuten noch keine Anstalt zum Verschwinden. Nur finde ich, dass, während mir der Himmel durch ein rothes Glas intensiv roth erscheint, weisse Häuser, die ich zugleich durch das Glas sehe, keine deutliche Färbung zeigen, solche jedoch annehmen, wenn ich den Anblick des Himmels durch einen Schirm abblende, so dass der, wegen der grösseren Helligkeit des Himmels stärkere Farben-Eindruck den schwächern nicht zur Geltung kommen lässt, was sich den unter 14) angeführten Thatsachen anschliesst.

Da bei blossem Vorhalten eines Glases vor die Augen Seitenlicht nicht ganz ausgeschlossen werden kann, so wiederholte ich den Versuch mit Hindurchblicken durch ein Farbeglas so, dass ich in die quadratische Oeffnung (von 6 par. Zoll Seite) des

Digitized by Google

Fensterladens eines übrigens dunklen Zimmers eine farbige Glastafel einsetzte, und hiedurch auf den halb im Schatten des Hauses liegenden, halb von der Sonne erhellten Sandplatz vor dem Hause unverwandt blickte. Diess setzte ich unter Anwendung eines dunkelvioleten Glases, welches im prismatischen Spectrum sehr überwiegend Roth gegen Blau zeigte, ¼ Stunde, unter Anwendung eines homogen tief rothen 5 Min. lang fort. Im ersten Momente erschien allerdings die Farbe des hellen Theiles des Platzes am lebhaftesten, schien sich aber nicht sehr stark und über eine gewisse Gränze hinaus gar nicht weiter zu vermindern, so dass eine längere Fortsetzung des Versuches nutzlos schien.

Hingegen war sehr auffällig, dass bei Anwendung eines blauen Glases, welches im Spectrum fast nur Blau mit sehr wenig Roth zeigte, der Farbeneindruck fast sofort nach der Vornahme des Glases erloschen schien. Da das blaue Glas heller war, als das rothe und violete, von welchen ich nicht zu entscheiden vermochte, welches heller sei, legte ich zwei blaue Glastafeln über einander, welche Combination mir ungefähr gleich hell mit dem rothen und violeten Glase erschien, ja ging selbst bis zur dreifachen Lage; immer erlosch der Farbeneindruck sehr schnell in einer Art weisslichen Schein, der fast wie bei einer Winterlandschaft die Gegend bedeckte. Ich muss daher glauben, dass die brechbarsten Farben sich in Betreff der Haltbarkeit des Eindrucks anders verhalten, als die mindest brechbaren. Dass das Violet hiebei sich dem Roth nahe stellte, lässt sich darauf schieben, dass es zum bei Weitem grössten Theile aus Roth bestand.

Uebrigens hat schon Helmholtz bemerkt, dass die Farben bei wachsender Intensität um so geneigter sind, weisslich zu erscheinen, je brechbarer sie sind, und unstreitig hängt die vorige Erfahrung über den Unterschied von Roth und Blau damit zusammen.

e) Vom Contrast abhängige Randscheine.

Nach den im vorigen Abschnitte angeführten Versuchen beschränkt sich die Hebung der Eindrücke durch den Contrast nicht blos auf die unmittelbar an einander gränzenden Theile der contrastirenden Flächen, sondern reicht in die Entfernung. Indessen ist die Voraussetzung natürlich, und hat sich selbst

Digitized by Google

schon in den vorigen Versuchen bestätigt, dass sich die Hebung doch in der Nähe der Contrastgränze am stärksten äussere, demnach die respective Erhellung und Vertiefung des aneinander gränzenden Weiss und Schwarz unmittelbar an ihrer Gränze am stärksten sei, und von da abnehme, also ein hievon abhängiger, sich allmälig in den Grund verlierender, heller und schwarzer Randschein wahrnehmbar sei. In der That erscheint ein solcher unter gewissen Umständen deutlich genug, indess er unter andern unmerklich wird. Auch wo er unmerklich ist, kann man ihn aber doch nach dem Zusammenhange der Thatsachen als vorhanden annehmen, d. h. seinen physiologischen Grund als bestehend annehmen, nur dass er nicht überall hinreichend ist, die Erscheinung bis zur Gränze des Merklichen zu treiben.

In dieser Hinsicht kommen folgende Puncte in Betracht:

Ein Lichtunterschied wird bemerktermassen überhaupt nur erkannt, wenn er ein gegebenes Verhältniss zu den Intensitäten, wozwischen er besteht, erreicht oder übersteigt. Die Erkennbarkeit eines Randscheines auf Weiss setzt also voraus, dass die Differenz zwischen der hellsten Stelle an der Contrastgränze und den von der Contrastwirkung nicht mehr erreichten Stellen des Grundes jenes Verhältniss erreiche oder übersteige; entsprechend auf Schwarz bezüglich der Differenz zwischen der dunkelsten Stelle an der Contrastgränze und den entfernten Stellen. Nach Bouguer beträgt das Verhältniss, bei welchem die Erkennbarkeit eines Lichtunterschiedes beginnt, $^1/_{64}$, es kann aber auch (s. meine Psychophysik I. S. 255) bis $^1/_{50}$ sinken und über $^1/_{120}$ heraufgehen. Die Versuche, wodurch diese Verhältnisse gefunden sind, beziehen sich jedoch auf die Erkennbarkeit eines an der Contrastgränze selbst zwischen zwei Lichtflächen erkennbaren scharf abgesetzten Unterschiedes; und obwohl es noch ganz an Versuchen darüber fehlt, ist doch mehr als wahrscheinlich, dass, wenn ein Lichtschein sich allmälig in einen Grund verläuft, der Unterschied zwischen dem Maximum und Minimum an den von einander entferntesten Stellen des Lichtscheines beträchtlich grösser sein muss, um noch erkannt zu werden, um so grösser, je allmäliger das Verlaufen statt findet, was daher unstreitig auch von den Randscheinen gelten wird, die sich in unserm Falle von der Contrastgränze herein in den Grund verlaufen.

Ein anderer Grund, dass vom Contrast abhängige Rand-

Digitized by Google

scheine unbemerkt bleiben können, liegt darin, dass auch von Lichtdiffusion und Irradiation Randscheine abhängen, welche die entgegengesetzte Natur haben, und sich über jene superponiren, so dass dieselben nur insofern zur Geltung kommen, als sie das Uebergewicht haben. Diese gegenwirkenden Randscheine stehen übrigens unter demselben Gesetze der Abhängigkeit von der Lichtintensität, als die vom Contrast abhängigen.

Sehr instructiv ist für mich in Betreff der Abhängigkeit der Sichtbarkeit der Randscheine von der Intensität des Grundes folgende Erfahrung.

Der Zustand meiner Augen nöthigt mich, so wie die Sonne sich nur ein wenig zu neigen beginnt, mit Schreiben oder Lesen aufzuhören; und ich pflege dann eine Stunde spazieren zu gehen. Steht nun gerade der Mond hoch in einem ganz klaren Himmel, so sehe ich ihn beim Ausgange abgesehen von einer Vervielfältigung, unter der sich mir derselbe wie so vielen Andern namentlich bei längerem Hinsehen darstellt, rein abgeschnitten im Blau stehen; wenn ich dagegen auf dem Rückwege bin, so sehe ich bei der jetzt stärker eingebrochenen Dämmerung stets einen verbreiteten goldnen Schein um denselben, wenn schon der Himmel keine Verminderung der Klarheit zeigt und der Mond vielmehr gestiegen als gesunken ist. Es ist mir diess sehr oft aufgefallen, und ich habe mich stets gewundert, dass in verhältnissmässig so kurzer Zeit der Dämmerungszunahme sich der goldne Schein von der Unmerklichkeit bis zu so grosser Deutlichkeit entwickeln konnte. Unstreitig nun war der Schein auch beim Ausgange vorhanden, konnte aber in der Helligkeit, in welcher der Himmel erschien, nicht von mir bemerkt werden.

Beim Spazierengehen mit einer Person, die sehr scharfe und gesunde Augen hat, habe ich wiederholt in Erfahrung gebracht, dass sie gar nichts von diesem goldenen Schein sehen konnte, während ich denselben sehr deutlich wahrnahm, was ich für einen Beweis halte, dass er vielmehr von Lichtdiffusion in meinen Augen, als von Lichtzerstreuung in der Atmosphäre abhängt, so lange der Himmel wirklich klar ist. Denn bei nebliger Luft sieht freilich jeder einen Schein um den Mond.

Im Allgemeinen werde ich einen Randschein, der bei geringer Aufmerksamkeit wahrgenommen wird, indem er bei hinreichendem Unterschiede vom Grunde sich in rascher Abstufung in den Grund verliert, doch aber nicht auf eine unmerkliche Breite reducirt, einen decisiven nennen; jenen, der sich sehr allmälig in den Grund verliert, einen verwaschenen; jenen, der sich auf eine fast unmerkliche Breite reducirt, so dass er nicht mehr füglich Randschein heissen kann, eine Randlinie. Natürlich unterliegt die Anwendung dieser Ausdrücke sehr dem subjectiven Ermessen, da es scharfe Gränzen hiebei nicht gibt;

Digitized by Google

allein in Ermangelung genauerer Masse muss man sich doch mit solchen ungefähren Bezeichnungen behelfen.

Bei Versuchen über Randscheine, welche vom Contrast abhängen, hat man sich nicht durch Säume oder Randscheine täuschen zu lassen, welche von andern Ursachen entstehen können.

Hat man eine Zeit lang die Gränze der contrastirenden Flächen betrachtet, und verschiebt den Gesichtspunct, was leicht unwillkührlich geschieht, so schiebt sich dadurch ein Nachbild einer Fläche über die andere, und entstehen dadurch subjective complementäre Säume, welche sich aber dadurch charakterisiren, dass sie erst mit der Dauer der Betrachtung entstehen, eine scharfe Begränzung und gleichförmige Helligkeit, respectiv Farbe haben, indess die Randscheine, um die es sich hier handelt, sofort da sind und sich allmälig in den Grund verlaufen. Verschiebt man beide Augen ungleichförmig, so dass ein Doppelbild der Gränzlinie entsteht, so schiebt sich damit das Bild des einen Grundes im einen Auge in einer gewissen Breite über das des andern Grundes im andern Auge, und entstehen in dem Streifen, in dem der eine Grund sich mit dem andern binocular deckt, Randscheine, von denen in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen die Rede gewesen ist, um die es sich jedoch hier nicht zu handeln hat. Aber man erkennt solche Randscheine eben daran, dass sie mit einer Verdoppelung der Gränzlinie in Beziehung stehen, und bei Anwendung blos eines Auges fehlen oder wegfallen. Auch kommen sie nicht so leicht zufällig zu Stande, wenn die Gränzlinie zwischen den contrastirenden Flächen parallel mit der Verbindungslinie der Augen, als wenn sie senkrecht darauf ist, weil die Augen senkrecht auf ihre Verbindungslinie minder leicht sich ungleich stellen.

Die Verhältnisse der vom Contrast abhängigen Randscheine sind bisher keiner näheren Betrachtung unterzogen worden, und bieten Manches dar, was von vorn herein sehr unerwartet scheinen mag, und unerklärlich bleiben würde, wenn man die Hebung durch den Contrast blos von einem Vergleichsurtheile abhängig machen wollte, hingegen erklärende Gesichtspuncte in dem findet, was schon im Abschnitte c) darüber gesagt wurde.

Namentlich wird den Erwartungen, die man von vorn herein hegen möchte: 1) dass das Phänomen der vom Contrast abhängigen Randscheine sich am deutlichsten bei Angränzung von vollem Weiss und Schwarz im vollen Tageslichte; 2) dass

es sich symmetrisch auf Schwarz und Weiss verhalten möge, gleich entschieden durch die Erfahrung widersprochen.

Unstreitig zwar wird bei der grossen Variabilität der Contrasterscheinungen je nach der Individualität von den folgenden Wahrnehmungen, die ich selbst gemacht habe, sich Vieles im Einzelnen anders bei Anderen zeigen; indess halte ich das eben Gesagte in seiner Allgemeinheit nach dem, was ich auch durch Andere habe constatiren lassen, auch für allgemein gültig.

Um vom Contrast abhängige Randscheine leicht und ohne alle Aufmerksamkeit wahrzunehmen, ist in der That die Angränzung von vollem Schwarz an volles Weiss in hellem Tageslichte das Ungünstigste, indess solche leicht und ohne Schwierigkeit auf Grau in der Angränzung an Weiss, auf Dunkelgrau in der Angränzung an Hellgrau wahrgenommen werden. Durch die verschiedensten Mittel der Dämpfung des Lichtes kann die Wahrnehmbarkeit von Randscheinen überhaupt sehr erleichtert werden.

Ferner ist die Erscheinung der Randscheine auf dem aneinander gränzenden Hell und Dunkel im Allgemeinen eben so unsymmetrisch, als sich die ganze Hebung durch den Contrast gezeigt hat. Oft nimmt man auf dem Dunkeln die deutlichsten Randscheine wahr, wo man auf dem Hellen nichts davon wahrnimmt, obwohl die Randscheine auf dem Hellen doch nicht überhaupt fehlen, und unter manchen Umständen auch deutlich genug werden können.

Allgemein scheint bei Angränzung von Hell an Dunkel der Randschein sich auf dem Hellen mehr zu concentriren, auf dem Dunkeln mehr auszubreiten, um so mehr, je schwärzer das Dunkel ist. Bei Angränzung von vollem Weiss an volles Schwarz zieht sich für mich jedenfalls der lichte Randschein auf dem Weiss stets in eine lichte Randlinie zusammen, von der mir noch fraglich scheint, ob sie überhaupt eine Sache des Contrastes ist, indess der schwarze Randschein sich weit ausdehnt.

Zur Anstellung der Beobachtungen wende ich in der Regel theils eine halb weisse, halb schwarze Papptafel, theils ganze Bogen weisses, graues, schwarzes Papier an, die partiell über einander geschoben und auf einander gepresst werden, so dass sie eine lange Gränzlinie bilden.

Des Näheren finde ich dabei Folgendes:

Digitized by Google

Fasse ich die Gränzlinie zwischen vollem Weiss und vollem Schwarz in hellem verbreiteten Tageslicht ins Auge, so nehme ich bei oberflächlicher Aufmerksamkeit überhaupt nichts wahr, was als ein vom Contrast abhängiger Randschein zu deuten wäre. Bei genauerer Aufmerksamkeit jedoch, indem ich mit der Gränze des Schwarz zugleich entferntere Theile des Schwarz ins Auge fasse, oder den Blick von der Gränze über die schwarze Fläche gleiten lasse, nehme ich auf das Deutlichste wahr, wie ein tiefes Schwarz an der Gränze sich allmälig in ein viel minder tiefes verläuft, so dass nur die verwaschene Form des Randscheines bei geringerer und auf die Nähe der Gränze concentrirter Aufmerksamkeit denselben nicht vorn herein entdecken liess. Das Weiss zeigt nichts der Art. Schärfe ich jedoch die Aufmerksamkeit noch mehr, so erscheint mir die Gränzlinie selbst auf dem Weiss in fast unmerkbarer Ausdehnung vorstechend licht, von da an aber das Weiss gleichförmig. Die lichte Linie tritt nur um so besser hervor, wenn ich blos mit einem Auge durch ein feines Löchelchen darauf sehe, Beweis, dass sie nicht von Irradiation abhängt.

Ueber das Verhalten der Randscheine auf dem Weiss und Schwarz in der Angränzung an Grau stellte ich Versuche vergleichungsweise mit dem Verhalten zwischen Weiss und Schwarz selbst so an, dass ich auf einer halb weissen, halb schwarzen Tafel Grau (No. 2, No. 3) bis zur Gränze hinschob und wegzog, und sahe, was sich auf der andern Seite änderte, je nachdem das Grau bis zur Gränze geschoben oder weggeschoben war. Auf Weiss änderte sich nichts merklich, ausser dass die lichte Linie, welche Weiss in der Angränzung an Schwarz zeigt, bei Ersetzung des angränzenden Schwarz durch Grau undeutlich wurde. Auf dem Schwarz nahm bei vollem Ersatz des angränzenden Weiss durch Grau die Tiefe sowohl des schwarzen Randscheines als weit hinein der übrigen schwarzen Fläche sichtlich ab und verstärkte sich wieder bei Entfernung des Grau, trotz des in entgegengesetztem Sinne wirkenden Einflusses der Diffusion. Auch schien mir, obwohl diese Beobachtung nicht so unzweideutig ist, um für ganz sicher zu gelten, bei der Ersetzung des Weiss der Tafel durch Grau der schwarze Randschein auf dem Schwarz minder verwaschen und hiemit auch für eine oberflächlichere Aufmerksamkeit etwas leichter spürbar zu werden, der Vortheil in dieser Hinsicht aber eben nur in der

Digitized by Google

decisiveren Form, nicht in der absolut grössern Intensität des Randscheins zu liegen, indem ich bei Angränzung von vollem Schwarz an volles Weiss den Unterschied zwischen der Contrastgränze und fernen Theilen des Schwarz doch grösser zu finden glaube, als bei Angränzung an Grau.

Die Randscheine auf Grau in Angränzung an Weiss sind im Allgemeinen viel decisiver und daher leichter bei oberflächlicher Aufmerksamkeit wahrzunehmen, als auf Schwarz in Angränzung an Weiss; nur ist, wie überhaupt bei diesen Versuchen, sehr wesentlich, die Papierbogen, wo man solche anwendet, scharf auf einander zu drücken, so dass keine Schattenlinie zwischen Weiss und Grau entsteht, welche ungeachtet ganz geringer Breite sehr störend einwirkt. So gibt mir Grau No. 1, auf Weiss lose aufgelegt, so dass eine schwarze Schattenlinie das Grau vom Weiss trennt, durchaus keinen merklichen dunkeln Randschein, der sogleich spürbar wird, wenn der graue Bogen auf den weissen hart niedergedrückt wird, so dass die Schattenlinie verschwindet. Auf Grau No. 2 und No. 3 erblicke ich trotz der schwarzen Schattenlinie noch den Randschein, aber er nimmt auffällig zu, wenn ich das Grau niederdrücke, und verschwindet, wenn ich die grauen Bogen etwas aufhebe, so dass sich die Schattenlinie in einen schmalen Schatten verwandelt.

Die Contrastwirkung einer schmalen schwarzen Schattenlinie, welche in der unmittelbaren Angränzung an Grau einen hellen Randschein auf diesem erzeugen sollte, kann also durch die Wirkung des durch die Schattenlinie vom Grau getrennten ausgedehnten Weiss überwogen werden, was mir Beachtung zu verdienen scheint.

Auf grauem Grunde in der Angränzung an schwarzen Grund im Tageslichte kann ich einen hellen Randschein nicht oder nur zweifelhaft finden; nur die lichte Linie, welche denselben zu vertreten scheint, jedoch wegen ihrer unmerklichen Ausdehnung nicht wohl Randschein heissen kann, zeigt sich ebenfalls sehr gut an allen drei Sorten des Grau. Legt man inzwischen einen schwarzen und weissen Bogen auf einem grauen einander gegenüber, so dass ein graues Zwischenfeld von 1 bis einigen Zollen Breite bleibt, so kann es den Anschein haben, als wenn dieses sowohl am Weiss einen hellen, als am Schwarz einen dunkeln Randschein hätte, indem die Abschwächung des dunkeln Randscheins auf dem Grau vom Weiss nach dem Schwarz zu sich

Digitized by Google

auch als eine vom Weiss ausgehende Lichtung fassen lässt. Diese Anordnung ist daher überhaupt nicht geeignet, das Dasein eines hellen oder dunkeln Randscheins insbesondere zu constatiren, indem das, was man auf Rechnung des einen schreibt, möglicherweise immer auf Abschwächung des andern beruhen kann; sondern man muss einmal Grau mit ansgedehntem Schwarz, ein andermal Grau mit ausgedehntem Weiss insbesondere combiniren.

Wo es sich jedoch darum handelt, Randscheine überhaupt bemerklich zu machen, ist jene Anordnung, nach der man das Grau zwischen Weiss und Schwarz, überhaupt Mittelhelles zwischen Helleres und Dunkleres bringt, welche ich wegen der hiebei statt findenden Abstufung des Hellen die treppenförmige nennen will, empfehlenswerth; denn beim Vergleich der Helligkeit an den beiden Gränzen des Mittelfeldes wird der von Randscheinen abhängige Unterschied besonders deutlich, sei es, dass doch ein, für sich nur nicht recht merklicher, heller Randschein oder die jedenfalls vorhandene lichte Linie an der Gränze des Schwarz, sei es, dass die Begränzung des Feldes von zwei Seiten in anderer Weise unterstützend mitwirkt.

Welcker sagt zwar (Irradiation p. 125): »ein gleichförmig graues Papier, von schwarzen und weissen Feldern benachbart, erscheint gleichmässig grau«; hat sich jedoch bei Versuchen, die ich gemeinsam mit ihm anstellte, vom Dasein des Unterschiedes auf dem Grau an den Gränzen von Weiss und Schwarz sehr wohl überzeugt, und jene Angabe, als nicht allgemein zutreffend, ausdrücklich zurückgenommen.

Es blieb übrig, die verschiedenen Abstufungen des Grau gegen einander zu untersuchen. Von den drei Nummern des Grau gibt mir jedes dunklere einen deutlichen decisiven dunkeln Randschein in der Angränzung an das nächst hellere oder dritt hellere; indess ich auf dem hellern Grau hiebei keinen deutlichen hellen Randschein, sondern nur mehr oder weniger deutlich die lichte Randlinie wahrnehmen kann.

Besonders gut stellen sich die Randscheine des Grau bei folgender treppenförmigen Anordnung dar: Weiss, Grau No. 1, No. 2, No. 3, Schwarz; durch partielles Untereinanderschieben und gutes Aufeinanderpressen oder Kleben eines weissen, dreier verschieden grauen und eines schwarzen Papierbogens gebildet, so dass immer einer etwa 1 Zoll vor dem andern vorsteht. Alle

Digitized by Google

graue Streifen sind von einem Rande nach dem andern hin schattirt, am schwächsten der hellste No. 1, welcher an Weiss gränzt, am deutlichsten der dunkelste No. 3, welcher an Schwarz gränzt. So konnte eine Person, welche überhaupt schwer subjective Phänomene sieht, blos den Randschein auf No. 3, und zwar ganz deutlich, nicht auf No. 1 und No. 2 erkennen; ich selbst und Andere erkennen ihn auf allen drei Nummern des Grau sehr gut.

Bei allen vorigen Versuchen ist helles verbreitetes Tageslicht und Betrachtung mit freiem Auge ohne dämpfende und verdunkelnde Mittel vorausgesetzt, indem es angemessen schien, das Verhalten der Randscheine vor Allem für die Verhältnisse des gewöhnlichen Augengebrauches zu constatiren. Aber weit deutlicher und sogar von frappantem Effecte können die Randscheine werden, wenn man verschiedene Mittel der Dämpfung und Verdunkelung zuzieht, auch hiebei ausgedehnte Randscheine auf der helleren Componente des Contrastes zum Vorschein kommen.

Im Allgemeinen finde ich Abends und bei einbrechender Nacht an Dachfirsten so wie senkrechten Mauerlinien, die sich gegen den, noch mehr oder weniger Licht habenden, Himmel absetzen, sehr decisive tief schwarze Randscheine, indess ich während des Tages nichts Deutliches überhaupt sei es von dunkeln oder hellen Randscheinen an solchen Gränzen entdecken kann. Auch scheint mir in der tiefen Dämmerung manchmal mehr, manchmal weniger deutlich an solchen Gränzen eine Lichtung sich hinzuziehen, die ich für einen hellen Randschein nehmen möchte, jedoch meist vergebens versuche, als eine von der Gränze ab ausgedehnte zu verfolgen, was mir beim schwarzen Randscheine sehr wohl gelingt. Man muss sich nur bei Beobachtungen hierüber sehr hüten, lichte Nachbilder von dunkeln Dächern, die leicht bei Hebung des Auges entstehen, für ausgedehnte lichte Randscheine zu halten oder die in der Abenddämmerung vom Dachfirst nach Oben abnehmende Helle des Himmels als Randschein anzusehen; daher sich lieber an verticale Mauerlinien als horizontale Dachlinien halten.

Die 5-stufige Treppe aus Papier (s. oben) erscheint mir bei Lampenlichte im Allgemeinen viel stärker schattirt als bei Tageslichte. Sehr instructiv ist es, die bei der Treppe stehende Lampe, wenn sie erst in der zum gewöhnlichen Gebrauche hinreichenden Stärke brennt, immer niedriger zu schrauben, wo die Schattirung immer decisiver wird, indem sich namentlich

Digitized by Google

das Lichte in der Angränzung des Helleren an das Dunklere immer mehr zu lichten scheint. Diess kann man fast bis zum Erlöschen der Lampe verfolgen.

Der, nur bei genauerer Aufmerksamkeit erkennbare schwarze Randschein auf vollem Schwarz in der Angränzung an volles Weiss bei verbreitetem Tageslichte wird auch für die oberflächlichste Aufmerksamkeit sichtbar, wenn man über die Gränzlinie des Weiss und Schwarz ein durchscheinendes Papier legt (wodurch sich natürlich das Schwarz in Grau verwandelt), und zwar gelingt der Versuch, mag ich das sehr dünne durchscheinende Papier einfach oder bis 4mal zusammengelegt, wo es immer noch ein wenig durchscheint, anwenden. Nicht minder wird der Randschein auf Schwarz gegen Grau, auf Grau gegen Weiss, auf Dunkelgrau gegen Hellgrau durch diess Mittel deutlicher. Hingegen kann ich in allen diesen Fällen keinen Vortheil für die Merkbarkeit des Randscheins auf der hellern Fläche finden.

Sehr frappant zeigt sich die Verstärkung sämmtlicher dunkeln Randscheine, wenn man über die gesammte Treppe (S. 123) das durchscheinende Papier breitet. Man sollte nicht meinen, dass die Schattirung, die hier eintritt, blos eine subjective Sache wäre.

Eben so wirksam oder selbst noch wirksamer als das Ueberlegen eines durchscheinenden Papieres ist das Ueberlegen eines hellfarbigen, z. B. grünen, gelben Glases über die Gränze des weissen und schwarzen oder allgemeiner helleren und dunkleren Grundes. Diess Mittel verdeutlicht mir ebensowohl den hellen als dunkeln Randschein an der Contrastgränze ausgedehnter Flächen; und das Ueberlegen meines hellgrünen Glases über die Treppe gibt einen wahrhaft überraschenden Erfolg, so schwarz ist das Dunkle und so licht das Helle an den gegenüberliegenden Rändern jeder Stufe. Auch bei meinem gelben Glase ist der Erfolg augenscheinlich genug. Inzwischen finde ich den schwarzen Randschein bei Ueberlegen des durchscheinenden Papieres etwas deutlicher, als bei Ueberlegen eines Farbeglases, unstreitig, weil jenes die schwarze Fläche nicht so verdunkelt wie dieses.

Funke und Grabau konnten an der Gränzlinie des vollen Schwarz und Weiss ohne Zuziehung des durchscheinenden Papiers nichts deutlich von Randscheinen bemerken (auf die lichte Randlinie waren sie nicht aufmerksam gemacht). Ruete erkannte

etwas von einem schwarzen Randschein und die lichte Linie auf dem Weiss, auch ohne vorher darauf aufmerksam gemacht zu sein. Nach Ueberlegung eines durchsichtigen Papieres oder Farbeglases aber wurden allen die Randscheine deutlich, oder respectiv in der Deutlichkeit verstärkt. Eben so haben Volkmann und Welcker sich von der angegebenen Wirkung des durchscheinenden Papieres und der Farbengläser überzeugt.

Das Ueberlegen des durchscheinenden Papieres bezüglich der Randscheine zu versuchen, wurde ich durch die schon früher von Meyer *) gemachte Beobachtung veranlasst, wonach Weiss auf einem Farbengrunde durch Ueberlegen eines durchscheinenden Papieres über das Ganze die complementäre Nüance deutlich annimmt.

Das Ueberlegen grauer Gläser über die Contrastgränze leistet an sich denselben Erfolg, als das Ueberlegen farbiger Gläser, nur dass meine grauen Gläser, weil sie blos die Grösse mit der Form von Brillengläsern haben, keine grosse Entwickelung des Phänomens der Randscheine gestatten. Vor die Augen genommen haben hellgraue Gläser so wie helle Farbengläser keinen so günstigen Effect zur Verdeutlichung der Randscheine, als über die Contrastgränze gelegt, weil sie letztenfalls mit der zweiten Potenz der Verdunkelung wirken, da das Licht zweimal hindurchzugehen hat, ehe es zum Auge gelangt. Aber sehr dunkle graue oder Farbengläser verdeutlichen, wie ich mich hinreichend überzeugt habe, vor die Augen genommen ebenfalls augenfällig die dunkeln Randscheine. Auch der helle (an der Contrastgränze zwischen ausgedehntem Weiss und Schwarz) schien mir im ersten Momente sehr deutlich dadurch, aber bald zu schwinden.

Sehr geeignet zu Beobachtungen über Contrast-Randscheine sind Schatten, die man Abends an einer hellen Wand oder überhaupt hellen Fläche mittelst eines Kerzen- oder Lampenlichts erzeugt. Hier erkenne ich nicht nur den dunkeln Randschein sehr deutlich im Schatten, sondern sehe auch einen lichten Randschein um den Schatten in gewisser Ausdehnung.

Auch kann man mit Schatten sehr gut beliebige treppenförmige Anordnungen erzeugen. Bringt man durch zwei Lichter einen sich theilweise deckenden Schatten auf einer weissen

*) Pogg. Ann. XCV. p. 170.

Fläche hervor, so gibt der Kernschatten Schwarz, die Flügeltheile Grau, die Fläche ringsum Weiss, so weit sich solches überhaupt mit Kerzenlicht auf weissen Flächen erzeugen lässt. Man sieht hier an allen Gränzen die von den Randscheinen abhängigen Schattirungen sehr schön; und es ist nichts geeigneter, als dieser einfache Versuch, die vom Contrast abhängigen Abschattungen überhaupt zur Anschauung zu bringen. Diesen Versuch gibt übrigens schon Welcker*) an, indem er einen Doppelschatten durch zwei Fenster erzeugt; doch sind zwei Lichter zu Vermeidung der Halbschatten vorzuziehen.

Eine Treppe aus mehreren Stufen erzeugt man leicht dadurch, dass man mittelst drei, vier Lichter u. s. f. einen vielfachen, sich theilweise deckenden, Schatten erzeugt. Ich stellte einen Versuch mit 4 Kerzen an, wobei sich alle Schatten sehr schön durch die Randscheine schattirten.

Der schattengebende Körper — ich nahm meist ein Blatt Packpapier — ist bei diesen Versuchen gleichgültig. Man kann auch das Profil eines Menschen dazu benutzen.

Die vorigen Versuche sind nur hinreichend, das Dasein von Randscheinen, die vom Contrast des Hellen und Dunkeln abhängen und einige Verhältnisse derselben überhaupt zu constatiren, ohne noch zu genaueren Feststellungen über die Abhängigkeit ihrer Intensität und Ausdehnung von absoluter und relativer Helligkeit und Ausdehnung der contrastirenden Flächen zu führen. Unstreitig werden solche Feststellungen immer schwierig bleiben; zu genaueren Versuchen in dieser Hinsicht aber dürfte vielleicht nichts geeigneter sein, als die Anwendung einer in concentrische Ringe getheilten rasch gedrehten Scheibe, deren Ringe in verschiedenen Verhältnissen mit Weiss und Schwarz erfüllt sind, wodurch man alle beliebigen Abstufungen des Grau in Angränzung an einander erzeugen kann und zugleich ein photometrisches Mass der Lichtstärke des Grau hat **). Gesetzt, man theilt eine Kreisscheibe in drei concentrische Ringe, lässt den innersten ganz schwarz, den äussersten ganz weiss, und gibt dem mittelsten 180° Schwarz, 180° Weiss, so hat man bei rascher Drehung eine Treppe aus 3 concentrischen Stufen,

---

*) Ueber Irradiation p. 125.

**) Freilich nur insofern man die Intensität auf dem Schwarz vernachlässigt oder bestimmen kann.

Digitized by Google

Schwarz, halb Weiss, Vollweiss, und kann die Randscheine in der Angränzung der Ringe beobachten. Anstatt einer Stufe Grau kann man deren zwei; z. B. ²/₃ Schwarz ¹/₃ Weiss, ¹/₃ Weiss ²/₃ Schwarz oder beliebig viele zwischen Weiss und Schwarz einschalten.

Ich habe vor mir zwei Scheiben, jede von 13 par. Zoll Durchmesser mit 18 gleich breiten concentrischen Ringen*), in deren einer das Weiss, in der andern das Schwarz in gleichförmiger Abstufung vom Centrum nach der Peripherie zunimmt. Bei rascher Drehung zeigen sich sämmtliche graue Ringe, anstatt gleichförmig grau, durch die Randscheine in auffälligster Weise, auf beiden Scheiben in entgegengesetztem Sinne, von der Peripherie nach dem Centrum schattirt, so dass solche Scheiben ganz untauglich sind, wozu sie sonst sehr geeignet sein würden, eine Skale photometrisch abgemessener Helligkeiten darzustellen, da die Helligkeit in jedem Ringe in radialer Richtung ganz ungleich ist.

Es war meine Absicht, mit solchen Scheiben, unter Abänderung der Breite und Abstufungsverhältnisse der Ringe und unter Zuziehung der Betrachtung mit mehr oder weniger dunkeln photometrisch bestimmten Gläsern, mancherlei Beobachtungen anzustellen; ich habe aber davon abstehen müssen, weil meine schwachen Augen durch diese Versuche zu sehr angegriffen werden.

Anstatt in jedem Ringe das Schwarz in continuo und das Weiss in continuo anzubringen, wie es bei den seither von mir angewendeten Scheiben der Fall ist, wird man übrigens zu vorliegendem Zwecke besser thun, beides in mehrfachen Abwechselungen in demselben Ringe anzubringen, weil sonst die Scheiben einer zu schnellen Drehung bedürfen, um gleichförmiges Grau zu geben.

Das dunkle Nachbild heller Objecte auf dunklem Grunde oder in der Angränzung an dunkle Objecte, im geschlossenen Auge betrachtet, hat bei mir stets einen sehr decisiven lichten Randschein, den ich viel auffälliger als den dunkeln Randschein um das Urbild finde, wogegen ich im schwarzen Nachbilde

*) Eine ähnliche Scheibe von 18 Zoll Durchmesser habe ich Behufs anderer Versuche in Pogg. Ann. XLV. S. 227 beschrieben. Die Zahlangaben über die Verhältnisse der Ringe daselbst sind durch Druckfehler oder Versehen entstellt, was jedoch ohne Belang für den, an keine bestimmten Verhältnisse gebundenen, Erfolg der Versuche ist.

Digitized by Google

eines hellen an Dunkles gränzenden Objects im geschlossenen Auge nichts von einem schwarzen Randschein deutlich bemerken kann.

Ich hätte erwartet, bei den Versuchen mit farbigen Complementärschatten im finstern Zimmer eine vorwaltende Intensität der objectiven und subjectiven Farbe, also farbige Randscheine, an den an einander gränzenden Rändern beider Schatten wahrzunehmen; habe aber diess nie finden können. Die Schatten, gross oder klein, schienen mir immer gleichmässig farbig in ihrer ganzen Ausdehnung.

f) Resumé.

1) Die Contrastempfindung als Empfindung eines Unterschiedes zwischen differenten sinnlichen Eindrücken tritt zu der Summe der Empfindungen, welche von den differenten Eindrücken abhängen, als eine eigenthümliche Seelenaffection hinzu (S. 74).

2) Wenn die Gleichförmigkeit eines Empfindungsreizes, der in räumlicher oder in zeitlicher Continuität wirkt, dadurch unterbrochen wird, dass der Reiz stellen- oder zeitweise vermindert oder beseitigt wird, so nimmt die Summe der Empfindung vermöge verminderter Summe des Empfindungsreizes im Ganzen ab; zugleich aber entsteht ein Contrast zwischen dem Mehr und Weniger des Reizes, welcher macht, dass der Totaleffect für die Seele durch die stellen- oder zeitweise Verminderung des Empfindungsreizes doch vielmehr wächst als abnimmt (S. 74).

3) Die sogenannte Hebung der Eindrücke durch den Contrast, vermöge deren Weiss neben Schwarz lichter, Schwarz neben Weiss tiefer schwarz erscheint, als in continuo betrachtet, ist ein Nebeneffect der Contrastempfindung, ohne dass sich diese darauf reducirt oder davon abhängt, oder wesentlich damit in Verbindung ist, da vielmehr diese Hebung unter Umständen fehlen oder durch Gegenwirkungen überwogen sein kann, ohne dass desshalb die Contrastempfindung fehlt (S. 77).

4) Die Hebung der Eindrücke durch den Contrast hängt zum Theile von einem Vergleichsurtheile ab; das Weiss erscheint neben dem Schwarz heller, das Schwarz neben dem Weiss dunkler, als jedes in continuo betrachtet, weil das Weiss dabei mit

Digitized by Google

etwas Dunklerem, das Schwarz mit etwas Hellerem als mit sich selbst verglichen wird. Zum Theil aber ist die Hebung Sache einer durch die Nachbarschaft ungleicher Reize abgeänderten sinnlichen Empfindung. Die physiologische Thätigkeit, auf welcher die Lichtempfindung beruht, wächst auf dem Weiss durch Nachbarschaft des Schwarz, und nimmt ab auf dem Schwarz durch Nachbarschaft des Weiss, gegen den Fall der Continuität der Eindrücke; was man unter triftiger Bestimmung des Begriffes der Empfindlichkeit auch kurz so ausdrücken kann: die Empfindlichkeit für das Licht nehme durch benachbartes Dunkel zu, durch benachbartes Licht ab. Hiefür sprechen folgende Thatsachen.

5) Sollte die Hebung überall nur von einem Vergleichsurtheile abhängen, so müsste das Weiss durch Nachbarschaft des Schwarz um eben so viel an Helligkeit als das Schwarz durch die Nachbarschaft des Weiss an Schwärze zuzunehmen scheinen gegen den Fall, dass jedes in continuo betrachtet wird. Nach den im Abschnitt *d)* angeführten Versuchen aber fehlt das Hebungsphänomen unter vergleichbaren Umständen oft auf dem Weiss oder ist durch Gegenwirkungen überwogen, wo es auf dem Schwarz deutlich ist, und erscheint überhaupt in den meisten Fällen augenfälliger auf dem Schwarz als Weiss, was keine Erklärung nach dem Vergleichsurtheile, wohl aber aus dem Gesichtspuncte zulässt, dass dieselbe Abänderung des Lichts, mithin auch der innerlich dadurch erweckten Thätigkeit leichter gespürt wird, wenn sie eine kleine, als wenn sie eine grosse Intensität betrifft.

6) Auch zeigen verschiedene Personen für die Wahrnehmung der Hebungsphänomene eine eben so verschiedene Empfänglichkeit als für andere subjective Phänomene, welche nachweisbar mit einem Spiele der Empfindlichkeit zusammenhängen, und namentlich scheinen Personen mit sehr kräftigen Augen wenig empfänglich dafür.

7) Drei Ursachen wirken der Hebung durch den Contrast im Gebiete des Gesichtssinnes entgegen, und können unter Umständen dieselbe überbieten, Lichtdiffusion von der hellen Contrastcomponente auf die dunkle hinüber, abhängig von Zerstreuung und secundärer Zurückwerfung des Lichts im Auge, Irradiation (welche sich jedoch nur auf geringe Weite erstreckt), und eine mit der Dauer allmälig zunehmende Um-

stimmung der Empfindlichkeit. Hiedurch gehen nicht selten Erscheinungen hervor, welche ich kurz als verkehrte Contrastphänomene bezeichnet und durch Thatsachen erläutert habe (S. 91 ff.).

8) Die Hebung durch den Contrast so wie die Gegenwirkungen dagegen sind nicht blos in unmittelbarer Nähe der Contrastgränze, sondern auch, mit abnehmender Stärke, von da in distans spürbar, wie die Thatsachen S. 105 ff. beweisen.

9) Das Hebungsphänomen erlangt die grösste Stärke, wenn um einen Theil des Gesichtsfeldes von constant gehaltener objectiver Helligkeit das ganze Gesichtsfeld ringsum abwechselnd verdunkelt und erhellt wird, worüber sich Versuche mit Schatten, welche durch Oeffnungen im Laden eines finstern Zimmers erzeugt werden, anstellen lassen (S. 109). Die objectiv gleichbleibende Helligkeit eines Schattens erfährt hiebei entsprechend auffällige und zwingende quantitative subjective Wechsel, als die Farbe des subjectiven Complementärschattens bei den bekannten Versuchen im finstern Zimmer qualitative erfährt, wenn das Farbeglas gewechselt wird.

10) Davon, dass die Hebung durch den Contrast mit der Entfernung von der Contrastgränze abnimmt, hängen Randscheine ab, welche sich von der Contrastgränze an mit abnehmender Intensität des Hellen und Dunklen in den Grund verlaufen, und unter Umständen gar nicht, unter Umständen ausserordentlich deutlich sichtbar sind (Abschnitt *e* S. 115 ff.).

11) Die Randscheine werden unsichtbar, wenn der Helligkeitsunterschied, den sie auf dem Grunde erzeugen, zu gering ist gegen die absolute Helligkeit des Grundes, wenn sie sich zu allmälig in den Grund verlaufen oder von den entgegengesetzten Randscheinen der Diffusion und Irradiation überwogen werden.

12) Sie sind im Allgemeinen leichter sichtbar auf der dunklen als hellen Contrastcomponente, und leichter sichtbar auf aneinander gränzenden Abstufungen von Grau als auf aneinander gränzendem Schwarz und Weiss.

13) Die Erscheinung derselben gestaltet sich zu einem frappanten Phänomen bei einer Stufenreihe an einander gränzender Helligkeiten, wie Schwarz, Dunkelgrau, Mittelgrau, Hellgrau, Weiss, wenn man die Fläche mit dieser Helligkeitsabstufung noch überdiess mit einem durchscheinenden Papiere oder hellfarbigen Glase überdeckt oder Abends bei sehr schwachem Lam-

Digitized by Google

penlichte betrachtet; so wie auch multiple, von einer Mehrheit von Kerzen erzeugte, sich partiell deckende Schatten, und rasch gedrehte Scheiben, auf denen verschiedene Abstufungen von Grau concentrisch durch geeignete Vertheilung von Schwarz und Weiss entstehen, die von den Randscheinen abhängigen Schattirungen sehr schön zeigen.

14) Die mehrfach vorfindliche Angabe, dass der Eindruck einer Farbe, welche das ganze Gesichtsfeld erfüllt, nach kurzer Zeit erlöscht, hat sich zwar für Blau, aber nicht Roth bestätigt; ein Unterschied, der mit einem schon bekannten Unterschiede zwischen brechbaren und minder brechbaren Farben zusammenzuhängen scheint (S. 117).

g) Nachtrag bezüglich einer, mit der vorstehenden verwandten, Untersuchung von Helmholtz.

Vorstehende Abhandlung wurde nach dem, am 1. Juli darüber gehaltenen, Vortrage am 2. Juli in Druck gegeben, als mir, am 4. Juli, durch besondere Vergünstigung unmittelbar aus der Druckerei, das zweite Heft von Helmholtz's physiologischer Optik zukam, in welcher sich unter andern schätzbaren Bereicherungen der Wissenschaft auch eine Untersuchung über Contrastempfindung findet. Natürlich bot dieselbe vielfachen Anlass zur Rücksichtsnahme dar; um indess die Unabhängigkeit, in welcher die hier mitgetheilte Untersuchung geführt worden ist, auch in der Form bestehen zu lassen, habe ich darin nichts zusetzen oder ändern wollen, sondern trage die Puncte, auf welche ich noch einzugehen veranlasst wurde, hier im Zusammenhange besonders nach. Wie es bei unabhängig von einander geführten Untersuchungen zu geschehen pflegt, dass sie in gewissen Puncten zusammentreffen, in gewissen sich ergänzen und in gewissen von einander abweichen, ist es auch hier der Fall gewesen.

Als Puncte des Zusammentreffens bezeichne ich insbesondere die Bemerkungen und Beobachtungen, p. 339: »dass die Contrasterscheinungen bei kleinen Unterschieden der Beleuchtung verhältnissmässig deutlicher als bei grossen sind« (wenn schon ich diesen Satz nur in gewissem Sinne und nur mit Beschränkung statuire); p. 393; »dass bei lang anhaltender Fixation durch die Ermüdung des Auges eine Reihe von Erscheinungen eintritt, die zum Theil den entgegengesetzten Erfolg, als

Digitized by Google

der ursprüngliche Contrast, herbeiführen«; p. 397: dass der Eindruck des Roth nicht schwindet, »selbst wenn wir uns längere Zeit in einem Raume befinden, welcher sein Licht nur durch ein homogen rothes Glas empfängt«; blässeres Roth aber dabei weisslich erscheinen kann; p. 400: dass verkehrte Contrasterscheinungen eben so von Diffusion als allmäliger Umstimmung abhängen können; p. 413: »dass eine gedrehte Scheibe mit angemessen angebrachtem Schwarz und Weiss ein besonders geeignetes Mittel liefert, die von der Hebung abhängigen Randscheine zur Wahrnehmung zu bringen; und p. 414, dass eine am Contrastrande eingeschobene schmale schwarze Linie zwischen Abstufungen von Grau die Entstehung eines Randscheines verhindert.

Als Puncte der Ergänzung bezeichne ich, dass Helmholtz (p. 404 ff.) eine Reihe Fälle näher untersucht hat, wo die hebende Contrastwirkung zwischen Farben nicht mehr allein von einer bestimmten Vertheilung der Farben im Gesichtsfelde abhängt; vielmehr bei gleicher Vertheilung die Hebung einmal spürbar sein kann, das andremal nicht, je nachdem wir durch, oft sehr geringfügige, Nebenbestimmungen der Versuche veranlasst sind, die contrastirenden Felder als ein Continuum aufzufassen oder als selbstständig gegeneinander. Hingegen habe ich meinerseits die Dissymmetrie der hebenden Contrastwirkung auf Schwarz und Weiss bei Wechsel der einen Componente und bei den Contrastrandscheinen bemerkt und einer näheren Betrachtung unterzogen.

Es freut mich, zu finden, dass in den Thatsachen kein Widerspruch zwischen beiden Untersuchungen besteht, aber an das, worin sie sich ergänzen, hat sich eine aus gewissem Gesichtspuncte wesentlich abweichende Auffassung der Thatsachen geknüpft, die sich, wenn ich nicht irre, doch auch zu einer sich ergänzenden wird verknüpfen lassen.

Wie aus meiner Abhandlung zu ersehen, mache ich die hebende Wirkung beim simultanen Contraste von ganz entsprechenden Gründen abhängig, als bei dem successiven, einerseits von einem Acte des Urtheils (Vergleichsurtheil), anderseits von einer Abänderung der Empfindlichkeit und mithin Empfindung durch die Nachbarschaft ungleicher Reize, wobei ich es noch in Zweifel stellte, ob bei manchen Versuchsformen des simultanen Contrastes der Act des Urtheils überhaupt wesentlich ins Spiel

Digitized by Google

komme, ohne es entscheiden zu wollen. Hiegegen hält Helmholtz (p. 392) die Erscheinungen des simultanen Contrastes »von ganz anderer Art« als die des successiven, indem er beide in der Weise auseinanderhält, dass er für das, was ich die hebende Wirkung nenne, bei dem successiven Contrast blos die Abänderung der Empfindlichkeit, bei dem simultanen blos den (etwas allgemeiner als von mir gefassten) Act des Urtheils als Ursache in Anspruch nimmt. Die Hauptabweichung liegt also darin, dass Helmholtz für den reinen Simultan-Contrast blos den Act des Urtheils als Grund gelten lässt und berücksichtigt; indess ich ihn nur mit, und sogar in vielen Fällen nur zweifelhaft als Grund gelten gelassen habe.

Die Versuche und deren Analyse, auf welche Helmholtz seine Ansicht stützt, sind so scharfsinnig, wie Alles, was von diesem Forscher herrührt; doch gestehe ich, dass mir dadurch nur die Mitwirkung des Urtheilsactes in den Fällen, auf welche seine Ansicht wesentlich gegründet ist, zweifelsfreier als früher geworden ist, ohne dass ich doch das Allgemeine der in dieser Abhandlung aufgestellten Ansichten aufzugeben vermöchte; und es sei mir gestattet, hierüber in einige Erörterungen einzugehen, worin ich eben so das Eigenthümliche und Treffende der Helmholtz'schen Untersuchung hervorzuheben, als meine eigene Auffassung gegenüber aufrecht zu halten suchen werde.

Ich knüpfe dabei an den Hauptversuch an, welchen nach meinem Urtheile die Ansicht von Helmholtz als Stütze aufzuweisen hat, dem jedoch im Original noch mehrere andere, auf gleichem Princip beruhende, und nach gleichem Princip zu deutende folgen. Er lautet wörtlich so (p. 404):

»Wenn man ein weisses, graues oder schwarzes Papierschnitzelchen auf ein farbiges Quartblatt oder Octavblatt legt, und diese etwa aus einem Fuss Entfernung betrachtet, sieht man in der Regel, genaue Fixation vorausgesetzt, nichts oder nur zweifelhafte Spuren von der Contrastfarbe. Wenn man aber, wie in dem früher beschriebenen Versuche von Meyer, das farbige Octavblatt mit einem Octavblatt dünnen Briefpapiers bedeckt, erscheint auffallender Weise die Contrastfarbe ganz deutlich und constant, trotzdem die Farbengegensätze dadurch ausserordentlich abgeschwächt werden. Auch hier ist es am vortheilhaftesten, wenn das Schnitzelchen grau ist und ungefähr dieselbe Helligkeit wie das farbige Papier besitzt.

»Das farbige Papier, von dem Briefpapier bedeckt, bildet einen sehr schwach gefärbten weisslichen Grund. Wo das graue Schnitzelchen unterliegt, ist die objective Farbe des oberen Papiers rein weiss. Jetzt sollte man erwarten, dass wenn man die objectiv weisse Stelle mit einem weis-

sen oder hellgrauen Schnitzelchen bedeckt, welches man oben auf das Briefpapier legt, dieses auch complementär zum Grunde erscheinen sollte. Aber wunderbarer Weise ist das nicht der Fall; ein solches erscheint in seiner objectiven Farbe, und ohne Contrast. Ja wenn man sich ein Schnitzelchen auswählt, welches genau dieselbe Farbe und Helligkeit hat, wie das Briefpapier über der grauen Unterlage, dies an die entsprechende Stelle des Briefpapiers hinschiebt, und nun anfängt die Farben beider Stellen genau mit einander zu vergleichen, so schwindet die Contrastwirkung auch auf der weissen Stelle des Briefpapiers, wo sie früher bestand, und diese erscheint nun weiss, so lange man das andere Schnitzelchen zur Vergleichung daneben hat. Ferner schwindet die Contrastfarbe auch, wenn man die Umrisse des unterliegenden grauen Schnitzelchen auf dem Briefpapier mit schwarzen Strichen nachzeichnet. Es bleibt also die Contrastfarbe nur so lange bestehen, als die beiden Felder durch nichts anderes von einander geschieden sind, als durch ihren Farbenunterschied. Sobald das eine Feld als ein selbständiger Körper oder durch einen bestimmt gezeichneten Umriss abgegrenzt ist, verschwindet die Wirkung oder wird wenigstens sehr viel zweifelhafter.«

Die genauere Erklärung, die Helmholtz von dem Erfolge dieses Versuches gibt (p. 407), kommt wesentlich auf Folgendes zurück: sei das farbige Blatt grün, so scheint diess durch das weisse Briefpapier grünlich durch, während das mit dem Briefpapier überdeckte Schnitzelchen in Verbindung mit seiner weissen Decke objectiv nur weisses Licht hergibt. Indem wir aber, wegen allen Mangels der Abgränzung in der grünlichen Decke, unwillkührlich veranlasst sind, diese über das Schnitzelchen fortgesetzt und dieses darunter zu denken, zerlegen wir auch demgemäss das Weiss an der Stelle des Schnitzelchen durch die innere Auffassung in ein oberes Grün der Decke und ein darunter liegendes dazu complementäres Roth, welche beide gemischt das wirkliche Weiss der Decke wiedergeben würden, aber hier durch das Urtheil aus einander gehalten werden (was, wie Helmholtz zeigt, auch noch in vielen andern Fällen geschieht), so dass wir hier nicht sowohl die blosse Complementärfarbe Roth als ein durch die fortlaufend gedachte grünliche Decke durchscheinendes Roth zu sehen glauben. So wie aber der Anlass wegfällt, die grünliche Decke über das Schnitzelchen fortgesetzt zu denken, indem wir dasselbe über statt unter der Decke anbringen, fällt mit der Ursache auch die Wirkung weg.

Dieser sinnreichen Erklärung könnte man nur etwa folgende Ablehnung entgegenzusetzen versuchen: Da man doch sehr wohl zu unterscheiden weiss, ob das Papierschnitzelchen,

Digitized by Google

gleichviel von welchem Dunkelheitsgrade, sich über oder unter der Decke befindet, ja da Beides einen sehr verschiedenen Eindruck macht, so müssen irgendwelche, die Continuitätsverhältnisse des Lichteindrucks betreffende, physische Unterschiede beider Fälle vorhanden sein, diese können aber auch einen physischen Einfluss äussern, d. h. unabhängig von aller Bestimmung des Urtheils direct auf die Vertheilungsweise der, der Empfindung unterliegenden, physiologischen Thätigkeit wirken; indem die Contrastwirkungen zwischen aneinander gränzenden Flächen wohl nicht blos von der Vertheilungsweise, sondern auch gegenseitigen Begränzungsweise der Lichteindrücke abhängen werden, da zumal eine so starke Bestimmung des Urtheils, dass das Grün der Decke über das Schnitzelchen irrthümlich fortgesetzt gedacht wird, einen entsprechend starken sinnlichen Bestimmungsgrund voraussetzt. Die Wirkung der schwarzen Zwischenlinie wäre entsprechend zu deuten. Ich halte diese Ablehnung kaum für streng widerlegbar; aber doch die Helmholtz'sche Erklärung für so viel ansprechender, ungezwungener, und durch die anderweiten sinnreichen Betrachtungen, mit denen sie von Helmholtz in Beziehung gesetzt wird, zu gut unterstützt, als dass sich der Einfluss des Urtheils in der von Helmholtz aufgestellten Weise füglich bezweifeln liesse; wenn schon ich es sehr möglich halte, dass der physische Umstand auch nicht ganz einflusslos sein mag. Unstreitig aber wird die Helmholtz'sche Anstellungsweise und Analyse dieses Versuches gleiche überzeugende Kraft für Jeden bewähren.

Zunächst scheint diese Erklärung keine Anwendung auf manche andere Fälle, wie das Phänomen der farbigen Schatten, zuzulassen; indess verallgemeinert Helmholtz dieselbe unter Zuziehung anderweiter Betrachtungen auch auf solche Phänomene wie folgt (p. 408): »Wir gewöhnen uns, von allen farbigen Flächen ohne Unterschied, so weit sie im Bereiche der farbigen Beleuchtung sind, die Farbe der Beleuchtung abzuziehen, um die Körperfarbe zu finden. Dasselbe thun wir nun bei den farbigen Schatten, wo zwei farbige Beleuchtungen sich verbinden. Kommen Körperlicht und Tageslicht zusammen, so ist die Beleuchtung des Grundes weisslich rothgelb. Dieses Rothgelb der Beleuchtung subtrahiren wir nun auch von der Farbe des Schattens, zu dem gar kein Körperlicht gelangt, und halten dieses für blau, während es weiss ist.«

Endlich werden diese Erklärungen von Helmholtz einem allgemeinen Principe untergeordnet, welches er an die Spitze der Erklärung der gesammten Erscheinungen des Simultan-Contrastes stellt und mit einigen Nebenbestimmungen (p. 392) wie folgt ausspricht:

»Sie (diese Erscheinungen) lassen sich im Allgemeinen charakterisiren als Fälle, in denen eine genaue Beurtheilung der reagirenden Farbe durch Vergleichung mit anderen als der inducirenden nicht möglich ist*). In solchen Fällen sind wir geneigt, diejenigen Unterschiede, welche in der Anschauung deutlich und sicher wahrzunehmen sind, für grösser zu halten, als solche, welche entweder in der Anschauung nur unsicher heraustreten oder mit Hülfe der Erinnerung beurtheilt werden müssen. Es ist diess wohl ein allgemeines Gesetz bei allen unseren Wahrnehmungen. Ein Mensch mittlerer Grösse neben einem sehr grossen sieht klein aus, weil wir im Augenblicke sehen, dass es grössere Menschen gibt, aber nicht, dass es auch kleinere Menschen gibt. Derselbe Mensch mittlerer Grösse, neben einen kleinen gestellt, wird gross aussehen. Zwei Farben oder zwei Helligkeiten werden nun am sichersten verglichen, wenn sie im Gesichtsfelde ganz dicht neben einander gränzen und ihre Gränze eben durch nichts weiter als ihren Unterschied bezeichnet ist. Je weiter sie von einander getrennt sind, desto schwerer ihre Vergleichung; noch schwerer, wenn die eine nur aus der Erinnerung gegeben werden kann . . . . Es sind ferner Täuschungen in der Beurtheilung kleiner Unterschiede leichter möglich, als bei grossen Unterschieden, dem entsprechend sind die Contrasterscheinungen auch bei kleinen Unterschieden der Beleuchtung verhältnissmässig deutlicher als bei grossen. Endlich erscheint ein Unterschied, welcher die einzige Ursache der Trennung benachbarter Flächen ist, grösser, als wenn er einer unter mehreren ist.«

Hiezu noch folgende Ausführung (p. 396): »Wenn im Gesichtsfelde eine besondere Farbe überwiegend verbreitet ist, so erscheint uns eine weisslichere Abstufung desselben Farbentons als Weiss, und wirkliches Weiss als complementär gefärbt. Es wird also der Begriff dessen, was wir Weiss nennen, dabei ver-

---

*) Inducirende Farbe diejenige, von welcher die hebende Wirkung ausgeht, reagirende die, an welcher sie sich äussert.

Digitized by Google

ändert. Nun ist die Empfindung des Weiss keine einfache Empfindung, sondern in einem bestimmten Verhältnisse zusammengesetzt aus den Empfindungen der drei Grundfarben. Um nun in einem bestimmten Falle eine gegebene Farbe als Weiss anzuerkennen, wenn uns die Möglichkeit fehlt, sie mit anderem Weiss zu vergleichen, welches als solches anerkannt ist, müssen wir das Intensitätsverhältniss der drei darin enthaltenen Grundfarben als verändert oder unverändert wieder erkennen. Die Vergleichung der Intensität verschiedener Farbenempfindungen ist aber, wie wir in §. 21 gesehen haben, eine höchst unsichere und ungenaue. Es kann also auch die darauf beruhende Bestimmung des Weiss keine sehr genaue sein, sondern es werden ziemlich bedeutende Schwankungen in dem, was wir zu verschiedenen Zeiten für Weiss halten, möglich sein, wie wir es denn auch wirklich finden.«

Die genauere Erläuterung dieses Princips oder dieser Principien kann freilich nur in der Durchführung derselben gefunden werden, in welche Helmholtz eingegangen ist, und hierüber muss ich auf das Original verweisen, nachdem ich mit Fleiss diejenigen Fälle herausgehoben habe, wo die Anwendbarkeit derselben unmittelbar am einleuchtendsten erscheint; indem sich die Gründe, welche das schwankende Urtheil in gewisser Richtung bestimmen, am leichtesten dabei darbieten.

Ohne nun dieser Auffassung im Allgemeinen widersprechen zu wollen, da ich ja selbst den Act des Urtheils bei den in Rede stehenden Phänomenen nicht ausgeschlossen habe, scheint mir doch in Betreff des gegentheiligen Ausschlusses einer Mitwirkung der Empfindung zuvörderst Folgendes im Allgemeinen gegenzubemerken.

Fast überall wirkt beim willkührlichen und unwillkührlichen Gebrauche unserer Sinne ein Act des Urtheils mit der Empfindung zusammen, und trägt, meist unbewusst, bei, den Eindruck zu bestimmen; ich erinnere daran, wie ein in doppelter Entfernung gehaltener Finger uns durch einen Act des Urtheils als gleich gross mit einem in einfacher Entfernung gehaltenen erscheint, ungeachtet sein Bild auf der Netzhaut nur halb so gross ist. Also wird es uns freilich auch nicht befremden können, wenn bei Beurtheilung der Helligkeits- und Farbenverhältnisse der Act des Urtheils eine wichtige Rolle spielt. Aber da die Empfindung nicht minder gewiss eine Rolle dabei spielt,

Digitized by Google

so wird der Nachweis einer Wirksamkeit des Urtheilsactes bezüglich irgendwelcher Bestimmungen dieser Verhältnisse nicht genügen, die Mitwirkung der Empfindung auszuschliessen, wenn nicht die Erfolge so von statten gehen, dass sie blos nach den Gesetzen des ersten, nicht aber der letzten erklärt werden können. Dass dem aber so sei, vermöchte ich nicht zuzugestehen.

Unstreitig zwar kann die von mir geltend gemachte Dissymmetrie des Hebungsphänomens auf Schwarz und Weiss auch durch einen Act des Urtheils erklärt werden, aber man muss diesem dazu eine demgemässe Bestimmung erst gewissermassen octroyiren, indess diese Dissymmetrie naturgemäss aus bekannten Verhältnissen der Empfindung fliesst, wie ich S. 83 f. zu zeigen gesucht habe. Der ferner von mir geltend gemachte Umstand, dass verschiedene Personen das Hebungsphänomen mit so sehr verschiedener Deutlichkeit wahrnehmen, mag bei der allgemeineren Fassung des Urtheilsactes durch Helmholtz auch nicht so durchschlagend sein, als es mir schien, da ich denselben blos aus dem beschränkteren Gesichtspuncte eines Vergleichsurtheiles in der S. 78 angegebenen Weise fasste, und man kann überhaupt fragen, warum sollte nicht das Urtheil verschiedener Personen so gut verschieden sein können, als ihre Empfindlichkeit. Doch scheint mir auch hier die Ableitung dieses Umstandes von Verhältnissen der Empfindlichkeit ungezwungener, als von Verhältnissen des Urtheils, von dem man meinen sollte, dass es durch die Vorkommnisse des Lebens in ungefähr gleichem Sinne erzogen werden müsste; und diess würde um so mehr gelten, wenn die S. 98 von mir geäusserte Vermuthung sich bestätigen sollte, dass Augen, die leicht ermüden, auch empfänglicher für das Hebungsphänomen sind. Da jedoch die gelegentlich von mir gemachten Erfahrungen in dieser Hinsicht bei Weitem nicht hinreichen, diess zu beweisen, kann ich auch diesen Punct nicht weiter urgiren. Was aber den für eine Reihe von Erscheinungen im Sinne der Helmholtz'schen Auffassung fundamentalen Satz anlangt: »Es sind Täuschungen in der Beurtheilung kleiner Unterschiede leichter möglich, als bei grossen Unterschieden, dem entsprechend sind die Contrasterscheinungen auch bei kleinen Unterschieden der Beleuchtung verhältnissmässig deutlicher als bei grossen«, so kann ich demselben weder im Princip noch in der Consequenz die für den Zweck der Erklärung zulängliche Allgemeinheit zugestehen. Denn sonst gilt vielmehr das Princip,

Digitized by Google

dass die Fehler der Beurtheilung mit der Grösse des zu Beurtheilenden wachsen; und wenn ich nach der Versuchsform (S. 99 f.) in der Nachbarschaft eines schwarzen Mittelfeldes Weiss und Schwarz wechseln lasse, während ich den Blick auf das Mittelfeld fixire, ist das Hebungsphänomen auf demselben deutlicher, als wenn ich Grau und Schwarz in der Nachbarschaft wechseln lasse. Der Simultancontrast des Weiss gegen das Schwarz des Mittelfeldes bringt hier offenbar eine stärkere Wirkung hervor, als der Simultancontrast des Nachbargrau dagegen. Eben so wächst die Deutlichkeit des Randscheins auf Dunkelgrau, mit je hellerem Grau ich dasselbe combinire, und ist am deutlichsten bei Combination mit Weiss; ohne dass ich einen Anhalt fände zu sagen, dass doch die Wirkung verhältnissmässig erstenfalls stärker als zweitenfalls sei. Warum aber überhaupt auf Grau deutlichere Randscheine erwartet werden können, als auf Weiss und Schwarz, ist aus Verhältnissen der Empfindung nach dem Princip S. 84 und 85 wohl erklärlich, und dasselbe Princip auf verwandte Fälle übertragbar. Wie endlich ist überhaupt das Zustandekommen eines Randscheines, der mit der Entfernung von der Contrastgränze an Intensität abnimmt, nach den Helmholtz'schen Principien erklärlich? Nach p. 414 daraus, dass die Sicherheit des Vergleiches mit der Entfernung vom Contrastrande abnimmt; die am sichersten wahrzunehmenden Unterschiede aber nach Helmholtz für die grössten gehalten werden; aber von anderer Seite werden doch auch wieder von Helmholtz Hebungsphänomene von Täuschungen des Urtheiles abhängig gemacht; und desshalb bei kleinen Unterschieden, als den Täuschungen leichter zugänglich, deutlicher als bei grossen gefunden. Ich gestehe, diese Incongruenz nicht klar auflösen zu können, wenn nicht vielleicht hier ein Missverständniss meinerseits obwaltet, oder die Incongruenz in einen Conflict übersetzbar ist. Für die Annahme, dass hier Verhältnisse der Empfindung vorliegen, indem, wie ich mich ausdrückte, der Lichtreiz nach Art eines Blasenpflasters ableitend auf die Umgebung wirkt, ist jedenfalls Alles selbstverständlich; er muss natürlich auf die Nähe stärker als auf die Ferne wirken. Und wenn ich unbedingt zugebe, dass bezüglich des Meyer'schen Versuchs und seiner Parallelversuche die Ableitung aus Empfindungsverhältnissen gezwungener ist, als aus dem Urtheilsacte, so scheint mir nach vorgenannten Beziehungen das umgekehrte Verhältniss obzuwalten.

Digitized by Google

Abgesehen von diesen Schwierigkeiten der gegentheiligen Auffassung will ich zur Unterstützung der von mir vertretenen Auffassung noch auf ein paar Puncte hinweisen, die, wenn auch meist nicht für sich durchschlagend, sofern sie nur indirecter Natur sind, doch sehr geeignet sind, anderweite Gründe zu verstärken, indem sie sich auf das Bedürfniss beziehen, analoge Phänomene unter einem gemeinsamen Gesichtspunct zu verknüpfen. Doch scheint mir die auf S. 141 f. anzuführende Beobachtung direct und bindend.

1) Wenn man sich viel im Zusammenhange mit Versuchen über successiven und simultanen Contrast beschäftigt, drängt sich — wenigstens dürfte diess den Meisten so wie mir ergehen — von selbst so sehr das analoge Verhalten des Nach und des Neben auf, dass ein gewisser Widerstand gegen eine Ansicht, welche ein wesentlich verschiedenes Princip dafür einführt, natürlich ist.

Um ein paar Beispiele aus dem Kreise der in letzter Zeit von mir gemachten Beobachtungen anzuführen, wo sich mir der identische Charakter der successiven und simultanen Contrastphänomene besonders auffällig aufgedrängt hat, so will ich zuvörderst auf einen in der folgenden Abhandlung gelegentlich mitgetheilten Versuch hinweisen. Ein objectiv und ein subjectiv farbiger Schatten werden neben einander auf die bekannte Weise im finstern Zimmer erzeugt. Lasse ich (in der später genauer anzugebenden Weise) den Blick durch eine schwarze Röhre von dem objectiv farbigen Schatten auf den subjectiv farbigen übergehen, ehe ich etwas von der subjectiven Farbe mit freiem Auge gesehen, so erscheint der Schatten durch successiven Contrast subjectiv gefärbt. Nehme ich die Röhre vor das Auge*) und richte sie direct auf den subjectiv gefärbten Schatten, nachdem ich denselben frei angesehen, so erscheint er durch Persistenz der Simultan-Contrastwirkung subjectiv gefärbt. Beide Versuchsweisen geben mir die ganz gleiche Erscheinung in gleich zwingender Weise. Hieraus wäre nun freilich nicht nothwendig auf wesentliche Gleichheit des, beiden Phänomenen unterliegenden, Grundes zu schliessen, aber ich würde mich doch nur durch sehr bindende Gründe veranlasst finden, solche nicht vorauszusetzen.

*) Das andere dabei immer geschlossen.

Digitized by Google

Auf S. 88 habe ich anmerkungsweise, ohne besonderes Gewicht darauf zu legen, angeführt, dass eine Contrast-Nebenfarbe eine zu ihr complementäre, also der objectiven wieder gleiche, Nachfarbe nach sich ziehen kann, was zwar nur unter günstigen Versuchsbedingungen gelingen mag, aber, nachdem ich mich selbst davon frappirt fand, an verschiedenen Tagen und mit verschiedenen Farbengläsern ganz zweifelsfrei gelungen ist. Es würde unstreitig schwer sein, sich zu denken, dass eine Farbe, die blos Sache eines Urtheils ist, eine Farbe, die Sache der Empfindung ist, zur Nachwirkung haben kann.

Heute, an einem der hellsten und heissesten Tage des bisherigen Sommers, den 17. Juli gegen Mittag, ging ich auf der Strasse, auf welche die Sonne ihre Stralen schoss, und es fiel mir auf, dass ich in dem vor mir wandelnden vom grellen Sonnenschein umgebenen Schatten fast gar nichts von dem Sande und den Steinchen des Weges zu unterscheiden vermochte, indess ich diess doch eben so wohl in der hellen Umgebung des Schattens als namentlich in dem ausgedehnten Schatten eines Hauses vermochte, der objectiv genommen mit dem Schatten meines Körpers von gleicher Dunkelheit, wenn nicht gar, wegen Abhaltung eines grössern Theils des zerstreuten Himmelslichtes, noch etwas dunkler war. Auch brauchte ich nur durch die als Röhre zusammengenommene Hand mit einem Auge unter Schluss des andern auf den Schatten meines Körpers zu blicken, um die Kleinigkeiten des Bodens deutlich zu erkennen. Hier haben wir dieselbe Erscheinung im Neben, die wir im Nach haben, wenn wir aus dem Hellen in ein Dämmerungsdunkel treten, und ich gestehe wieder, nicht zu wissen, wie das Urtheil den Erfolg im Neben sollte bedingen können. Man kann vielleicht sagen, es ist ein, dem Urtheilsact verwandter, Act der Aufmerksamkeit, der hier den Erfolg bestimmt. Die Aufmerksamkeit wird durch das den Schatten umgebende grelle Sonnenlicht so sehr beschäftigt, dass die Unterscheidung der Gegenstände im Schatten leidet. Aber mit aller möglichen willkührlichen Anstrengung der Aufmerksamkeit war ich nicht entfernt im Stande, die kleinen Unterschiede des Bodens im Schatten meines Körpers eben so deutlich zu unterscheiden, als im Schatten des Hauses bei gar nicht angestrengter Aufmerksamkeit. Hingegen lässt die Ansicht, dass hier im Neben entsprechend abgeänderte Verhältnisse der Empfindlichkeit und mithin Empfindung vorliegen, als im

Digitized by Google

Nach, eine doppelte Erklärung zu, die möglicherweise mit einander besteht. Der begränzte Schatten des Körpers inmitten des Sonnenscheins erscheint des Contrastes halber subjectiv viel dunkler als der breite Schatten des Hauses, was sich durch einen directen Vergleich constatiren lässt, wenn man in der Nähe eines Hausschattens steht. Bei Nacht aber sind alle Kühe schwarz. Von anderer Seite wäre möglich, dass eben so wie starkes Licht die Empfindlichkeit für schwächeres sowohl nach als neben sich mindert, auch ein starker Lichtunterschied, wie ihn der Schatten mit dem umgebenden Sonnenlicht darbietet, die Empfänglichkeit für die Auffassung von schwächeren Unterschieden sowohl nach sich als neben sich beschränkte.

Nun sagt man vielleicht: der successive Erfolg ist vielmehr eine Sache successiven als simultanen Contrastes, indem die vom vorherigen freien Umblick in das Helle hervorgebrachte Ermüdung des Auges sich bei nachheriger Fixirung des Schattens noch geltend macht. Aber sofort, wenn man die Hand als Röhre vornimmt, wird unter sichtlichster Erhellung (da dieser Versuch unter das Princip des Versuches 12. S. 108 tritt) Alles im Schatten deutlicher, wogegen die Undeutlichkeit fortbesteht, wenn man den Schatten längere Zeit ohne Röhre fixirt. Vielmehr scheint mir dieser Versuch mit dem Sonnenschein ein ergänzender Gegenversuch zu dem Versuche S. 79 mit dem Mondschein, indem er eben so direct und schlagend für die Betheiligung der Empfindung als jener für die Betheiligung des Vergleichsurtheiles beweisen dürfte.

Wahrscheinlich wird dieser Versuch wie andere Contrastversuche bei verschiedenen Personen ein verschieden auffälliges Resultat geben, was aber dessen Gewicht nicht mindern kann.

2) Nach der innigen Verknüpfung, in welcher alle Theile und Thätigkeiten des Organismus unter einander stehen, dürfte es an sich wahrscheinlicher sein, dass die begränzte Reizung eines Theiles eines Sinnesorgans auf den Reizzustand der Nachbartheile influirt, als dass sie nicht darauf influirt. Wir sehen, dass ausserhalb der Sinnessphäre die Reizung eines Theiles die Nachbarschaft nach Umständen antagonistisch herabstimmt oder sympathisch mit erregt. Es kann also nicht unmotivirt erscheinen, wenn Phänomene der Sinnessphäre, die sich demselben Principe unterordnen lassen, demselben untergeordnet werden, wie ich diess gethan, indem ich die directen Contrastphä-

nomene vom einen, die verkehrten, so weit sie nicht von Nebenumständen abhängen, vom andern Princip abhängig machte.

3) In meiner Abhandlung über das binoculare Sehen habe ich gezeigt, dass, wenn zu Licht, was die eine Netzhaut erhellt, ein wenig Licht auf der andern Netzhaut hinzutritt, statt vermehrter Helligkeit verminderte Helligkeit entsteht. Diess lässt sich unstreitig durch keinen Act des Urtheils, sondern nur durch ein antagonistisches Verhältniss der Empfindung zwischen beiden Netzhäuten, wie ich es zur Erklärung der Hebungsphänomene beim Simultancontrast auch für Theile derselben Netzhaut annehme, erklären, so dass beide Erklärungen sich wechselseitig unterstützen. Mit jener beim binocularen Sehen beobachteten Thatsache hängen dann durch die Thatsachen des 12. Kapitels jener Abhandlung die Farben-Contrasterscheinungen des 14. Kapitels und diese mit den gewöhnlichen Contrasterscheinungen in der Weise zusammen, dass sie nothwendig dasselbe Erklärungsprincip fodern. Auch hier glaube ich, würde ein grosser Zwang dazu gehören, diesen Zusammenhang der Thatsachen einer Erklärung blos durch einen Act des Urtheils oder auch der Aufmerksamkeit anzupassen.

Wenn ich mich in dem hier verhandelten Puncte nur ungern mit einer Autorität wie der von Helmholtz in Widerspruch sehe, so ist es mir dagegen um so erfreulicher gewesen, bei ihm eine grössere und erklärtere Uebereinstimmung mit früher von mir aufgestellten Ansichten über die subjectiven Nachfarben zu finden, als deren ich mich Seitens Anderer zeither zu erfreuen gehabt; und ich kann nur wünschen, dass auch in Betreff des vorliegenden Differenzpunctes eine Ausgleichung sich ergeben möge.

Indem mir selbst durch die Versuche und Erörterungen Helmholtz's die Ueberzeugung aufgedrängt worden ist, dass der Act des Urtheils doch eine wichtigere Rolle bei den Erscheinungen des Simultan-Contrastes spiele, als ich früher vermuthete, gestehe ich freilich offen, dass mir die Weise, wie der Einfluss der abgeänderten Empfindlichkeit, den ich nicht minder festhalten muss, damit in Beziehung tritt, wie beides zusammenwirkt, aus einander zu halten und mit einander abzuwägen ist, ja wie schliesslich der Act des Urtheils selbst zu fassen ist, noch unklar ist; und ehe wir nicht eine Psychophysik der höheren Seelenthätigkeiten haben — die ich, wenn schon Verfasser einer

Digitized by Google

Psychophysik, mich nicht rühmen kann, gegeben zu haben und geben zu können, obwohl hoffend, dass sie einst wird zu geben sein — wird auch diese Unklarheit nicht zu heben sein. Inzwischen scheint mir folgende, den allgemeinen Ansichten meiner Psychophysik sich unterordnende, Auffassung des fraglichen Verhältnisses wenigstens auf dem Wege der Klarstellung zu liegen.

Unsere gesammte Seelenthätigkeit hängt an einem physischen, oder, wie ich ihn als Unterlage des psychischen nenne, psychophysischen Processe und die Empfindungen an besonderen Bestimmungen dieses Processes. Diese Bestimmungen können nun erfahrungsmässig nicht blos durch äussere Reize, sondern auch, wie die Hallucinationen und so manche andere Phänomene, die ich im 44. Kapitel meiner Psychophysik zusammenstelle, beweisen, durch innere Ursachen hervorgerufen werden; auch können erfahrungsmässig solche innere Ursachen in dem, unabhängig von äussern Reizen fortgehenden, bewussten psychophysischen Process selbst liegen. Diess sind die Einflüsse der Association, der Einbildung, des Urtheils auf die Gestaltung und selbst Entstehung von Empfindungen. Aber die Bestimmungen des psychophysischen Processes, mögen sie von Aussen oder Innen angeregt sein, werden doch derselben Art für psychische Phänomene derselben Art sein. Also meine ich nicht, dass, wenn eine Farbenerscheinung durch einen Act des Urtheils, eine Einbildung u. s. w., hervorgerufen wird, sie darum minder als eine Sache der Empfindung anzusehen sei, als wenn sie durch einen äussern oder einen innern unbewussten Reiz hervorgerufen wird, vielmehr wird ihr dieselbe Bestimmung des psychophysischen Processes unterliegen. Wenigstens macht es keine Schwierigkeit, sich die Sache so vorzustellen, und dadurch eine Verknüpfung zwischen zwei scheinbar abweichenden Auffassungen zu bewirken.

Der Verallgemeinerung dieser Auffassung scheint zwar eine Schwierigkeit entgegenzustehen. Ein in doppelter Entfernung vor dem Auge gehaltener Finger scheint mir, wie ich oben bemerkte, durch einen Act des Urtheils eben so gross, als ein in einfacher Entfernung gehaltener, und der Act des Urtheils kann doch das Bild im Auge beidesfalls nicht gleich gross machen. Das ist wahr; aber es scheint mir nur daraus zu folgern, dass die Grössenschätzungen überhaupt Sache eines psychophysischen

Digitized by Google

Verhältnisses sind, in welches die Grösse des Bildes nur als ein Element mit eingeht; in der Art, dass die Grössenschätzung sich nur dann allein darnach richtet, wenn sonst die Umstände gleich sind, nicht aber, dass diess uns unbekannte Verhältniss verschieden ist eines und andern Falles; und so wird auch die Bestimmung, an welcher die Farbenerscheinung hängt, dieselbe bleiben können, mag sie durch einen Urtheilsact oder Reiz hervorgerufen sein.

Inhalt.

		Seite
a)	Vorbemerkungen	71
b)	Allgemeines über Contraste	72
c)	Hebung der Eindrücke durch den Contrast	77
d)	Directe und verkehrte Contrastphänomene	98
e)	Vom Contrast abhängige Randscheine	115
f)	Resümé	128
g)	Nachtrag bezüglich einer, mit der vorigen verwandten, Untersuchung von Helmholtz	131

G. Th. Fechner. Einige Bemerkungen gegen die Abhandlung Prof. *Osann's* »*Über Ergänzungsfarben*« in der Würzburger naturwiss. Zeitschr. Band I. S. 61 ff.

Prof. Osann hat früherhin in drei Aufsätzen in Poggend. Ann. (XXVII. 694. XXXVII. 287. XLII. 72) darzuthun gesucht, dass die sogenannten subjectiven Contrastfarben in der That vielmehr objectiver Natur seien, und dass manche hieher gerechnete für subjectiv gehaltene Erscheinungen ihren Ursprung daher nehmen, dass die zu den Versuchen angewandten farbigen Gläser an ihrer Oberfläche die Complementärfarbe von derjenigen zurückwerfen, in der sie beim Durchsehen erscheinen. Sowohl gegen die allgemeine Behauptung der objectiven Ursache jener Erscheinungen, als gegen diesen speciellen Anlass derselben habe ich mich auf Grund einer Wiederholung der Osann'schen Versuche in Pogg. Ann. (XLIV. 221) erklärt. Prof. Osann indess beharrt nach neueren Versuchen und Erörterungen in obigem Aufsatze auf seinen Ansichten, und widerspricht der Richtigkeit meiner Gegenversuche.

Es thut mir leid, dass Prof. Osann eine rettungslose Sache noch einmal, und zwar in dieser Weise, zu vertheidigen unternimmt. Das Folgende dürfte zeigen, dass die Objectivität der fraglichen Erscheinungen durch die neue Abhandlung des Verfassers keine neue Stütze gewonnen hat, sondern nur das Feld der Wissenschaft dadurch um einen unnützen Streit bereichert worden ist.

Vor Allem habe ich mich sehr ernstlich gegen die Weise zu erklären, wie Prof. Osann meine Gegenversuche theils anführt, theils berücksichtigt. Ohne seiner Abhandlung in allen Einzelnheiten zu folgen, hebe ich dasjenige heraus, was mir für die Frage wesentlich erscheint.

Auf S. 66 seiner neuen Abhandlung führt Herr Prof. Osann

Digitized by Google

unter den Beweisen für eine Reflexion der Complementärfarbe an der Vorderfläche von Farbengläsern und für die Objectivität der davon abhängigen für subjectiv gehaltenen Phänomene einen Versuch an, der wesentlich auf Folgendes zurückkommt: eine mittelst geeigneter Vorrichtung unter verschiedenen Winkeln gegen die Horizontalebene stellbare, farbige Glasscheibe, zur Hälfte ihrer Ausdehnung auf der Hinterseite geschwärzt, wirft mit der Vorderseite gespiegeltes weisses Wolkenlicht in das Auge. Unter geeigneter Schiefe betrachtet erscheint die ganze Hälfte der Scheibe, welche hinten geschwärzt ist, complementär zur Farbe der ungeschwärzten Glashälfte; am deutlichsten an der Gränze der Schwärzung. »Diesem Versuch — sagt der Verfasser — welchen ich schon früher angestellt und beschrieben habe, ist von dem Herrn Professor Fechner in seiner Abhandlung (Pogg. XLIV. 226) widersprochen worden, indem er behauptet, man sehe die complementäre Farbe nur da, wo der dunkle Hintergrund an den hellen gränze. Ich habe diesen Versuch neuerdings wiederholt, und gerade so gefunden, wie früher.«

Es verhält sich aber mit diesem Versuche sehr anders, als der Verfasser sagt. Ich habe einen, dem jetzt von ihm beschriebenen Versuche wesentlich gleichgeltenden, selbst in meiner Abhandlung gegen ihn angeführt, also demselben natürlich nicht widersprochen; ich habe dabei statt des Ausdrucks n u r, den er mir unterlegt, den Ausdruck v o r z u g s w e i s e gebraucht, was etwas Anderes ist; der Verfasser hat den vorigen Versuch n i c h t beschrieben, wie er ihn hier beschreibt, sondern wie folgt (Pogg. XXXVII. 295), wonach ich ihm noch heute wie früher widerspreche:

»Allgemein gilt der Satz, dass farbige Gläser die Eigenschaft haben, die Lichtstralen der Farbe, womit sie gefärbt sind, durchzulassen und die complementäre zu reflectiren. Letztere nimmt man nicht wahr, wenn man, wie gewöhnlich, die Glasscheibe zwischen das Auge und einen hellen Grund hält. In diesem Fall trifft das Auge nur die durchgehenden Lichtstralen, die complementären werden in entgegengesetzter Richtung also nach dem hellen Grund hin reflectirt. Hält man hingegen ein farbiges Glas gegen einen schwarzen Grund oder nimmt man ein auf einer Seite geschwärztes Glas*), und hält es dergestalt, dass die

*) Unstreitig kann Niemand hierunter ein nur in seiner halben Ausdehnung auf einer Seite geschwärztes verstehen.

farbige Seite dem Auge zugekehrt ist, und zugleich die ist, auf welche das Licht fällt, so sieht man das Glas oder die auf der Rückseite geschwärzte Seite complementär gefärbt.«

Dieses Resultat habe ich für falsch erklärt und erkläre es noch dafür. Man sieht die Complementärfarbe nicht, wenn man das ganze Glas auf der Hinterseite schwärzt oder gegen einen schwarzen Hintergrund hält, sondern nur wenn man einen Fleck darauf oder einen Theil desselben schwärzt, so dass die objective Farbe des Glases noch daneben sichtbar bleibt. »Die Osann'sche Angabe, sagte ich, würde unerklärlich sein, wenn nicht bei dieser Art, den Versuch anzustellen, wirklich (aber auch sehr begreiflich) die Complementärfarbe hervorträte.« Sehr möglich nun, dass der Verfasser auch früher wie jetzt den Versuch in dieser Weise, wo er richtig ist, aber nichts beweist, angestellt hat; beschrieben hat er ihn nur so, wie er beweisend sein würde, wenn er richtig wäre, aber nicht richtig ist; und sorgfältigst aber umsonst habe ich in allen drei Abhandlungen des Verfassers nach einer andern Beschreibung als der obigen gesucht, auf welche sich der Verf. zu beziehen vermöchte.

Nun soll freilich nach des Verf. neuer Angabe (S. 66) auch dann noch (namentlich unter Anwendung einer blauen Glasscheibe) ein complementärer (gelber) Schimmer auf der Vorderfläche der hinten halb geschwärzten farbigen Glasscheibe sichtbar bleiben, wenn man den nicht geschwärzten Theil hinten mit einer schwarzen Pappe bedeckt, so dass Alles hinten schwarz ist. Mögen Andere versuchen, ob es ihnen gelingt, diess Resultat wiederzufinden. Ich beziehe mich in dieser Hinsicht auf meine früheren Gegenversuche (Pogg. XLIV. 226), die ich sowohl mit hinten schwarz überfirnissten, als gegen einen schwarzen Hintergrund gehaltenen, Gläsern angestellt habe und durch das Urtheil Anderer habe bestätigen lassen. Auch jetzt mag ich alle meine Farbengläser unter verschiedensten Neigungen gegen einen schwarzen Hintergrund halten, so kann ich doch nichts von einer Complementärfarbe daran entdecken. Es ist aber sehr möglich, dass, wenn der Verfasser die Complementärfarbe auf seiner halb gefirnissten Scheibe vor der ergänzenden Bedeckung mit schwarzer Pappe complementär gesehen, sie auch nach der Bedeckung noch so erschien, vermöge der Persistenz des Eindrucks, auf die ich alsbald zu sprechen komme, und von welcher Prof. Osann zwar nichts hält, die aber nichts desto weniger

Digitized by Google

statt findet, und zwar nach richtiger Auslegung seiner eigenen Erfahrungen, wie ich unten nochmals beweise, nachdem ich es freilich schon früher gethan.

Der Verf. erklärt den Umstand, dass man die Complementärfarbe auf einer halb gefirnissten farbigen Glasscheibe leichter als auf einer ganz gefirnissten sähe, gegenwärtig daraus, dass die Erkennbarkeit einer Farbe durch Nachbarschaft einer andern erleichtert werde; was unstreitig bezüglich der zu einander complementären Farben richtig, aber selbst nur als eine subjective Erscheinung zu deuten ist. Ausserdem führt er folgenden Versuch an.

»Man fange mittelst eines farbigen Planglases, welches auf der einen Seite durch ein Amalgam spiegelnd gemacht ist, in einem dunklen Zimmer einen Lichtstral aus der Oeffnung eines Ladens auf: Ich will annehmen, die Oeffnung sei viereckig, so wird man zwei Vierecke wahrnehmen, die neben einander liegen und in der Mitte über einander greifen. Ist das Glas z. B. blau, so erhält man die (im Original) abgebildete Figur (von zwei, mit einer Ecke superponirten Vierecken). Das eine Viereck ist der Reflex der unteren mit Spiegelfolie belegten Seite und ist blau, das andere ist der Reflex der oberen Fläche des Glases und ist braun. Man nehme nun ein Stück Pappe in der Grösse des Spiegels, schneide in der Mitte ein kleines Loch heraus von der Grösse des braunen Spiegelbildes, streiche es (das Stück Pappe) schwarz an, und lege es auf die Oberfläche des Spiegels. — — Man wird es (das letztere Spiegelbild) jetzt eben so braun finden, wie früher, obwohl die ganze übrige Fläche des Spiegels bedeckt ist, und also keine Farbe ins Auge kommt, die durch Contrast eine andere hervorrufen könnte.«

Nach der allgemeinen Ansicht der Physiker wird das Licht spiegelnd zurückgeworfen, ohne in den spiegelnden Körper eingedrungen zu sein, und ist das von farbigen durchsichtigen Körpern an der ersten Oberfläche zurückgeworfene Licht so weiss als das von farblosen. Unstreitig könnten nur mit äussersten Vorsichten angestellte, unter allen Abänderungen sich bestätigende, sorgfältigst beschriebene, Versuche dieses sonst anerkannte Resultat umstossen, und man möge selbst urtheilen, ob der letztere wie die vorigen Versuche und deren Beschreibung diesen Bedingungen genügen. So gibt der Verfasser weder dabei an, ob er die nöthige Vorsicht wegen der Persistenz des einmal

Digitized by Google

erzeugten subjectiven Eindrucks befolgt habe, noch ob Anderer Wahrnehmungen mit den seinigen übereinstimmten.

Am besten schien es doch, den Osann'schen Versuch zu wiederholen und Prof. Hankel hatte die Gefälligkeit, die Anordnungen dazu zu treffen. Das blaue Glas, was zu Gebote stand, gab aber, nachdem es hinten belegt war, wegen zu grosser Dunkelheit kein hinreichend deutliches complementäres Bild, dass sich ein Resultat damit hätte erzielen lassen; der Versuch wurde daher, ohne dadurch principiell ein anderer zu werden, in folgender Weise abgeändert. Eine Spiegelplatte, welche den Boden eines flachen Kastens bildet, ward etwa ½ Zoll hoch mit verdünnter schwefelsaurer Kupferoxydammoniaklösung übergossen, und eine vom zerstreuten Tageslichte erhellte kreisrunde Oeffnung von ziemlich 1 Zoll Durchmesser im Laden eines finstern Zimmers dadurch gespiegelt. Sie gab zwei vollkommen von einander getrennte Bilder, von denen das, von der Spiegelplatte am Boden des Kastens reflectirte intensiv blau, das andere, von der Vorderfläche der Flüssigkeit gespiegelte nicht sehr stark aber ganz deutlich sowohl für Hankel als für mich und einen Mitbeobachter röthlich gelbbraun, also complementär zum Blau, gefärbt erschien. Die Bedingungen, den Osann'schen Versuch zu wiederholen, waren also vorhanden. Jetzt wurde eine, mit einem Loche versehene, schwarze Platte so oberhalb der Oberfläche der Flüssigkeit hingeschoben und das Auge so gestellt, dass blos der mittlere Theil des bräunlichen Spiegelbildes ohne etwas von der Umgebung erblickt ward. Die bräunliche Färbung verschwand sofort, ungeachtet sie wegen Persistenz noch eine Weile hätte sichtbar bleiben können, und trat sofort wieder hervor, wenn das blaue Bild zum Vorschein kam. Auch reichte es hin, das blaue Bild zu verdecken, so verschwand sofort die bräunliche Färbung des andern Bildes, selbst wenn etwas von der dunkelblauen Umgebung desselben noch sichtbar blieb, und trat sofort wieder hervor, wenn das andere Bild sichtbar ward; ein Wechsel, der sich beliebig wiederholen liess.

Die vorigen Versuche wurden noch mit manchen Abänderungen wiederholt, von denen mir eine einiges Interesse darzubieten scheint. Statt zerstreuten Tageslichtes wurde directes Sonnenlicht durch die Oeffnung im Laden einfallen gelassen und das von der Flüssigkeit im Kasten gespiegelte Doppelbild auf einer weissen Tafel aufgefangen. Die bräunliche Complementär-

Digitized by Google

arbe des von der Vorderfläche gespiegelten Bildes war hier sehr prononcirt. Es reichte aber wieder hin, das blaue Bild dem Auge zu entziehen oder durch eine enge schwarze Röhre mit einem Auge unter Schluss des andern auf das bräunliche Bild zu sehen, so verschwand selbst ohne Vorsicht wegen der Persistenz die Färbung des Bildes unmittelbar oder fast unmittelbar. Nun aber konnte man auf folgende Art beide Erscheinungen, die complementäre und farblose des von der Vorderfläche gespiegelten Bildes zugleich erhalten. Während mit einem Auge durch die enge schwarze Röhre nach dem Bilde gesehen ward, ward das andere offen gelassen, und neben der Röhre hin auf dasselbe Bild frei gesehen, welches wegen der hiebei von selbst eintretenden Nichtcoincidenz des Fixationspunctes im Bilde in ein Doppelbild aus einander trat. Hievon erschien das durch die Röhre gesehene, dem der Contrast fehlte, völlig farblos, das daneben gesehene, welches dem Contrast wie gewöhnlich unterlag, auch ganz mit der demgemässen bräunlichen Contrastfarbe. Eine ähnliche Erfahrung kann man übrigens leicht beim Meyer'schen Versuche reproduciren, wenn man ein graues Feld auf einen weissen Farbebogen legt, das Ganze mit durchscheinendem Papier bedeckt, wo das Grau complementär erscheint, und nun mit dem grauen Felde wie so eben mit dem Bilde verfährt.

Endlich ward dem Kasten statt eines Spiegels eine schwarze matte Fläche zum Boden gegeben, wo dann das von der Vorderfläche der farbigen Flüssigkeit gespiegelte Bild der Oeffnung allein sichtbar blieb. Mochte nun das Spiegelbild bei einfallendem zerstreuten Tageslicht direct auf der Flüssigkeit betrachtet oder bei einfallendem directen Sonnenlichte auf einer weissen Tafel aufgefangen werden, es erschien stets vollkommen farblos; wie denn auch das von der Vorderfläche der verschiedensten Farbengläser gegen die weisse Tafel reflectirte Bild rein weiss erschien.

In allen diesen Puncten stimmte Hankels und mein eignes Urtheil, so wie das eines bei einigen dieser Versuche gegenwärtigen, Mitbeobachters vollkommen überein.

Woher nun die Abweichung der Osann'schen Resultate von dem unsrigen rührt, kann ich nicht sagen. Da ich weder ein Recht, noch einen Grund habe, dem, was Prof. Osann gesehen, zu widersprechen; derselbe Erfolg aber sich nicht bei, so viel ich übersehen kann, äquivalenten Versuchen wieder-

gefunden hat, so bin ich geneigt zu glauben, dass bei Prof. Osann sich eine Persistenz geltend gemacht hat, die bei uns sich nicht geltend machte; wenn es aber der Fall gewesen wäre, uns zu Vorsichten veranlasst hätte, von denen sich in Prof. Osann's Abhandlung keine Andeutung findet, dass sie genommen wären. Unstreitig zwar kann Prof. Osann sagen, das Verschwinden der Complementärfarbe bei Wegfall des primärfarbigen Bildes in unsern Versuchen lasse sich aus dem von ihm selbst geltend gemachten Principe erklären, dass eine objective Farbe durch Nachbarschaft einer andern leichter erkennbar werde; also könne sie mit Beseitigung derselben unmerklich werden. Allein diess müsste dann auch seine eigene Anstellungsweise des Versuchs betreffen, der doch gerade beweisen soll, dass es des Contrastes nicht bedarf, die complementäre Farbe sichtbar werden zu lassen. Gewiss ist, dass es bei u n s e r n Versuchen des Contrastes bedurfte.

In Pogg. XLII. 73 und ganz ähnlich, nur kürzer, in Pogg. XXXVII. 299 führt Prof. Osann zum Beweise der objectiven Natur der bekannten complementären Schattenfärbung folgenden Versuch an: »Man erzeugt auf die bekannte Weise, indem man zwischen zwei Lichtflammen, vor deren einer ein farbiges Glas gehalten wird, einen Stab aufsteckt, zwei complementär gefärbte Schatten. Betrachtet man nun den von der ungefärbten Lichtflamme beschienenen Schatten durch eine Pappröhre, deren Durchmesser die Breite des Schattens hat, so sieht man ihn eben so gefärbt, als wenn man ihn ohne dieselbe betrachtete. Da nun bei diesem Versuche das farbige Licht, welches von der Seite kommen könnte, ausgeschlossen ist, so ist klar, dass die complementäre Färbung des Schattens objectiv ist.«

Der Erfolg dieses Versuchs, sagte ich (Pogg. XLII. 232), und führte es an Thatsachen aus, ist richtig, wenn man die Röhre erst vor das Auge nimmt, n a c h d e m m a n d i e s u b j e c t i v e F a r b e s c h o n d u r c h E r b l i c k e n d e r o b j e c t i v e n N a c h b a r f a r b e i m A u g e h a t, indem der Eindruck derselben in merkwürdiger Weise persistirt, auch wenn man die objective Nachbarfarbe nachmals ausschliesst; aber der Eindruck der Complementärfarbe entsteht von vorn herein gar nicht, wenn man die Röhre vor das Auge nimmt, und auf den Schatten richtet, der sich complementär färben soll, e h e man die objective Nachbarfarbe durch Anbringung des demgemässen Farbenglases

Digitized by Google

erzeugt und mithin die subjective gesehen hat, und er bleibt, wenn man sie gesehen hat, auch noch derselbe, wenn man, während die Röhre vor dem Auge bleibt, die objective Nachbarfarbe durch Wechsel des dieselbe erzeugenden Glases wechselt, und wechselt erst, wenn man die Röhre nachmals vom Auge nimmt, so dass die neue Nachbarfarbe in das Auge fällt; was Alles nur Beweise für die subjective Natur dieser Phänomene sind. Hiefür habe ich nicht nur meine eigenen Wahrnehmungen, sondern die von einer Mehrzahl Mitbeobachtern geltend gemacht.

Hiegegen führt der Verf. S. 73 seiner neuen Abhandlung zuvörderst folgende Abänderung seines früheren Versuches an: »Da man jedoch sagen kann, es sei gleich anfänglich farbiges Licht in das Auge gelangt, so habe ich diesen Versuch auf folgende Weise abgeändert. In der Mitte eines Bogens von Pappe von gewöhnlicher Grösse, welcher auf beiden Seiten geschwärzt war, wurde eine Papprohre von 1′ Länge und von 1″ Durchmesser inwendig geschwärzt angebracht. Indem nun diese Vorrichtung in einer gewissen Entfernung über die Papierfläche, worauf die Schatten hervorgebracht wurden, befestigt war, konnte man den complementär gefärbten Schatten mit Ausschluss der farbigen Fläche des Papiers sehen; und gewahrte ihn auch jetzt complementär gefärbt. Auch, wenn man die Augen eine Zeit lang zudrückte und nachher wieder öffnete, erschien der Schatten ebenfalls wie vorher gefärbt.«

Wenn bei diesem Versuche wirklich die objective Nachbarfarbe des complementären Schattens erst, n a c h d e m man das Auge an die Röhre gebracht hatte, erzeugt wurde, — was der Verf. zwar nicht ausdrücklich sagt, jedoch nach dem Eingange zu schliessen sein sollte, — so dass weder eine complementäre Nachfarbe der vorher gesehenen objectiven Farbe noch eine Persistenz der einmal gesehenen complementären Nebenfarbe für den Erfolg des Versuchs in Anspruch genommen werden kann, so steht dieser Versuch in directem Widerspruche mit meinen Erfahrungen; im Gegenfalle ist er nur eine Bestätigung dessen, was ich selbst gefunden habe.

Obwohl ich nun keinen Grund hatte, die Richtigkeit meiner frühern Erfahrungen in Zweifel zu ziehen, hielt ich doch bei dem jetzt dagegen erhobenen Widerspruche für nützlich, die-

Digitized by Google

selben durch einige exacte Beobachter nochmals constatiren zu lassen.

Es wurden also auf die früher von mir (Pogg. XLIV. 229) beschriebene Weise zwei complementäre Schatten dadurch erzeugt, dass zwei quadratische Oeffnungen im Laden eines finstern Zimmers, jede von 6 par. Zoll Seite, die eine mit einem Farbenglase bedeckt, die andere ohne Glas durch einen schwarzen Schirm so weit verkleinert wurde, dass der von einer quadratischen Fläche von $7\frac{1}{2}$ Zoll Seite auf eine weisse verticale Tafel von ungefähr 1 Fuss Breite $1\frac{1}{2}$ Fuss Höhe geworfene Doppelschatten möglichst intensiv farbig nach seiner subjectiven wie objectiven Componente erschien, wenn er mit freiem Auge betrachtet wurde. Prof. Bruhns, Dr. Feddersen, Prof. Hankel und der Assistent des letztern, Herr Stud. v. Zahn, waren die Beobachter. Mit Fleiss wende ich zu diesen Versuchen breite Schattenflächen an, aus dem doppelten Grunde, weil dann eine kleine zufällige Verrückung der vor das Auge genommenen Röhre, wozu mir immer ein mit der schwarzen Seite nach Innen zusammengerollter Bogen glanzlosen Russpapiers dient, unschädlich wird; und weil dann nicht so viel objectives Seitenlicht in die Röhre fällt, wovon man selbst bei so breiten Schatten immer noch einen Schimmer vom Ende der Röhre herein wahrnimmt, wenn man sie vor das Auge hält, und auf die Mitte des Schattens richtet. Uebrigens erscheint ein so breiter Schatten in seiner ganzen Ausdehnung merklich gleich intensiv subjectiv farbig, und ich finde nicht, dass schmälere Schatten im finstern Zimmer die subjective Farbe intensiver zeigen als breite.

Einer der Beobachter nahm nun die Röhre vor das Auge, schloss das andere, was überall auch bei den folgenden Versuchen mit der Röhre vorauszusetzen ist, und richtete die Röhre auf den Schatten, der sich subjectiv färben sollte, e h e das Farbenglas vor die eine Fensteröffnung gebracht wurde, ehe er also etwas von objectiver und subjectiver Farbe gesehen hatte. Darauf wurde von den verschiedenen vorhandenen Farbengläsern durch einen Andern eins vor die eine Fensteröffnung vorgesetzt, ohne dass der Beobachter wusste, welches, und gefragt, ob ihm der Schatten sich zu ändern schiene. Gewöhnlich wurde eine schwache Aenderung als statt findend angegeben, welche in der zweiten Columne folgender Tabelle verzeichnet ist.

Digitized by Google

Objectives Glas	Wahrgenommene Nuance des subjectiven Schattens.	Beobachter
Gelb Grün Roth	Gelblich grünlich Bläulich grünlich Bläulich gelblich	Feddersen
Gelb Grün Roth	Gelblich röthlich Bläulich oder grünlich Violet oder blau	Hankel
Gelb Grün Roth	Röthlicher Schimmer Schwach gelblich, ein andermal blau Blau	v. Zahn

Bei stärker einfallendem Lichte durch die tageshelle Oeffnung sah Hankel unter Anwendung derselben drei Gläser den Schatten durch die Röhre stets nur farblos; auch Feddersen erkannte beim grünen Glase keine Farbe, bei Anwendung des gelben eine wenig röthliche Farbe.

(Bruhns betheiligte sich bei diesen Versuchen noch nicht.)

An einem andern Tage wiederholte ich dieselben Versuche mit dem stud. math. Grabau. Bei Vorsetzung eines blauen, rothen, violeten Glases sahe er gar keine deutliche Aenderung des Schattens eintreten, wenn die Röhre auf den subjectiv zu machenden Schatten gerichtet worden war, e h e das Farbeglas vorgesetzt ward; bei Anwendung eines gelben bemerkte er eine gelbliche, bei Anwendung des grünen*) eine grünliche Nuance. Auch diese Angaben wurden ohne Kenntniss des vorgesetzten Glases gegeben.

Das übereinstimmende Resultat dieser Versuche ist, dass bei Richtung der Röhre auf den Complementärschatten v o r Erzeugung der Farbe Alles eher als die subjective, vielmehr in fast allen Fällen, wo überhaupt eine, immer nur schwache, Färbung erschien, die objective oder eine ähnliche Färbung gesehen ward. Diess hat nichts Auffälliges, weil die (mit einem unscheinbaren Grünlichgrau getünchten) Wände des Zimmers nothwendig etwas von dem objectiven Farbenlichte in den Schatten zurück-

*) Das gelbe und die grünen Gläser sind die hellsten der angewandten Gläser.

Digitized by Google

werfen mussten, was aber bei den Versuchen ohne Röhre durch die subjective Färbung weit überboten wurde, wie denn alle genannten Beobachter nach Wegnahme der Röhre die subjective Farbe des Schattens sofort mit der grossen Prägnanz sahen, die sie überhaupt bei den Versuchen im finstern Zimmer erlangt. Wurde die tageshelle Oeffnung zu gross in Verhältniss zur farbigen genommen, so war das in den Schatten von den Wänden her zurückgeworfene objective Farbenlicht mit zu viel Weiss verdünnt, um die Färbung während der Vornahme der Röhre bemerklich werden zu lassen; daher Hankel dann nichts mehr davon wahrnahm.

Prof. Osann hat sich zu seinen Versuchen über die Schatten nicht des finstern Zimmers und Tageslichtes, sondern einer Kastenvorrichtung und Kerzenlichtes bedient; ohne dass diess einen wesentlichen Unterschied in den Resultaten begründen kann. Ich ziehe aber das finstre Zimmer vor, weil hierin das ganze Gesichtsfeld mit Ausnahme des Complementärschattens mit der objectiven Farbe erfüllt ist, nur dass dieselbe ausser dem objectiven Schatten mit Weiss verdünnt ist, und weil das Kerzenlicht stets gelb gefärbt ist. Man kann im finstern Zimmer leicht beliebig grosse Schatten erzeugen und die Verhältnisse mit Bequemlichkeit handhaben.

Uebrigens fand Prof. Ruete auch in seiner schwarzen Kastenvorrichtung für Erzeugung farbiger Schatten bei einem gelegentlichen Versuche mit der Röhre das von mir angegebene Resultat vollkommen bestätigt; d. h. die subjective Farbe des Schattens erschien nicht, wenn die Röhre auf den Schatten vor der Vorsetzung des Farbeglases gerichtet ward. Die Persistenzphänomene aber konnte er mit seiner Kastenvorrichtung nicht erlangen, indess er sie bei Theilnahme an einigen Versuchen im finstern Zimmer sehr gut erhielt. Prof. Osann hat sie auch mit seiner Kastenvorrichtung erhalten.

Wenn Prof. Osann sich darauf beruft, dass die subjective Farbe nach vorgenommener Röhre selbst dann noch verharre, wenn man die Augen eine Zeit lang geschlossen hat und wieder öffnet, so kann diess nach vorigen Versuchen eben nichts Andres beweisen, als dass die Persistenz des einmal aufgenommenen subjectiven Eindrucks einen zeitweisen Schluss zu überdauern vermag. Diess ist in der That in höchst auffälliger Weise der Fall; wie ich mich auf Anlass der Angabe des Verfassers durch

Digitized by Google

besonders darauf gerichtete Versuche überzeugt habe. Nachdem ich durch wiederholte Versuche constatirt hatte, dass ich selbst gegenwärtig wie früher eben so wenig als die vorgenannten Beobachter etwas von der subjectiven Farbe sahe, wenn ich die Röhre vor Vorsetzung des Farbeglases auf den subjectiv zu machenden Schatten richtete; fasste ich den Eindruck desselben voll ins Auge, nahm die Röhre vor; er persistirte; ich schloss die Augen dann bei verschiedentlich wiederholten Versuchen ¼ Minute, ½ Minute, ja bis über 1 Minute, und glaubte nach Wiederöffnung immer noch die subjective Farbe zu sehen. Grabau und Ruete, welche den Versuch bis über ¼ Minute Schluss wiederholten, fanden dasselbe; nur schien Ruete'n die subjective Farbe nach Wiederöffnung des Auges schon bedeutend geschwächt.

Ueberhaupt scheint der Grad der Persistenz bei verschiedenen Personen sehr verschieden zu sein. Während mir selbst der einmal aufgefasste Eindruck des subjectiven Schattens bei den Versuchen im finstern Zimmer nach Vornahme der Röhre im offen gehaltenen Auge lange Zeit fast unverändert fortzubestehen scheint, schwächte er sich bei Feddersen und Hankel unter gleichen Umständen sehr schnell. Auch bei mir selbst aber macht sich nicht unter allen Versuchsumständen die Persistenz geltend, wie die obigen Versuche mit der Spiegelung von der Farbenflüssigkeit beweisen.

Weiter entgegnet der Verfasser S. 76:

»Was den Punct angeht, dass der Eindruck der complementären Farbe im Auge verbleibe, auch wenn die farbigen Gläser gewechselt werden, so habe ich diess nicht finden können. Es wäre dieses Phänomen aber auch eine der sonderbarsten Thatsachen in der ganzen Physik. Stellt man nämlich diesen Versuch ohne Pappröhre an, so wechseln die Farben in beiden Schatten sogleich, wenn man die farbigen Glasscheiben umtauscht. Verhielte sich also die Sache wirklich so, wie Herr Prof. Fechner angibt, so müsste die Farbe geradezu in der Röhre stecken geblieben sein. Eine Ansicht, die wohl schwerlich von andern Physikern getheilt werden dürfte.«

Aber wie kann ein Versuch, der p r i n c i p i e l l nur unter Anwendung der Röhre etwas beweisen kann, durch einen Versuch ohne Röhre widerlegt, ja ihm nur widersprochen werden. Dass o h n e Röhre die Farbe des subjectiven complementären

Digitized by Google

Schattens zugleich mit der objectiven Nachbarfarbe wechselt, habe ich selbst angeführt, und es ist diess auch ganz natürlich im Sinne der Ansicht, die der Verf. bestreitet. Oder hätte der Verfasser wirklich meinen Versuch mit Röhre wiederholt? Man sollte es freilich daraus schliessen, dass er ihm direct widerspricht, und dass er auch sonst von der Röhre Gebrauch macht. Es ist jedenfalls zu bedauern, dass der Verf. sich nicht unzweideutiger über Versuche ausspricht, auf deren genaue Auffassung und mithin Darstellung Alles ankommt, sollen sie für oder wider zählen. Eben so habe ich vielleicht einigen Grund mich zu beschweren, dass, nachdem ich in meiner frühern Abhandlung mich bei allen Versuchen, auf die etwas ankam, auf das Urtheil mehrerer Mitbeobachter mit berufen habe, Prof. Osann solchen nur mit eignen Wahrnehmungen widerspricht, was bei subjectiven oder gar mystisch objectiven Phänomenen, was sie nach ihm sein würden, immer misslich ist. Wie dem auch sei; ich habe auch diese Versuche unter Zuziehung der obigen Mitbeobachter, deren Zuverlässigkeit keinem Zweifel unterliegen kann, wiederholt; und das Resultat war, dass die Persistenz des einmal aufgenommenen subjectiven Eindrucks unter Zuziehung der Röhre während des Wechsels der Gläser sich bei Bruhns und v. Zahn, in spätern unabhängigen Versuchen auch bei Grabau und Ruete, ganz eben so zeigte, wie ich sie früher bei einer Mehrzahl von Individuen gefunden habe und noch jetzt bei mir wiederfinde. Bei Feddersen und Hankel aber fehlte mit der anhaltenden Persistenz auch der von Prof. Osann geforderte Wechsel der Complementärfarbe bei Wechsel des Glases; der Eindruck der Complementärfarbe schwächte sich überhaupt schnell nach Richtung der Röhre darauf, indess er nach Prof. Osann bis zum Wechsel des Farbeglases hätte bleiben und mit Wechsel des Glases in der Complementärfarbe wechseln müssen. Statt dessen konnten Beide bei Wechsel des Glases nur schwache oder zweideutige Aenderungen im Schatten wegen Aenderung der hineinspielenden objectiven Farbe des zerstreuten Lichtes der Wände wahrnehmen.

Auch wenn man den Eindruck der subjectiven Farbe während des Wechsels des Glases persistirend findet, nimmt er doch vermöge der sich ändernden Helligkeit und Farbe des zerstreut hineingeworfenen objectiven Lichtes leicht schwache davon abhängige Nuancirungen an.

Digitized by Google

Dass die Persistenz des einmal erzeugten subjectiven Eindrucks nach Vornahme der Röhre und mithin nach Ausschluss der objectiven Nachbarfarbe, sogar nach längerem Augenschlusse, sehr merkwürdig ist, ist richtig, und das Ueberraschende, was die davon abhängigen Phänomene für mich hatten, liess mich schon bei meiner frühern Untersuchung meinen Augen nicht eher trauen, als bis sich dasselbe auf das Wiederholteste bei Andern wiedergefunden hatte. Aber in der Röhre braucht der Eindruck desshalb nicht stecken zu bleiben, sondern die natürliche Voraussetzung ist, dass er im Auge stecken bleibt. Es dürfte dem Verfasser viel schwerer werden, anzugeben, wo in den meisten Fällen der von ihm angenommene objective Grund der complementären Contrastfarbe stecken soll. Bei den blauen Schatten, die durch Kerzenlicht und Tageslicht hervorgebracht werden, kann ihn der Verfasser auf die Bläue der Luft schieben. Aber was fruchtet diese Erklärung für complementäre Schatten, die mit rothen, blauen, grünen Gläsern erzeugt werden? Prof. Osann überlässt diess dem Scharfsinn Anderer zu errathen. Darf man aber wohl von einem objectiven Grunde einer Erscheinung sprechen, ohne sich nur einen Gedanken von etwas Objectiven machen zu können, worin er zu suchen sei?

Selbst in dem Falle, dass die von mir angeführten Versuche mit der Röhre anders ausfielen, als sie wirklich ausfallen, dass man nämlich den Schatten nach Vorsetzung des Farbeglases complementär sähe, trotz dem dass die Röhre vorher darauf gerichtet worden, würde man doch vielmehr Grund haben, die Entstehung der complementären Farbe als ein subjectives Complement zu dem objectiven Schimmer am Ende der Röhre, der nie ganz fehlt, anzusehen, als eine objective Erscheinung ohne denkbaren objectiven Grund darin zu sehen.

Rücksicht verdient bei vorigen Versuchen, dass die subjective Complementärfärbung des Schattens keineswegs allein durch sein Verhältniss zu dem objectiv gefärbten Nachbarschatten und zur nächsten Umgebung überhaupt bedingt ist; sondern wesentlich mit davon abhängt, dass auch die ganze weitere Umgebung, ja bei den Versuchen im finstern Zimmer das ganze Gesichtsfeld ausser beiden Schatten mit einer nur durch Weiss verdünnten objectiven Farbe erfüllt ist. Hievon kann man sich leicht überzeugen, einmal, indem man den objectiv gefärbten Schatten auf eine schwarze Fläche fallen lässt, wo seine Farbe

Digitized by Google

merklich schwindet, oder es so einrichtet, dass der Anblick desselben dem Auge ganz entzogen ist, indess man doch den subjectiven Schatten sieht, zweitens so, dass man einen subjectiven Schatten mit einem Quartblatte Papier von der Farbe des subjectiven Schattens, und einem Loche inmitten, bedeckt, so dass die Complementärfarbe durch das Loch gesehen wird, ringsum aber nicht mehr von der objectiven Farbe, zu der er subjectiv complementär erscheint, sondern von der ihm gleichen objectiven Farbe umgeben ist. Mit letzterem Versuche äquivalent ist ein Versuch, den Prof. Osann (S. 74. 75) gegen die Subjectivität des Complementärschattens anführt. Und in der That ist sehr auffällig, dass bei beiden vorigen Versuchsformen der Complementärschatten nicht oder kaum merklich an Färbung einbüsst. Aber die oben angeführten Versuche mit der Röhre entscheiden für die subjective Natur, und nöthigen, den Grund der Färbung in dem Einflusse der allgemeinen Erfüllung des Gesichtsfeldes mit objectiver Farbe zu suchen.

Auch darauf ist bei diesen Versuchen zu achten, dass die complementären Nachfarben entsprechende Phänomene als die complementären Nebenfarben hervorbringen können.

Richte ich, bevor das Farbenglas vor seine Oeffnung gesetzt und mithin ehe eine objective und subjective Farbe da ist, die Röhre auf den objectiv zu machenden Schatten, und lasse nun erst das Farbenglas vorsetzen, so erscheint mir, wie natürlich, die objective Farbe des Schattens in voller Kraft; wende ich von da die Röhre auf den unmittelbar angränzenden subjectiven Schatten, so erscheint mir dieser so schön subjectiv, als es vermöge der Persistenz der Fall ist, wenn ich die Röhre darauf richte, nachdem ich ihn selbst ins Auge gefasst habe; ungeachtet bei jetzigem Versuche nichts persistiren kann; da ich ja vielmehr statt des subjectiven Schattens vorher den objectiven Schatten im Auge hatte. Die Uebereinstimmung der Erscheinung der subjectiven Farbe in beiden Versuchsfällen ist dessen ungeachtet frappant*). Auch ist mir die Schnelligkeit der Entstehung und Dauer der complementären Nachwirkung merkwürdig gewesen. In wiederholten Versuchen verfuhr ich so, dass ich das Auge schloss, während die Röhre auf den objectiv zu machenden

*) Diese Bemerkung ist wörtlich so von mir aufgezeichnet worden, noch ehe ich den Anlass S. 140 erhielt, einiges Gewicht darauf zu legen.

Digitized by Google

Schatten gerichtet war, dann das Glas vorsetzen liess, das Auge öffnete, und unmittelbar nachdem mir die objective Farbe ins Auge gefallen war, die Röhre auf den subjectiven Schatten richtete. Die subjective Farbe des Schattens erschien; ja mit nicht viel geringerer Lebhaftigkeit als wenn ich ihn direct ins Auge fasste. Auch Grabau fand diesen durch ein momentanes Erblicken der objectiven Farbe erzeugten Erfolg bestätigt, nur erschien ihm die subjective Farbe dann erheblich schwächer, als wenn er sie frei ins Auge fasste. Stelle ich den Versuch im hellen Zimmer so an, dass ich die schwarze Röhre vor einem Auge von einem momentan dadurch ins Auge gefassten farbigen Papierbogen sofort auf einen weissen oder grauen Nachbargrund wende, so erscheint mir auch ein entschiedener, aber nur sehr flüchtiger, complementärer Schein, während — wie ich mich wenigstens zu erinnern glaube — der im finstern Zimmer erhaltene selbst dann mehr oder weniger persistirte, wenn er nur durch einen momentanen Blick auf die objective Farbe hervorgerufen ward.

Die Erscheinung der subjectiven Farbe unter den hier angegebenen Versuchsumständen könnte wiederum leicht die Täuschung erwecken, dass man es hiebei mit einer objectiven Farbe zu thun habe; wenn man sich nicht durch, den schon beschriebenen analoge, Versuche vom Gegentheile überzeugen könnte.

Ein gelbes Glas wurde vor die eine Fensteröffnung gesetzt, während die Röhre vor meinem Auge auf den dadurch objectiv gelb zu machenden Schatten gerichtet war, und der gelbe Eindruck voll aufgenommen; darauf schloss ich das Auge an der Röhre (also beide Augen, indem das andere bei den Röhrenversuchen stets geschlossen blieb), wandte die Röhre auf den für ein freies Auge subjectiv blauen Schatten, und liess, während das Auge noch geschlossen blieb, ein blaues Glas vorsetzen, so dass der Schatten, auf den ich durch die Röhre sahe, jetzt für ein freies Auge subjectiv gelb ward. Nun öffnete ich sofort wieder das Auge an der Röhre, sahe aber den Schatten vermöge der den Schluss überdauernden complementären Nachwirkung des Gelb subjectiv blau. Als ich die Röhre von dem Auge entfernte, musste ich lachen, statt des Blau so entschieden Gelb zu sehen, indem sich nun sofort die Contrastwirkung der jetzt in das Auge fallenden Nachbarschaft überwiegend geltend machte.

Der Versuch ward jetzt umgekehrt, zuerst nämlich das

Digitized by Google

blaue, dann das gelbe Glas vorgesetzt, unter übrigens ganz derselben Anstellungsweise; ich sahe den für ein freies Auge subjectiv blauen Schatten jetzt nach Oeffnung des Auges an der Röhre gelb, und war wieder ganz frappirt, wenn schon ich nichts Anderes erwarten konnte, bei Entfernung der Röhre ihn so entschieden blau zu finden. Grabau so wie Hankel erhielten mit blauem wie gelbem Glase ganz entsprechende Erfolge.

Auf S. 72 gedenkt Prof. Osann eines Widerspruchs, den ich (Pogg. XLIV. 222) gegen einen seiner einfachsten Cardinalversuche (Pogg. XXVII. 694) auf Grund einer Wiederholung und Abänderung desselben erhoben, und indem er mit Stillschweigen übergeht, ob dieser Widerspruch gegen den Erfolg der bisherigen einfachen Form desselben im Factischen begründet sei, reproducirt er den Versuch jetzt in folgender zusammengesetztern, nach ihm den Erfolg verstärkenden, Form.

Drei Glastafeln (statt früher blos eine einzige) sind unter gleichem offenen Winkel gegen das Auge (etwa 45° gegen den Horizont) in einiger Entfernung hinter einander aufgestellt, vor deren jeder ein weisses Scheibchen auf farbigem Grunde liegt, so dass die Reflexe der weissen Scheibchen (deren Grösse der Perspective wegen mit der Entfernung vom Beobachter zunimmt) sich decken. Man sieht dann nur ein Scheibchen, auf einen an der Wand dem Auge gegenüber angebrachten schwarzen Papierbogen projicirt, und dieses Scheibchen stark complementär zum Farbengrunde gefärbt, was sich noch leicht als subjectiv deuten lässt. »Ich nehme nun, fährt der Verf. fort, eine Papprröhre von 1½″ Durchmesser und 1′ Länge, welche an einem Ende mit einer Pappscheibe verschlossen ist, in welcher sich eine runde Oeffnung von 1‴ Durchmesser befindet. Die Papprröhre ist im Innern schwarz angestrichen. Man kann nun die Röhre leicht so richten, dass das Auge durch die kleine Oeffnung nur den Reflex der complementär gefärbten Scheibe (ohne den Reflex des objectiv gefärbten Farbengrundes) erblickt. Ich erblicke jetzt auch die Scheibe complementär gefärbt, und auch dann noch, wenn ich das Auge verschliesse und nach einiger Zeit wieder öffne.«

Ich habe auch diesen Versuch in nicht wesentlich abgeänderter Form mit drei schönen unbelegten Spiegelgläsern des hiesigen physikalischen Cabinets wiederholt*). Die Spiegelgläser

*) Die Anwendung von Fensterglas würde den Versuch unrein machen,

Digitized by Google

wurden in die Seitenfugen eines langen Klotzes eingesetzt, welche unter 45° gegen die Längsseiten des Klotzes eingesägt waren. Der Apparat wurde an einem Fenster, mit der Längsseite, in der die Spiegel hinter einander eingefügt waren, dem Fenster parallel, aufgestellt, so dass das Licht frei zu den Spiegeln und dem Farbengrunde gelangen konnte. Eine schwarze Tafel ward als Hintergrund, auf welchen sich die superponirten Reflexe der drei weissen Scheiben projicirten, hinter dem Apparat angebracht. Nachdem nun die drei weissen Scheiben auf dem farbigen Grunde zwischen den drei Spiegeln so angeordnet waren, und das Auge so davor gestellt war, dass sich die drei Reflexe gut deckten, sahe ich namentlich bei etwas hell einfallendem Lichte die complementäre Farbe der Reflexe sehr deutlich, umgeben von der gespiegelten objectiven Farbe des Grundes.

Jetzt wurden die nöthigen Massregeln getroffen, dass weder eine complementäre Nachfarbe des objectiven Grundes noch eine Persistenz des einmal empfangenen complementären Eindrucks sich geltend machen konnte. Hiezu ward der ganze Apparat vom übrigen Zimmer isolirt, indem an der dem Fenster gegenüberstehenden Längsseite desselben eine einmal schwarze, andermale weisse, Papptafel aufgestellt wurde, welche denselben den Blicken verbarg; desgleichen wurde vor dem Winkel des vordersten Spiegels eine schwarze Papptafel mit einer, den Reflexen correspondirenden, nur kleinern Oeffnung*), aufgestellt. So war derselbe zwischen dem Fenster und der gegenüberstehenden Papptafel einerseits, der als Hintergrund dienenden Papptafel und der vordern Tafel mit der Oeffnung anderseits eingeschlossen, und man konnte sich der Oeffnung nähern, und bei einiger Vorsicht das Auge vor derselben placiren, um nach den Reflexen

---

weil wegen unregelmässiger Zurückwerfung dann manche Stellen des Reflexes der weissen Scheiben noch mit objectivem Lichte des Farbengrundes tingirt werden könnten. Da mir die Abhandlung des Verf. bei der Redaction dieses Artikels nicht mehr vorliegt, so kann ich nicht aus Erinnerung sagen, ob sich eine Angabe über die Beschaffenheit des angewendeten Glases darin findet.

*) Die kleine quadratische Oeffnung hatte ¼ Zoll Seite, die vorderste weisse Scheibe 2 Zoll Seite, die hintern waren stufenweise grösser. Prof. Osann hat eine Oeffnung blos von einer Lin. Durchmesser angewendet, da aber durch sehr kleine Oeffnungen Farben nicht so leicht erkannt werden, so konnte die von mir gewählte grössere Oeffnung nur die Sichtbarkeit der Farbe befördern.

zu sehen, ohne vorher etwas, sei es von der objectiven Farbe des Grundes noch der subjectiven Farbe des Reflexes, gesehen zu haben. Ich brachte das eine Auge in etwa 1 Fuss Entfernung von der Oeffnung, indess das andere geschlossen wurde. Das vom Fenster seitlich in das Auge fallende Licht wurde dabei durch einen Schirm abgeblendet.

Bei Anwendung dieser Vorsichten habe ich den Reflex immer nur rein weiss oder weissgrau gesehen, wogegen, wenn ich die vordere Papptafel entfernte, so dass mit dem Reflex der weissen Scheiben auch der Reflex der farbigen Umgebung in das Auge kam, sofort die subjective Complementärfarbe deutlich erschien.

Dieser Apparat hat lange an meinem Fenster gestanden; und ich bin oft unter Wechsel des Farbengrundes (Orange, Blau, Grün, Roth) und der Nebenumstände bei verschiedener Beleuchtung dazu zurückgekehrt; habe aber kein anderes Resultat finden können; wüsste auch absolut nicht, wo eine objective Ursache der complementären Färbung der Reflexe liegen sollte. Prof. Hankel konnte eben so wenig die complementäre Färbung beim Durchblick durch das Loch erkennen, indess er sie bei Wegnahme der Papptafel mit dem Loche sehr wohl erkannte.

Prof. Osann hat, statt frei durch das Loch, durch eine inwendig schwarze, vorn theilweis verschlossene Röhre geblickt. Hiedurch aber wird der Versuch unreiner. Denn mag man eine vorn ganz offne oder, wie es von Prof. Osann geschehen, vorn mit einer durchbohrten Pappscheibe verschlossene Röhre anwenden, so sieht man doch nächst der Mündung, namentlich an der obern Wand der Röhre, bei hinreichend hellem Lichte, wie es erforderlich ist, damit die Complementärfarbe überhaupt deutlich werden kann, einen sehr entschiedenen Schimmer der objectiven Farbe des Grundes, wenn schon die Oeffnung der Röhre gerade auf die Mitte des Reflexes gerichtet ist und glanzloses Russpapier die Röhre bildet oder inwendig auskleidet, da die zerstreuende Zurückwerfung des Grundes immer Farbenlicht in die Mündung der Röhre fallen lässt, welches durch eine Art spiegelnder Zurückwerfung in das Auge gelangt, sofern selbst die glanzlosesten Körper doch bei grosser Schiefe der Betrachtung etwas Licht spiegeln.

Sollte nun wirklich unter Anwendung der Röhre bei übrigens wohl getroffenen Vorsichtsmassregeln eine Complementärfärbung an den superponirten Reflexen erscheinen, so würde

Digitized by Google

man natürlich, in Ermangelung alles nachweislichen objectiven Grundes derselben, wieder nur ein subjectives Complement zu dem objectiven Schimmer in der Röhre zu sehen haben, und es ist möglich, dass etwas der Art unter Umständen eintritt. Indessen vermuthe ich, dass die Erscheinung der Complementärfarbe bei Prof. Osann's Versuchen auf Vernachlässigung anderer Vorsichten beruhte, welche im Vorigen bezeichnet sind. Denn auch, wenn ich eine inwendig schwarze, lange oder kurze, Röhre von weiterem Durchmesser als das Loch in der vorderen Papptafel, auf diese so aufsetzte, dass die Röhre dadurch bis auf das Loch verschlossen wurde, womit der Versuch ganz äquivalent dem von Prof. Osann angestellten wurde, konnte weder Hankel noch ich etwas von der Complementärfarbe wahrnehmen, ungeachtet der röthlichgelbe objective Schein (bei Anwendung eines orangefarbenen Grundes) in der Nähe der Mündung an der obern Röhrenwand sehr deutlich war, und die blaue Complementärfarbe der Reflexe ohne durchbohrte Papptafel und Röhre sehr deutlich erschien.

Um den objectiven Schimmer in der Röhre zu vermeiden, braucht man sie nur mit der Mündung in einer hinreichenden Entfernung von dem Loche in der vorderen Papptafel zu halten; wozu sie natürlich davon getrennt sein muss. Diess hat den Vortheil einer vollständigeren Abblendung des in das Auge fallenden Seitenlichtes; aber natürlich habe ich auch bei dieser Anwendungsweise der Röhre nichts von einer Complementärfarbe an den Reflexen entdecken können.

Nach der Gesammtheit dieser Versuche und Erörterungen halte ich die subjective Natur der fraglichen Erscheinungen noch so fest wie früher begründet; und die von mir zugezogenen Mitbeobachter sind alle gleicher Meinung.

Digitized by Google

G. Th. Fechner, *über die ungleiche Deutlichkeit des Gehörs auf linkem und rechtem Ohre.*

Bekanntlich ist sowohl die Muskelkraft als die Muskelmasse beim Menschen an den Extremitäten der rechten Seite grösser als an denen der linken, in welcher letztern Hinsicht die sorgfältigen Wägungen von Ed. Weber, welche in diesen Berichten (1849. S. 79) mitgetheilt sind, verglichen zu werden verdienen. Eine vorschnelle Verallgemeinerung könnte darauf leicht den Schluss gründen, dass die rechte Seite des Körpers überhaupt vor der linken bevorzugt sei; aber dieser Schluss bestätigt sich nicht, wenn man untersucht, ob auch bei den doppelseitigen Sinnesorganen die linke Seite einen Vortheil vor der rechten in Betreff der Feinheit der Empfindung voraus habe. So ist nach E. H. Weber's Beobachtungen*) die Empfindlichkeit sowohl für Wärmeunterschiede als für Druck durch Gewichte im Allgemeinen auf der linken Hand grösser als auf der rechten; und hiezu füge ich die bemerkenswerthe Thatsache, dass auch der Schall bei der weit grössern Mehrzahl der Individuen deutlicher mit dem linken als rechten Ohre vernommen wird.

Ich selbst hatte früher immer mein Gehör für ganz normal gehalten und nie daran gedacht, dass ich auf beiden Ohren ungleich hören könne, bis mir die in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen mitgetheilten Versuche mit Stimmgabeln und Uhren vor beiden Ohren den Verdacht erweckten, es möge der Fall sein; ein Verdacht, der sich dann durch besonders darauf gerichtete Versuche bestätigte; auch war ich anfangs sehr verwundert, als ich Versuche mit andern Personen anstellte, welche eben so wenig etwas von einer Ungleichheit ihrer Gehörfähigkeit

*) Programm. collect. p. 84. 92. 119.

Digitized by Google

auf beiden Seiten wussten, bei der Mehrzahl derselben ein entsprechendes Resultat wiederzufinden. Mit Stimmgabeln zwar lässt sich nicht leicht ein genau vergleichender Versuch vor beiden Ohren anstellen, da man nicht leicht sich der gleichen Stärke des Tons in verschiedenen Versuchen versichern kann, eine Uhr aber gab mir deutlich einen lautern Schlag, wenn ich sie unmittelbar vor das linke als rechte Ohr hielt, und zu gleichem Resultate führte folgende Prüfung, die ich dann im Allgemeinen auch bei andern Personen angewandt habe:

Zu anderweiten Zwecken habe ich mir ein Schallpendel verfertigen lassen, das ist ein Pendel, welches beim Herabschwingen durch Anschlag gegen eine verticale feststehende Schieferplatte einen Schall erzeugt, der immer von gleicher Stärke ist, wenn das Pendel aus gleicher Höhe herabfällt. Die Elevation des Pendels wird durch eine Kreiseintheilung, längs deren sich der obere Theil der Pendelstange bewegt, gemessen, und durch einen an der Theilung verstellbaren Laufer, welcher zugleich als Zeiger dient, begränzt, indem das Pendel jedesmal so weit gehoben wird, bis es an diesen Laufer trifft.

Ich erzeuge nun tactmässig mit diesem Instrumente einen Schall immer von derselben Stärke, und lasse die zu prüfende Person in demselben Tacte abwechselnd das eine und andere Ohr verschliessen, wo sich dann bei verschieden gut hörenden Ohren bald ein Urtheil bildet, ob der Schall deutlicher gehört wird, wenn das rechte Ohr offen und das linke verschlossen ist, oder umgekehrt. Den Verschluss lasse ich so vornehmen, dass der Zeigefinger auf den vordern Ohrknorpel gelegt, und dieser mit Kraft in den Gehörgang hineingedrückt wird. Sollte man bezweifeln, dass dieser Verschluss auf beiden Ohren immer ganz gleichmässig erfolgen könne (ungeachtet nichts der Gleichförmigkeit im Wege zu stehen scheint), so ist zu berücksichtigen, dass das Urtheil immer erst nach mehrfachen Wiederholungen des abwechselnden Verschlusses beider Ohren gefällt wird, und dass bei der grossen Zahl der geprüften Individuen (103) etwaige Ungenauigkeiten im Einzelnen den Ausfall des Gesammtresultats nicht wesentlich alteriren können. Dieses erscheint vielmehr gesichert, wenn nicht etwa dem Verfahren ein constanter Fehler anhängt, den anzunehmen ich jedoch bei sorgfältigster Erwägung keinen Grund finde. Damit nicht etwa die Stellung des Instrumentes einen solchen begründe, wurde es stets in solcher

Digitized by Google

Entfernung von dem Geprüften und so symmetrischer Lage zu demselben angebracht, oder die Stellung bei gleichzeitiger Prüfung Mehrerer so gewechselt, dass eine gleiche Betheiligung beider Ohren durch den Schall statt finden musste. Meist habe ich auch sowohl stärkeren als schwächeren Schall bei denselben Individuen angewandt.

Unstreitig lassen sich noch feinere Methoden finden, die Schärfe des Gehörs beider Ohren vergleichsweise zu prüfen, die aber dann nothwendig viel umständlicher sein müssen, und nur insofern nothwendig sein würden, als es sich um ein Mass der ungleichen Deutlichkeit des Hörens mit beiden Ohren handelte. Hier galt es aber nur, die allgemeine Thatsache und deren Richtung zu constatiren, wozu sich das vorige Verfahren sowohl durch seine Einfachheit als dadurch empfiehlt, dass es gestattet, Unterschiede zwischen beiden Ohren leicht an einer grössern Anzahl Individuen auf einmal zu constatiren, mithin eine Statistik in grossen Zahlen zu gewinnen, worauf es hier hauptsächlich ankommen musste, und was mit umständlicheren Verfahrungweisen nicht möglich gewesen wäre. Vielleicht zwar würde ein Apparat, der ein continuirliches gleichförmiges Geräusch erzeugt, zur Prüfung noch vorzuziehen sein, indess hat der obige jedenfalls seinen Zweck vollkommen erfüllt.

Natürlich wurde es bei allen folgenden Prüfungen zur Regel gemacht, die Richtung des zu erwartenden Resultates nicht voraus zu sagen oder errathen zu lassen; auch hat die Mehrzahl der Personen, welche geprüft worden sind, den zuvor bei Andern erhaltenen Erfolg nicht gekannt, so dass die Einbildungskraft das Resultat nicht alterirt haben kann.

Eine Anzahl Personen sind einzeln und ganz unabhängig von einander, wie sich die Gelegenheit darbot, geprüft worden, ausserdem einige Versammlungen von Personen auf einmal. Alle Personen waren erwachsen, von etwa 17 bis zwischen 60 und 70 Jahren. Folgendes sind die erhaltenen Resultate.

Eine gelegentliche Einzelprüfung betraf 28 mir bekannte Personen, von diesen hörten, mich selbst eingeschlossen, 18 (13 männl., 5 weibl.) besser l. als r., 10 (6 männl., 4 weibl.) gleich gut auf beiden Ohren oder so, dass der Unterschied zweifelhaft war, keine besser r. als l. Von den 18 besser l. als r. Hörenden erklärte jedoch 1, den Schall nicht sowohl stärker, als nur heller l. zu vernehmen.

Digitized by Google

In einer Abendgesellschaft hörten (unter Ausschluss schon vorher geprüfter Personen) von 8 Personen 4 (1 männl., 3 weibl.) besser l. als r., 2 (1 männl., 1 weibl.) gleich gut r. und l., 2 (männl.) besser r. als l. Unter den 4, welche besser l. als r. hörten, erklärte wiederum 1 (weibl.) den Schall l. blos für klarer oder heller, nicht für stärker als r.

Ich veranlasste die Zuhörer eines Collegiums von mir, 10 an der Zahl, die noch gar nichts von dem Gegenstande wussten, sich zu den Versuchen einzufinden. Sie stellten sich einer nach dem andern ein, und wurden auch unabhängig von einander geprüft, so dass nicht einmal das Urtheil des einen bestimmend auf das der anderen einwirken konnte. Ich erstaunte über die Einstimmigkeit des Resultats. 9 unter den 10 hörten besser l. als r., 1 gleich gut l. als r., keiner besser r. als l.

Herr Musikdirector Dr. Langer gab mir Gelegenheit, Versuche in einer Versammlung der Mitglieder des unter seiner Direction stehenden, aus Studenten gebildeten, Pauliner Sängervereins in Leipzig anzustellen. Von den 48 Anwesenden, die zum Theil schon Kenntniss von den früheren Erfolgen haben konnten, hörten 26 besser l. als r., 12 gleich gut l. und r., 10 besser r. als l. Da jedoch einer von den 26 besser links Hörenden schon früher geprüft war, ist statt 26 bei der Addition nur 25 in Rechnung zu bringen.

Endlich gab mir Prof. Ruete Gelegenheit, Versuche mit einer Abtheilung der Studirenden, welche an den klinischen Uebungen unter seiner Direction Theil nehmen, anzustellen. Unter den 10 Individuen, deren keines schon früher geprüft war, hörten 7 den Schall stärker l. als r., 2 blos klarer, heller aber nicht stärker l. als r., blos 1 gleich gut l. und r.

Alles zusammengezählt also hörten unter 103 Personen 61 den Schall stärker, 4 blos klarer, aber nicht stärker, also 65 doch im Ganzen besser l. als r., 26 gleich gut l. und r., oder so, dass der Unterschied zweifelhaft blieb, 12 besser r. als l. *).

*) Bei dem Vortrage über diesen Gegenstand am 1. Juli wurden auch die anwesenden, meist früher noch nicht geprüften, Mitglieder der Societät der Probe unterworfen. Mit wenig Ausnahmen hörten alle übrigen besser l. als r.; ohne dass die meisten diese Ungleichheit vorher gekannt hatten. Insbesondere war Prof. Drobisch sehr überrascht, den Schall entschieden stärker auf dem linken Ohre zu vernehmen, da seine Sehkraft auf dem linken Auge gelähmt ist, da er einen fast habituellen Rheumatismus auf der

Digitized by Google

Auffallend ist das verschiedene Verhältniss, was sich in den einzelnen Fractionen der Versuche mit verschiedenen Personen fand, was beweist, dass man auf geringen Zahlen nicht fussen kann. Ueberall aber war das Uebergewicht der l. besser als r. Hörenden entschieden.

Zwei, l. besser als r. hörende, Personen der oben angeführten Gesellschaft (Prof. E. H. Weber und eine musikalisch gebildete junge Dame) versicherten zugleich, dass ihnen der Schall auf dem einen Ohre eine grössere Höhe zu haben schiene, als auf dem andern, die eine Person (Weber) auf dem rechten, die andere auf dem linken Ohre, obwohl der zur Prüfung angewandte Schall überhaupt für Andere keine eigentliche Tonhöhe hatte. Auch sonst erhielt ich einigemal die Angabe, dass der Ton auf einem Ohre höher als auf dem andern erscheine; wenn ich aber näher zufragte, fand sich, dass nur ein hellerer, klarerer Schall damit gemeint war (der manchmal mit grösserer Stärke verbunden war, andermale nicht damit verbunden schien), nicht aber ein Schall von wirklich grösserer Tonhöhe. Jene zwei Personen aber erklärten auf mein Befragen ausdrücklich, nicht blos eine grössere Helligkeit, sondern grössere Höhe auf einem Ohre zu vernehmen.

Von den vorigen Prüfungen sind solche Personen ausgeschlossen worden, welche entweder notorisch schwerhörig auf beiden Ohren, oder merklich taub auf einem Ohre waren; um so viel möglich nur Fälle in Betracht zu nehmen, welche noch in die Breite der Gesundheit fallen. Inzwischen habe ich jene Fälle nicht beiseite gelassen, wo ich solcher habhaft werden konnte, sondern nur besonders notirt; und hienach scheint pathologische Schwerhörigkeit eher auf dem linken Ohre häufiger als auf dem rechten vorzukommen; denn von 10 Fällen, die mir aus jenen Kategorien theils persönlich, theils durch Berichte von Andern bekannt sind, hören nach eigner Prüfung oder nach Erkundigung 7 besser r. als l., nur 2 besser l. als r., 1 gleich schlecht auf beiden Ohren. Hierüber aber wird Aerzten, die sich specieller mit Ohrenkrankheiten beschäftigen, natürlich eine vollständigere und entscheidendere Statistik zu Gebote stehen, da aus so wenigen Fällen nichts Anderes zu schliessen, als dass

---

linken Kopfseite und eine Art Zwitschern im linken Ohre hat, so dass er früher diese Seite des Kopfes immer überhaupt für die schwächere hielt.

das in Normalgränzen statt findende Uebergewicht von l. über r. in pathologischen Fällen nicht mehr besteht.

Uebrigens kann das von mir erhaltene Resultat an Personen, deren Gehör noch in die Breite der Gesundheit fällt, praktisch insofern einiges Interesse haben, als eine mässige Ungleichheit des Hörvermögens beider Ohren Ohrenärzten hienach noch keinen Anlass geben kann, etwas Pathologisches darin zu sehen.

Man fragt sich natürlich, worin der Grund des eigenthümlichen Uebergewichts des durchschnittlichen Hörvermögens von l. über r. beruht. Wenn Wärmeunterschiede l. deutlicher als r. gespürt werden, kann diess nicht unwahrscheinlich darauf geschoben werden, dass die Haut der rechten Hand wegen häufigeren Gebrauches unstreitig etwas dicker, als die der linken ist. Wenn Druck stärker l. als r. gespürt wird, so reicht diese Erklärung nicht mehr aus, indem eine grössere oder geringere Dicke der Oberhaut die Perception des Drucks nicht wesentlich abändert, und der Unterschied zu Gunsten von l. bei Weber's Versuchen sich nicht blos auf der Hand, sondern auch der Fusssohle und dem Schulterblatte zeigte. »Itaque, sagt Weber, quia alia explicatione caremus, vero simile est, diversitatem illam in nervorum sentientium structura positam esse. Quemadmodum enim musculi dextri lateris musculis sinistri lateris crassiores adeoque robustiores sunt, ita nervos sensorios sinistri lateris nervos dextri lateris sensibilitate superare non repugnat.«

Man wird nun auch beim Gehör zu fragen haben: hängt der Unterschied zwischen l. und r. von einem in den äussern Aufnahmeorganen des Schalles oder einem in der Struktur und Empfindlichkeit der Nerven begründeten Unterschiede ab, und ferner, ist er ein angeborener oder erworbener.

Diese Fragen weiss ich bis jetzt nicht sicher zu entscheiden. Es ist die Vermuthung gegen mich geäussert worden, dass wohl das, im Ganzen häufigere, Schlafen des Menschen auf der rechten Seite eine Verschiedenheit in den Druck- oder Wärmeverhältnissen der Ohren mitführen könne, welche jene Verschiedenheit zur Folge habe. Auch ist diess nicht gerade unwahrscheinlich; ich habe aber bisher keine hinreichend ausgedehnten und genauen Notizen zu erlangen vermocht, um einer durchschnittlichen Coincidenz in dieser Hinsicht versichert zu sein.

Man hat ferner die Vermuthung geäussert, dass vielleicht eine, sei es durch jenes Verhältniss beim Schlafen, sei es sonst

Digitized by Google

wie entstandene, Ungleichheit in der Absonderung des Ohrenschmalzes das ungleich deutliche Hören l. und r. bewirke, so dass das im Durchschnitt statt findende schlechtere Hören r. nur von einer grössern Verstopfung des rechten Ohres mit Ohrenschmalz abhänge.

Indessen blieb bei mir und einem andern Individuum die Ungleichheit dieselbe auch nach bestmöglichster Ausräumung der Ohren. Um aber den Zweifel bestimmter zu beseitigen, dienten folgende Versuche, für deren Anstellung ich Prof. Ruete verpflichtet bin.

Nachdem die aus 10 Individuen bestehende Abtheilung von Studirenden, von der S. 169 die Rede war, mittelst des Schallpendels geprüft, und dabei das angegebene Resultat erhalten war, 7 stärker l. als r., 2 klarer l. als r., 1 gleich gut l. und r. Hörende, wurden beide Ohren derselben Individuen von Prof. Ruete mittelst des Ohrenspiegels untersucht. Unter den 7 Individuen, welche l. stärker als r. hörten, zeigten sich bei 3 beide Ohren gleich rein; auch fand sich diess so bei Untersuchung der Ohren Prof. Ruete's selbst, der ebenfalls stärker l. als r. hört, durch seinen Assistenten. Bei 2 waren beide Ohren etwas und zwar merklich gleich unrein; bei 1 war das linke, bei 1 das rechte Ohr etwas unreiner als das andere. Unter den 2 Individuen, welche klarer l. als r. hörten, waren bei 1 beide Ohren merklich gleich rein; bei 1 beide ein wenig, aber gleich, unrein; bei dem 1 Individuum, welches gleich auf beiden Ohren hörte, waren beide etwas unrein, r. mehr als l.

Hienach kann in ungleicher Verstopfung der Ohren mit Ohrenschmalz nicht der fragliche Grund gesucht werden; und ich muss mich für jetzt begnügen, das Factum des Unterschieds mit jenem wahrscheinlichen Grunde zu notiren, ohne einen sichern Grund dafür angeben zu können.

Es würde nicht ohne Interesse sein, eine der vorigen entsprechende Untersuchung auf das Sehvermögen beider Augen anzuwenden. Allerdings besitzen wir schon eine, auf Benutzung der Register des Opticus Tauber in Leipzig gegründete, schätzbare Untersuchung, welche hieher bezogen werden kann, von E. H. Weber in der, unter Holke's Namen erschienenen, aber dem sachlichen Inhalt nach ganz von Weber abhängigen Dissertation: »Disquisitio de acie oculi dextri et sinistri in mille ducentis hominibus sexu, aetate et vitae ratione diversis examinata. Lipsiae

Digitized by Google

1830, deren, in der Dissertation selbst weiter specificirtes, Gesammtresultat dieses ist: »Ex 1450 hominibus cujusvis aetatis, sexus, ordinis et opificii, qui a Cl. Taubero vitra acceperunt ocularia, mille satis aequaliter oculo utroque cernebant. In 415 vere hominibus, qui inaequalitatis hoc vitio circa oculos premerentur, myopesque simul essent, 248 reperiebantur brevius in sinistro quam in dextro cernentes, nec nisi 167 in quibus inversa ratio obtineret. In 254 hominibus, in quibus singulis eadem adesset oculorum inaequalitas, simul vero presbyopiae vitium adjunctum, 137 a dextro et 117 a sinistro oculo graviorem offerebant presbyopiam. Igitur in myopibus sinister, in presbyopibus vero dexter oculus deterior foret, itaque in utroque casu dexter longinquius cernens. Veruntamen quisque intelligit, ad haec confirmanda opus adhucdum esse majore observationum copia, eaque in sanis quidem instituenda, vitro oculari minime indigentibus.«

Inzwischen bezieht sich diese Untersuchung vielmehr auf die Sehweite als die Helligkeit beider Augen. Ich traf aber bei meinen Untersuchungen über das binoculare Sehen auf eine Mehrzahl von Individuen, welche durch abwechselnden Schluss eines und des andern Auges oder durch Auseinanderschieben des Doppelbildes eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde eine grössere Helligkeit des einen als andern Auges constatirten und fing selbst an, gelegentlich weitere Beobachtungen darüber anzustellen, indem ich viele Individuen veranlasste, zuzusehen, ob ihnen Tages beim Blick in den Himmel oder Abends auf den Milchglasschirm einer brennenden Lampe das Gesichtsfeld heller bei Schluss des einen oder andern Auges erscheine. Auch hier fand sich ein nicht unerhebliches Uebergewicht zu Gunsten des linken Auges. Aber ich führe mit Fleiss keine Zahlen an, weil sich mir bald die Ueberzeugung aufdrang, dass blos gelegentliche Versuche zu nichts Sicherm führen können und ich jenes Resultat nicht für zuverlässig halte. Es ist schwer, vielen Personen begreiflich zu machen, dass es sich nicht um Deutlichkeit, sondern Helligkeit handle; beide Augen müssen sorgsam vor ungleicher Ermüdung geschützt, unter gleichen Lichteinfluss gebracht und unter verschiedenen Umständen wiederholt geprüft werden, was Alles nicht durch blos gelegentliche Versuche mit Diesem und Jenem geschehen kann. Ausserdem kann eine solche Untersuchung unstreitig nur Interesse haben, wenn sie mit Rück-

Digitized by Google

sicht auf die Frage geführt wird, wiefern die vorkommenden Ungleichheiten vielmehr auf ungleicher Verdunkelung der durchsichtigen Augenmedien oder ungleicher Empfindlichkeit der Netzhaut beruhen, was die Zuziehung des Augenspiegels, der entoptischen Schattenbilder und sonstigen diagnostischen Hülfsmittel voraussetzt, mit denen ich nicht hinreichend vertraut bin; daher ich für angemessen halte, eine solche Untersuchung Vorstehern physiologischer Institute und klinischer Augenanstalten zu empfehlen, welche eine grössere Anzahl junger Leute dabei zuziehen, erforderlich anleiten und mit den nöthigen Hülfsmitteln versehen können.

Ausser der Helligkeit der Augen kann auch das Farbensehen und die Ermüdungsfähigkeit derselben verschieden sein, was sich sehr gut durch Erzeugung von Doppelbildern auf die in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen*) angegebene Weise ermitteln lässt; und unstreitig wird es dienlich sein, die Untersuchung hierüber mit der über die ungleiche Helligkeit der Augen zu verbinden.

*) Abhandl. d. sächs. Soc. phys.-math. Cl. V. S. 375 ff. 418 ff.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Julius Sachs, Krystallbildungen bei dem Gefrieren und Veränderung der Zellhäute bei dem Aufthauen saftiger Pflanzentheile . . . 1

A. F. Möbius, Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit 51

O. Funke, über photographische Vervielfältigung der Myographion-curven 65

O. Schlömilch, Ein neuer statischer Beweis für das Parallelogramm der Kräfte 68

G. Th. Fechner, über die Contrastempfindung 71

Derselbe, Einige Bemerkungen gegen die Abhandlung Prof. Osann's „Ueber Ergänzungsfarben“ in der Würzburger naturwiss. Zeitschr. Bd. I. S. 61. ff. 146

Derselbe, Ueber die ungleiche Deutlichkeit des Gehörs auf linkem und rechtem Ohre 166

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

JUL 14 1930

S-ES-L

4066

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1860.

Vol. 12. + Title p. etc.

III.

MIT 1 TAFEL.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1861.

H

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG AM 12. DECEMBER 1860.

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SEINER MAJESTÄT DES KÖNIGS.

W. Hofmeister, *über die durch die Schwerkraft bestimmten Richtungen von Pflanzentheilen.*

Als Th. Ands. Knight durch seinen berühmten Versuch, bei welchem er Saamen auf in schneller Drehung begriffenen Rädern keimen liess,*) den Beweis lieferte, dass die Wachsthumsrichtung der Wurzeln nach dem Erdmittelpunkte, das Streben der Stängel nach dem Zenith lediglich durch die Einwirkung der Schwerkraft bedingt werde, da knüpfte er daran den Erklärungsversuch**) des Vorganges, dass die allein an der Spitze der Wurzel sich ansetzenden neuen Theile, während sie noch weich und biegsam seien, und die sie zusammensetzende Substanz aus dem flüssigen in den festen Zustand übergehe, von der Schwerkraft in hinreichendem Maasse beeinflusst würden, um der Wurzelspitze eine Neigung abwärts zu geben; während in den Stängeln, deren Längenwachsthum vorwiegend auf der Streckung zuvor schon organisirter Theile beruhe, bei Ablenkung von der Verticalen der nährende Saft, der Schwere folgend, an der unteren Seite des Stängels sich sammle, hier das Wachsthum beschleunige, und so die Spitze des Stängels aufwärts lenke.

Hiergegen wendete Dutrochet ein,***) dass die Erklärung Knight's nicht auf die Fälle des Abwärtswachsens von

*) Philos. Transact. 1806, 99.

**) a. a. O. 104.

***) Mémoires II (1837) 8 ff.

Digitized by Google

Stängeln, oder des wagrechten Wachsthums von Wurzeln passe. Er suchte die verschiedenen Wachsthumsrichtungen der in Rede stehenden Organe aus der in Stängeln und Wurzeln verschiedenartigen Entwickelung von Mark. und Rinde abzuleiten. Aus dem Umstande, dass an einer abwärts gekrümmten, der Beugung parallel längsgespaltenen Wurzel die an der Aussenseite convexe Längshälfte eine stärkere, die an der Aussenseite concave einen geringeren Grad der Krümmung annimmt, während ein ebenso behandelter Stängel in dieser Beziehung sich umgekehrt verhält, schloss Dutrochet, dass bei der Wurzel die convexe, beim Stängel die concave Längshälfte die bei der Ab- oder Aufwärtskrümmung thätige sei, welcher die andere leidend folge; in beiden Fällen sei es die obere Längshälfte, welche die Krümmung bewirke.*) Ein durch zwei radiale Schnitte isolirter Längsstreif aus der Rinde zeige das Streben, seine Aussenfläche convex zu wölben, wenn er in Wasser gelegt werde. Ein eben solcher Streifen aus dem Marke verhalte sich umgekehrt. In beiden Fällen werde die Krümmung der Streifen in die entgegengesetzte übergeführt, wenn man sie in Zuckersyrup bringe. Der Grund hiervon liege darin, dass die Zellen der Rinde von aussen nach innen, die des Markes von innen nach aussen an Grösse abnähmen. In beiden Fällen würden die grösseren Zellen bei Wasseraufnahme des Inhalts rascher an Grösse zunehmen, als die kleineren; es würde bei dem Rindenstreifen die Aussenfläche, bei dem Markstreifen die Innenfläche sich stärker verlängern, als die entgegengesetzte. Werde eine Wurzel oder ein Stängel von der Verticallinie abgelenkt, so werde die Concentration der in den Intercellularräumen enthaltenen Flüssigkeit an der nach unten gewendeten Seite des Organs zunehmen, was dadurch bewiesen werde, dass die convexe Längshälfte eines aufwärts gekrümmten Stängels die specifisch schwerere sei. **) Diese gesteigerte Concentration beeinträchtige die Neigung zur Krümmung der Rinde und des Markes sowohl der Stängel als der Wurzeln. Nun wiegt bei den Stängeln die Entwickelung des Markes, bei den Wurzeln die der Rinde weit vor. Ein längsgespaltener Stängel krümmt seine beiden Längsflächen nach aussen concav; die einer längsgespaltenen Wurzel werden nach aussen convex. An

*) Mémoires II, 20.

**) a. a. O. 22.

Digitized by Google

den von der lothrechten Linie abgelenkten Organen wird das Krümmungsstreben der oberen Hälfte das Uebergewicht erhalten; der Stängel wird sich aufrichten, die Wurzel sich nach abwärts beugen. *)

Diese Darlegung Dutrochet's leidet in hervorstechender Weise an den Mängeln, welche seine Arbeiten über Richtungserscheinungen überhaupt ungeniessbar machen: das Streben, alle Vorgänge aus endosmotischen Wirkungen zu erklären, reisst ihn zu den abenteuerlichsten Schlüssen fort, und trübt seinen Blick für die Wahrnehmungen der einfachsten Thatsachen. Die Folgerung Dutrochet's aus der bei Längsspaltung gekrümmter Stängel eintretenden Steigerung der Krümmung der nach aussen concaven Längshälfte, dass diese Längshälfte die allein thätige sei, ist eine übereilte. Diese und die umgekehrte Aenderung der Krümmung längsgespaltener Wurzeln folgen aus den überhaupt bestehenden Spannungsdifferenzen der Gewebe. Dass die anatomischen Angaben, auf welche Dutrochet seine Lehre gründet, vielfältig unrichtig sind, dass seine Erklärung auf die Richtungsänderungen einzelliger Organe keine Anwendung findet, ist schon von anderer Seite dargethan worden.**) Hier sei nur noch erwähnt, dass ein System von Intercellulargängen im beugungsfähigen Theile von Wurzeln nirgends existirt, auch in dem von Stängeln in vielen Fällen fehlt; — und dass die Behauptung, ein von einem jungen, der Krümmung zenithwärts fähigen Sprosse abgelöster Rindenstreif strebe nach aussen convex zu werden, handgreiflich falsch ist. Jede Beobachtung zeigt das Gegentheil. Die Erscheinung ist so allgemein und augenfällig, dass sie auch Dutrochet unmöglich entgehen konnte: wie er aber sie auffasste, geht aus dem Rath hervor, welchen er den Wiederholern seines Versuches ertheilt: man möge von dem zu untersuchenden Rindenstreifen die Epidermis ablösen, «da diese dem raschen und vollständigen Eindringen des Wassers sich widersetzen würde.» Das Folgende wird die völlige Unzulässigkeit dieser Beobachtungsweise darthun.

Eine dritte Hypothese wurde von dem einzigen Forscher, der neuerdings sich mit dieser Frage beschäftigte, als eine Modification der Knight'schen aufgestellt, insoweit diese auf die

*) a. a. O. 23.
**) Wigand, botan. Untersuchungen. Braunschw. 1854, 162, 165.

Digitized by Google

Wurzeln sich bezieht. W i g a n d*) nimmt an, in einer horizontal liegenden röhrenförmigen Zelle, dem Wurzelhaare eines Farnprothallium z. B., könne man sich die Schwerkraft zunächst auf den Zelleninhalt wirkend vorstellen. Das in der Spitze angehäufte Protoplasma müsse vermöge seiner grösseren Schwere mit dem unteren Theile der Zellwand in innigere Berührung kommen, als mit dem oberen, und da in dieser Substanz die Hauptbedingung für die Assimilation und Neubildung liege, so werde die Zellwand an dieser Stelle in höherem Grade ernährt und ausgebildet werden: es werde eine sackartige Erweiterung der Zelle nach unten und damit der Anfang zu einer Krümmung entstehen. Diese Anschauung könne ihre Anwendung auch auf Wurzeln zusammengesetzteren Baues finden. — Und warum nicht auch auf Stängel? Aber in entscheidender Weise spricht gegen sie die unzweifelhafte Thatsache, dass ein örtliches stärkeres Flächenwachsthum einer Membran nur dann die Bildung einer Aussackung zu Stande bringt, wenn dasselbe von einem gegebenen mathematischen Punkte aus nach allen Richtungen hin rasch abnimmt. Ist das Wachsthum über eine irgend grössere Fläche gleichmässig verbreitet, so bringt es eine Krümmung des Organs hervor, bei welcher die stärker gewachsene Seite der Membran c o n v e x wird. Im vorliegenden Falle wäre, die übrigen Voraussetzungen W i g a n d's zugegeben, ein solches Ergebniss um so mehr zu erwarten, als die directe Beobachtung nirgends die Bildung solcher Aussackungen zeigt, und als von der Verticalen abgelenkte einzellige Stängel (die von Nitellen z. B.) sich a u f w ä r t s krümmen.

Differenzen der Spannung der Gewebe.

Bei Untersuchung der Mechanik der geocentrischen Krümmungen pflanzlicher Organe ist vor Allem der Umstand scharf im Auge zu behalten, dass von gewissen verschiedenen Organen völlig gleichen anatomischen Baues die einen bei Einwirkung der Schwerkraft aufwärts, die anderen abwärts sich krümmen. Sichtbare Unterschiede der Structur eines Stängels und einer Wurzel von Nitella, eines auf- und eines abwärts wachsenden Sprosses von Equisetum palustre sind nicht vorhanden; die Differenzen der Anordnung und Vertheilung der Gewebe in Stän-

*) a. a. O. 165.

Digitized by Google

gel und Wurzel derselben Pflanze sind häufig verschwindend klein. Wohl aber zeigen Stängel und Wurzel in ihren geocentrischer Krümmung fähigen Theilen ein sehr verschiedenes Maass von Differenzen der Spannung der einzelnen Gewebsmassen. Von diesen Spannungsdifferenzen werde ich bei Darlegung meiner Untersuchung ausgehen.

Es ist eine Erscheinung von ausnahmsloser Allgemeinheit, dass beim Hervortreten eines Pflanzenorganes aus dem frühesten Knospenzustande die Gewebe desselben sich sondern in solche, welche ein Streben zur Ausdehnung nach allen Richtungen besitzen, und in solche, welche, durch dieses Ausdehnungsstreben passiv gedehnt, demselben die Waage halten und, wenn isolirt, einen kleineren Raum einnehmen, als im lebendigen unverletzten Organe. *) Diejenigen Gewebsmassen, welche im Ausdehnungsstreben begriffen sind, und wenn isolirt ihr Volumen (oft sehr beträchtlich) vergrössern, sind das saftreiche Parenchym der Rinde, des Markes, der Blattspreite u. s. w. Die gedehnten, im Zusammenziehungsstreben befindlichen Gewebe sind die Aussenfläche (die cuticularisirten Schichten) der Epidermis, und die Gefäss- und Holzbündel. Die Spannungsdifferenz zwischen Epidermis und Rinde tritt in der Regel früher nach dem Verlassen des Knospenzustandes ein, als die zwischen Parenchym

---

*) Die aus diesem Verhältniss resultirenden Spannungsdifferenzen der Gewebelemente sind früher nur wenig beachtet, und in Bezug auf ihr Verhältniss zu den Bewegungserscheinungen nicht hinreichend gewürdigt worden. Der erste Beobachter, der der Erscheinung des Klaffens der Längshälften junger Sprossen gedenkt, ist Johnson (Lond. u. Edinb. philos. magaz. VI [1835] 164 und VIII, 357; auch in Ann. sc. nat. II Sér. IV, 321); er fasst sie als ein Phänomen der Reizbarkeit auf. Der Dutrochet'schen Missverständnisse hieher gehöriger Fälle gedachte ich bereits. Eine Notiz bei Schleiden (Grundzüge II. Aufl. Bd. 2, 543) bespricht das gelegentliche Vorkommen einer Spannung, die erst dann ihren Effect sichtbar mache, wenn auf irgend eine Weise die Continuität der Theile getrennt werde, z. B. beim Aufspalten des Blüthenschafts von Taraxacum. Bedeutsamer ist die Erklärung Brücke's (Müller's Archiv 1848, 448) des Eintritts der Tag- und Nachtstellung auch solcher Blätter der Mimosa, von deren Blattkissen eine Hälfte abgetragen wurde, aus der Wechselwirkung zwischen der Elasticität der Epidermis des übrig gelassenen Gelenkpolsters mit dem periodisch sich ändernden Ausdehnungsstreben des Schwellgewebes desselben; ein Gedankengang, in welchem Ratschinsky bei Besprechung anderer Schlafbewegungen ihm folgte (Bullet. de la soc. d. naturalistes de Moscou, 1857; abgedruckt in Ann. sc. nat. IV Sér. t. IX, 164).

Digitized by Google

und Prosenchym.*) Den meisten Pflanzentheilen ist es zu eng in ihrer Haut.

In einzelligen Organen waltet ein ähnliches Verhältniss ob. Bei vorschreitender Ausbildung nimmt das Ausdehnungsstreben der äussersten Schicht der Zellhaut viel früher und rascher ab, als das der inneren. Jene steht unter einer oft beträchtlichen Spannung, auch abgesehen von dem Drucke, welchen der Zelleninhalt auf die Zellwand übt. Ein Längsstreif, der durch zwei radiale Schnitte aus der Wand einer nicht allzujungen Zelle von Nitella, aus der Stängelzelle von Cladostephus isolirt wird, wölbt sich mit seiner Aussenfläche concav. Wird eine solche Zelle von Nitella aufgeschlitzt, so öffnet sich der Riss klaffend. Nicht so an sehr jungen, der Knospe noch angehörigen Zellen: an diesen ist kein ausgeprägter Unterschied der Spannung der äussersten und inneren Hautschichten vorhanden.

Auch in vielzelligen, complicirt gebauten Organen besteht die Spannungsdifferenz innerhalb der Zellwände. Sie ist in hohem Grade unabhängig von der endosmotischen Spannung des Zelleninhalts. Schnitte durch die, geocentrischer Krümmung fähigen Stücke von Stängeln (die dieser Beugung fähige Strecke fällt zusammen mit der, auf mechanische Erschütterungen sich krümmenden), welche so dünn sind, dass ihre Dicke weniger als den Durchmesser einer Zelle in der Richtung senkrecht auf die Schnittflächen beträgt, werden concav an der Kante, welche von dem gedehnten, im Streben elastischer Zusammenziehung begriffenen Gewebe eingenommen wird: ein solcher Schnitt aus der Rinde, der nur Epidermis und Parenchym enthält, wird concav an der Epidermisseite; ein Schnitt, der vom Marke bis ans Holz reicht, wird concav an der Holzseite; ein Schnitt durch die von ihrer Epidermis zuvor entblösste Rinde bis an den Bast oder an das Holz wird an der Innenseite concav.**) — Die Herstellung solcher Schnitte ist mühsam und zeitraubend. Auf eine ganz mühelose Weise kann man sich aber die Ueberzeugung vom Vorhandensein bedeutender Spannungsdifferenzen in den Zellhäuten, nach gänzlicher Ausschliessung allen Zelleninhaltes verschaffen, wenn man von saftreichen Blättern von Monokotyledonen, von

---

*) Zahlenangaben über den Grad dieser Spannung habe ich bereits früher veröffentlicht: diese Berichte 1859, 194.

**) Vergleiche diese Berichte 1859, 194.

Digitized by Google

Allium, Narcissus, Hyacinthus z. B., die Epidermis vorsichtig abziehet. Man erhält dabei an den Rändern des abgeschälten Epidermisstückes Stellen, welche nur aus der freien Aussenfläche der Epidermiszellen bestehen, die von den Seitenwandungen dieser Zellen abriss. Oft verbreiten sich solche Stellen über beträchtliche Strecken der abgelösten Haut. Diese Strecken nun, die nur aus einer Membran bestehen, an denen keine Zellenhöhlung und kein Zelleninhalt sich befindet, werden in deutlichster Weise nach aussen concav; sie rollen sich, in Wasser gelegt, sogar ein; gleichen, in concentrirte Zuckerlösung gebracht, die Einrollung wieder aus; — beides nur etwas minder stark und rasch, als die unverletzte Epidermis.

Verlängerung der sich beugenden Theile während der Krümmung.

Die Krümmung zenithwärts von Sprossen oder Blättern, welche aus ihrer normalen Stellung abgelenkt wurden, ist unter allen Umständen von einer Verlängerung auch der concav werdenden Seite begleitet. Bisweilen ist diese Verlängerung gering und nur durch feine Messung wahrzunehmen; in der grossen Mehrzahl der Fälle, namentlich bei sich aufwärts krümmenden Sprossen aber sehr beträchtlich, insofern die Aufwärtskrümmung vorzugsweise innerhalb der noch in die Länge sich strekkenden Region des Stängels stattfindet. Hier einige Beispiele (Krümmung und Länge der Bogen sind aus Chorda und Sinus versus berechnet).

	Zu Anfang des Versuchs		Dauer des Versuchs in Stunden.	Nach Verlauf dieser Zeit	
	Krümmung.	Länge in M.M.		Krümmung.	Länge in M.M.
1) Oenothera biennis. Stück eines mit Blüthenknospen besetzten Sprossendes, 18 M.M. von der Spitze entfernt, horizontal aufgestellt . . .	0	55	7	110°16′	55,96
2) ähnliches Stück, ebenso aufgestellt	0	36,5	7 18	57° 4′ 95° 8′	37,76 40,88
3) ähnliches Stück, sehr kräftiger Mitteltrieb von 6 M.M. Dmss. waagrecht aufgestellt	0	97,3	24 43 48	18° 53′ 66° 4′ 78° 2′	97,53 98,41 102,8

Digitized by Google

	Zu Anfang des Versuchs		Dauer des Versuchs in Stunden.	Nach Verlauf dieser Zeit	
	Krümmung.	Länge in M.M.		Krümmung.	Länge in M.M.
4) Iva xanthifolia, Stück eines blüthentragenden Seitensprosses, 21 M. M. unter der Spitze	0	105,35	18	65° 16′	109,6
5) Urtica dioica, Stück eines in Wasser eingewurzelten Stecklings, 5 M. M. unter der Spitze	39° 8′	29,47	19	98° 10′	34
6) Oenothera biennis. Stück eines blüthenknospentragenden Sprossendes, im Winkel von 36° von der Horizontalebene aufsteigend aufgestellt; bei der Aufstellung welk, im Bogen von 38° 53′ herabhängend	38° 53′	82,2	8 19	0*) 85° 40′ **)	? 84,2
7) ähnliches Stück, welk, im Bogen von 41° 30′ abwärts hängend, horizontal aufgestellt	41° 30′	89	12 24	0 134° 44′ ***)	? 90,13
8) Tropaeolum majus. Stück eines Sprossendes, 74 M. M. von der Spitze entfernt, waagrecht aufgestellt . .	0	58	11	69° 12′	58,703
9) ein ähnliches Stück, 32 M. M. von der Sprossspitze entfernt, waagrecht aufgestellt	0	66	18	43° 44′	66,69
10) Tropaeolum majus. Stück des Stieles eines ausgewachsenen Blattes	0	66,5	8	41° 14′	67,45
11) desgleichen	0	77	8	34° 28′	77,05
12) desgleichen	23° 32′	97,71	8	47° 4′	98,75
13) desgleichen	45° 8′	94,42	8	72° 24′	97,11
14) desgleichen	0	112	8	49° 38′	115,4
15) Taraxacum officinale. Schaft einer völlig aufgeblüheten Inflorescenz	36° 30′	98,66	19	40° 17′	99,02
16) desgleichen	0	65,4	19	28° 44′	65,687
17) desgleichen	0	79,6	19	38° 22′	80,44
18) desgleichen	0	90,4	19	46° 25′	90,87
19) desgleichen	10° 26′	176,24	19	86° 10′	184,02

*) jetzt gerade und steif, **) also 49° 40′ über die Verticale hinaus. ***) Die Krümmung beschränkte sich auf 22,93 M. M. des oberen Endes.

Digitized by Google

In noch anschaulicherer Weise lässt sich die Verlängerung auf der concav werdenden Seite, welche die Aufwärtskrümmung begleitet, durch folgenden Versuch darlegen. Ich befestigte vollkommen gerade Stücke krümmungsfähiger, aber am Schlusse ihres Längenwachsthums angelangter Organe auf einer Glasplatte, indem ich auf jedes der beiden Enden eines Stückes einen Tropfen geschmolzenen gelben Wachses auftrug. Die dem Versuch unterworfenen Stücke berührten die Glastafel mit der ihr zugewandten Kante in jedem Punkte. Die Glastafel wurde in einem finsteren, feuchten Raume (einem mit nassem Löschpapier ausgelegten, gut schliessenden Blechkasten) horizontal so aufgestellt, dass die Fläche mit den angekitteten Stängel- und Blattstielstücken nach unten gekehrt war. Nach 36 bis 48 Stunden zeigen die Stängel- und Blattstielstücken, trotzdem dass die beiden Enden eines jeden unverrückbar am Glase befestigt sind, nach unten convexe Krümmungen, bisweilen sehr bedeutende. Es ist klar, dass die Krümmung nur dadurch möglich wird, dass sowohl die convex, als auch die concav gewordenen Seiten der Pflanzentheile sich verlängerten. Lösete ich die Befestigung an einem oder beiden Enden, so trat augenblicklich eine Steigerung der Krümmung ein, begleitet von einer geringen Verkürzung der concaven Kante. Aus letzterem Umstande geht hervor, dass die nach oben gewendete, concave Längshälfte des Stängels oder Blattstiels während der Befestigung an die Platte durch das erhöhte Ausdehnungsvermögen der convexen passiv gedehnt ist. Nach Ablösung des Pflanzentheils von der Glasplatte zieht die concave Längshälfte vermöge ihrer Elasticität auf einen kleineren Raum sich zusammen, während die convexe ihrem Ausdehnungsstreben, durch Befestigung der Enden des Pflanzentheiles nicht mehr gehindert, mittelst der Steigerung der Krümmung desselben folgen kann. (Beispiele s. nächste Seite.)

Es mag hier beiläufig bemerkt werden, dass ich dasselbe Verfahren in Bezug auf das Verhalten ähnlicher Pflanzentheile zum Lichte anwendete. Ich befestigte gerade Stücke von Stielen alter Blätter von Hedera Helix und Tropaeolum majus an beiden Enden mit Wachs auf einer Spiegelglasplatte, stürzte über diese Platte eine auf der Innenseite mit schwarzem, feuchtem Tuche ausgelegte Glasglocke, kittete die Glocke mit Siegellack an die Platte, und gab derselben im Hintergrunde des Zimmers eine dem Fenster zugewendete Aufstellung der Art, dass die

Digitized by Google

	Länge des geraden, der Glasplatte anliegenden Pflanzentheils.	Nach 46stündiger horizontaler Aufstellung im Dunklen		Nach Ablösung von der Platte	
		Krümmung.	Länge der concaven Seite.	Krümmung.	Länge der concaven Seite.
Taraxacum officinale, Schaft einer aufgeblühten Inflorescenz. . . .	M. M. 97	73° 4′	M. M. 103,9	78° 16′	M. M. 103,54
desgleichen	99	18° 28′	99,41	18° 28′	99,39
Tropaeolum majus, Stück eines Blattstiels.	104	13° 4′	105,35	17° 43′	105,1
desgleichen	66	17° 22′	66,25	27° 54′	66,05
desgleichen	94	24° 18′	94,71	39° 46′	94,34

Glasplatte und die an ihr befestigten Pflanzentheile lothrecht standen. In allen Fällen trat gegen das einfallende Licht concave Krümmung nach Verlauf von 48—72 Stunden deutlich hervor. Sie war aber nie so beträchtlich, wie die eben erwähnte geocentrische; in keinem der beobachteten Fälle überstieg sie 15°. Die auch aus anderen Gründen unwahrscheinliche Voraussetzung, als bewirke das Licht Contractionen pflanzlicher Gewebe, halte ich durch diese Beobachtung für völlig widerlegt. Alle Thatsachen lassen sich ungezwungen aus einer, durch den Lichteinfluss bewirkten Veränderung der Dehnbarkeit, Steigung der Elasticität derjenigen Gewebtheile der dem Licht zu-, oder nach Befinden (bei negativem Heliotropismus) abgewendeten Längshälfte des Organs erklären, welche dem Ausdehnungsstreben den expansiven Widerstand leisten.

Mechanik der Aufwärtskrümmung.

Die Krümmung aufwärts kann entweder durch Steigerung des Ausdehnungsstrebens des saftreichen Parenchyms der unteren Längshälfte des Organs, oder aber durch Verminderung der Elasticität, durch Erhöhung der Dehnbarkeit der passiv gedehnten Gewebe dieser Längshälfte, der Epidermis und der Gefäss- und Holzbündel derselben, bewirkt sein. Die röhrenförmigen Blätter von Allium Cepa bieten ein zur Lösung dieser Frage besonders geeignetes Material.

Digitized by Google

Diese Blätter sind bekanntlich hohl, von einer Gestalt, die der Längshälfte eines sehr schlanken Kegels nahe kommt; die Epidermis ist leicht ablösbar. Ein abgelöster Epidermisstreif rollt sich sofort spiralig ein, mit der Aussenfläche concav werdend. Ein Streif des Blattgewebes, von welchem die Epidermis abgelöst ist, krümmt sich mit der Concavität nach innen; die von dem weissen, die axile Höhle auskleidenden Gewebe eingenommene Seite wird die concave. Ein Längsstreif aus einer der Wandungen des röhrigen Blattes im Ganzen, ohne Ablösung der Epidermis genommen, wird meist an der Aussenfläche concav; — rührt der Streifen aber von einem jüngeren, in kräftigster Entwickelung stehenden Blatte her, so ist es dagegen häufig die Innenfläche, welche concav wird; — oder aber der Streif bleibt völlig gerade. Die dünnen Gefässbündel, welche verhältnissmässig wenig zahlreich das grüne Parenchym durchziehen, zeigen keine erheblichen Differenzen der Spannung von diesem. Das Blatt von Allium Cepa kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus drei Kegelmänteln, deren mittlerer, das grüne Parenchym, in einem lebhaften Ausdehnungsstreben sich befindet, welchem die beiden anderen, Epidermis und Auskleidung der axilen Höhle, durch ihre Elasticität das Gleichgewicht halten. In der Jugendzeit des Blattes steht diese Auskleidung des axilen Hohlraumes, späterhin die Epidermis unter stärkerer Spannung. Dieser Bau hat eine gewisse Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen der Wurzeln, indem dort wie hier ein die Längsachse einnehmender, in Expansion begriffener Gewebscylinder, ein Mark völlig fehlt. — Es ist bei diesen Spannungsverhältnissen selbstverständlich, dass ein Blatt, von welchem man einseitig die Epidermis abzieht, sich zu einem an der geschälten Seite stark convexen Bogen krümmt.

Diese Blätter, ältere wie jüngere, krümmen sich rasch und stark aufwärts, wenn die in Erde oder Wasser eingewurzelten Pflanzen in schräge oder horizontale Lage gebracht werden. Die Krümmung findet ungefähr in der Mitte der Blattlänge, dem Grunde etwas näher gerückt statt. Sie stellt sehr genau einen Kreisbogen von bis zu 90° dar. Die Blätter, welche mit der schwach rinnenförmigen Oberseite, die, welche mit der halbkegelförmigen Unterseite, und die, welche mit einer der Seitenkanten nach unten gewendet sind, krümmen sich alle in gleichem Maasse.

Ziehet man von einem zenithwärts gekrümmten Blatte die

Epidermis allseitig vorsichtig ab, ohne das unter ihr liegende grüne Parenchym zu verletzen, so streckt sich das Blatt gerade, unter beträchtlicher Verlängerung. Wird die Ablösung der Epidermis sofort nach Eintritt der Krümmung des Blattes vorgenommen, so wird das Blatt in der Regel völlig geradlinig. Erfolgt die Operation erst nach Verlauf einiger Zeit, so bleibt das abgehäutete Blatt meist schwach gekrümmt; die Krümmung ist aber um sehr vieles geringer, als die des unverletzten Blattes es war. So betrug z. B. an gekrümmten Blättern von Allium Cepa

am unverletzten Blatte		am geschälten Blatte	
die Krümmung	die Länge	die Krümmung	die Länge
87° 46′	79,55 M. M.	39° 48′	81,82 M. M.
84° 21′	102,11 ,,	10° 3′	107, 3 ,,
86° 10′	82, 7 ,,	17° 2′	86,92 ,,
73° 4′	93,42 ,,	6° 48′	95,81 ,,

Dieser Versuch beweist, dass die Aufwärtskrümmung der Blätter von Allium nicht durch Zunahme des Ausdehnungsstrebens des Parenchyms der unteren Längshälfte des Blattes, sondern durch Abnahme der Elasticität, durch Zunahme der Dehnbarkeit der nach unten gewendeten Epidermis bewirkt wird. — Allgemeiner anwendbar lässt sich diese Erfahrung so ausdrücken: Die auf Einwirkung der Schwerkraft eintretende Aufwärtskrümmung horizontaler oder gegen den Horizont geneigter Organe von Pflanzen geschieht dadurch, dass in der unteren Längshälfte des Organs die Dehnbarkeit derjenigen Zellenmembranen zunimmt, welche der Expansion der im Ausdehnungsstreben begriffenen Membranen Widerstand leisten. So gefasst, ist dieser Satz mit allen Beobachtungen in voller Uebereinstimmung.

Entfernt man Epidermis, Rinde und Holz von einem aufwärts gekrümmten Sprosse mit geringer Rindenentwickelung, in welchem das saftreiche Mark — wie bei einseitiger Entblössung desselben durch das Convexwerden des Sprosses an der geschälten Seite sich zeigt — vorzugsweise und fast ausschliesslich die Krümmungen bewirkt, so richtet sich, unter Verlängerung, der entblösste Markcylinder gerade. So bei Sprossen von Rubus Idaeus, Erigeron grandiflorum Hook, Oenothera biennis, Vitis vinifera, Fraxinus excelsior. — Im hohlen Stängel von Cirsium palustre ist das Ausdehnungsstreben der Rinde dem des Cylindermantels,

Digitized by Google

welcher vom hohl gewordenen Marke übrig blieb, gleich oder überlegen. Ein von der Epidermis entblösster Längsstreif des Stängels bleibt gerade oder wird nach aussen convex. — Trennt man an einem solchen Streifen, der dem zenithwärts gekrümmten Stücke eines absichtlich niedergehakten Stängels entnommen war, die von der Epidermis entblösste Rinde, und die dünne Lage des Markes vom Holze, so werden beide Parenchymstreifen unter Verlängerung gerade.

Die Aufwärtskrümmung einzelliger Stängel- und Blattorgane begreift sich leicht aus der oben (S. 180) erwähnten Differenz der Spannung zwischen der äussersten und den inneren Schichten der Zellhaut.

Soll die oben gegebene Erklärung des Mechanismus der Aufwärtskrümmung für befriedigend gelten, so muss in allen Organen, sie seien welcher Natur sie wollen, eine solche Krümmung bei Ablenkung von der lothrechten Linie stattfinden, dafern nur die das Organ zusammensetzenden Gewebe unter verschiedenartiger Spannung stehen, und dafern nicht andere Einflüsse, wie etwa Lichtwirkung oder Belastung, die Aufwärtskrümmung hindern. So verhält es sich denn auch in der That.

Eine der schlagendsten der hieher gehörigen Thatsachen ist die bisher ganz übersehene, allen W u r z e l n in den verschiedensten Medien zukommende Eigenschaft, in ihren ältern, der geocentrischen Krümmung nicht mehr fähigen Theilen sich a u f w ä r t s zu krümmen, wenn sie aus der normalen Lage gebracht werden. In den betreffenden Theilen von Wurzeln ist die Epidermis durch das Dehnungsstreben des stark entwickelten Rindenparenchyms in geringem, der axile Strang oder Cylinder aus Prosenchym in höherem Grade gespannt.

Ich befestigte Keimpflanzen von Erbsen mit in lockerer Erde genau vertical abwärts gewachsenen, schnurgeraden und unverästelten Hauptwurzeln von 22—30 M. M. Länge mittelst durch die Kotyledonen und den Wurzelhals gesteckter Nadeln auf Bretchen in der Art, dass die Wurzeln ihrer ganzen Länge nach dem Brete dicht anlagen. Die Bretchen wurden in verschlossenen, keinen Lichtstrahl einlassenden Blechkästen, in denen die Luft mit Wasserdampf gesättigt erhalten wurde, horizontal aufgestellt. Binnen 5 bis 8 Stunden (bei einer Temperatur von +11—13° R.) hatten sich sämmtliche Wurzeln in Winkeln von 20°

bis 30° aufgerichtet vom Brete erhoben. Die Krümmung aufwärts war auf eine kleine Strecke, etwa 10 M. M. vom Wurzelhalse entfernt, beschränkt; der gehobene übrige Theil der Wurzel blieb gerade. — Eine Abwärtskrümmung der Wurzelspitze wurde erst 10—18 Stunden später, nach beträchtlichem Längenwachsthum derselben sichtbar. Ebenso bei Lepidium sativum, Vicia sativa, Zea Mays; bei Keimwurzeln von 4—10 M. M. Länge.

Wurden längere Wurzeln von Keimpflanzen demselben Versuche unterworfen, so trat die Hebung eine bestimmte Strecke rückwärts von der Spitze ein. Das Stück der Wurzel von der Hebungsstelle bis zur Wurzelspitze blieb in seiner Richtung unverändert. Die Entfernung der Hebungsstelle von der Wurzelspitze betrug

bei Lepidium sativum 1,5 M. M. bis 3 M. M.
,, Pisum sativum . . 5 ,, ,, 11 ,,
,, Vicia sativa . . . 2 ,, ,, 4 ,,

In Wasser gewachsene, lange Adventivwurzeln von Allium Cepa richten binnen 10 Stunden ihre 12 bis 18 M. M. langen Enden in einem Winkel von beiläufig 14° auf, wenn sie durch Neigung des Gefässes in horizontale Lage gebracht werden. Abwärtskrümmung der fortwachsenden Enden tritt erst nach Verlauf von etwa 15 Stunden hervor. Noch nach 20 bis 24 Stunden ist die Sehne des Bogens horizontal, zu welchem das Endstück der Wurzel nun gekrümmt ist.

Keimpflanzen von Pisum sativum, mit vertical gewachsenen geraden Wurzeln von 70—78 M. M. Länge wurden an Schwimmern aus Kork so befestigt, dass die Wurzeln horizontal in Wasser, etwa 1 M. M. unter dessen Oberfläche sich befanden. Nach 6 Stunden war noch keine Veränderung in der Richtung der Wurzeln zu bemerken. Aber nach 18 Stunden war, an allen dem Versuche unterworfenen (10) Pflanzen, das Endstück der Wurzel, 8,5 bis 11 M. M. lang, in einem Winkel von 45° bis 66° aufwärts gerichtet. Die Beugung hatte an einer Stelle stattgefunden, welche bei Beginn des Versuches 6—7,5 M. M. rückwärts von der Wurzelspitze entfernt gewesen war.

Umgekehrt findet man in allen der Aufwärtskrümmung fähigen Organen Spannungsdifferenzen der Gewebe. Energisches Streben zur Krümmung aufwärts ist stets mit grossen solchen Differenzen gepaart. Die Blattstiele von Hedera Helix z. B. richten

Digitized by Google

sich binnen 5—7 Stunden auf, wenn sie in völliger Dunkelheit horizontal aufgestellt werden. Epidermis und Gefässbündel derselben stehen unter hoher Spannung. In den Sprossenden von Hedera dagegen ist das Streben zur Aufrichtung nur in sehr geringem Maasse vorhanden: in so geringem, dass es bei Einwirkung nur irgend intensiven Lichtes von dieser überwältigt wird; die Sprossen wenden sich horizontal vom einfallenden Lichte hinweg. In diesen Sprossenden ist kaum eine Spannungsdifferenz der Gewebe nachzuweisen. Ein abgelöster Epidermisstreif wird an der Aussenfläche nicht merklich concav; ein der Länge nach gespaltenes Sprossende spreizt die beiden Längshälften kaum auseinander. Auf der Vertheilung der unter verschiedener Spannung stehenden Gewebe der älteren Theile von Wurzeln beruht eine Reizbarkeitserscheinung, welche sie, in sehr geringem Grade freilich, mit den Staubfäden theilen. Es ist durch Du Hamel und Kolreuter bekannt (Phys. des arbres II, 167; dritte Forts. vorläuf. Nachr. 130) dass die Staubfäden von Opuntia, von Helianthemum u. A. nach einer ihnen beigebrachten Beugung zunächst in die frühere Richtung zurückschnellen, dann aber in einer der erlittenen Beugung entgegengesetzten Richtung sich krümmen. Etwas Aehnliches findet bei Wurzeln statt. — Ich befestigte mittelst durchgesteckter Nadeln gerade Wurzeln am oberen Ende horizontal über einem mit weissem Papiere überzogenen Reissbrete, so dass die Wurzel dem Papiere parallel in etwa 1 M. M. Entfernung von demselben sich befand. Lage und Länge der Wurzel trug ich mit Bleistift dem Papier genau auf. Dann brachte ich zwischen Papier und Wurzel eine die Wurzel benetzende Schicht Wasser und beugte die äusserste Spitze der Wurzel momentan ein gemessenes Stück seitwärts. Die Entfernung des Punktes, bis zu welchem sie nach Aufhören der Beugung sofort zurückschnellte, wurde angemerkt; — dieser Punkt war stets im Sinne der gewaltsamen Beugung von der ursprünglichen Lage der Wurzel eine, wenn auch geringe Strecke entfernt. Hierauf bedeckte ich die angehefteten Wurzeln mit einer innen angefeuchteten Glasglocke. Nach Verlauf einiger Zeit hatten die Wurzeln sich meist nach einer der erlittenen gewaltsamen Krümmung entgegengesetzten Richtung gebeugt: die Wurzelspitze war etwas über die Linie hinaus gerückt, welche die ursprüngliche Lage der Wurzel bezeichnete. Zum Beispiel:

Digitized by Google

	Entfernung des Fixationspunktes von der Wurzelspitze.	Länge der Sehne des Bogens der gewaltsamen seitlichen Beugung der Wurzelspitze.	Entfernung des Punktes, bis zu welchem die Wurzelspitze nach Aufhören der Beugung zurückschnellt, von ihrer ursprünglichen Lage.	Länge des Weges der Wanderung der Wurzelspitze über die ursprüngliche Lage hinaus, in der beigesetzten Zeit.
Pisum sativum, Keimpflanze mit Pfahlwurzel v. 89 M.M. Länge	74 M. M.	53 M. M.	17 M. M.	in 19 Min. 5 M.M.
desgleichen, 39,5 M.M. lang	12 ,,	8 ,,	3 ,,	in 1^h 17′ 1,2 M.M.
desgleichen, 29 ,, ,,	9 ,,	9,2 ,,	4 ,,	in 2^h 30′ 2 M.M.
desgleichen, 78 ,, ,,	45 ,,	28,5 ,,	5,7 ,,	in 3^h auf 2 M.M. in 24^h 3 ,,
desgleichen, 76 ,, ,,	31,5 ,,	29 ,,	6 ,,	in 15^h 1 ,, in 24^h 2 ,, in 48^h 3 ,,
desgleichen, 79 ,, ,,	21 ,,	15 ,, *)	3,7 ,,	in 1^h 15′ 2 M.M. in 2^h 2,7 ,,
Lepidum sativum, Pfahlwurzel einer Keimpflanze von 37 M. M. Länge	8,5 ,,	5 ,, *)	2,3 ,,	in 3^h 0,8 ,,
Adventivwurzel von Cordyline vivipara 1,7 M. M. im Durchmesser	43 ,,	34 ,,	7,5 ,,	in 24^h 1,6 ,,
desgleichen, 1,6 M. M. im Durchmesser	44 ,,	40,2 ,,	8 ,,	in 5^h 0 ,, in 18^h 5 ,, in 22^h 6 ,, in 24^h 7 ,,
Allium Cepa, Adventivwurzel	21 ,,	10 ,, **)	3 ,,	in 24^h 1,5 ,,

Es ist eine sehr in die Augen fallende Thatsache, dass auch der Strunk der Hutpilze das Streben zur Aufwärtskrümmung

*) Die Beugung wurde 10mal hinter einander wiederholt.
**) Die Beugung 15mal rasch hinter einander wiederholt.

Digitized by Google

besitzt: der Hut wird durch Krümmung des Strunks horizontal gestellt, die Neigung der Unterlage des Pilzes sei, welche sie wolle (während das Hymenium in ähnlicher Weise der Wirkung der Schwere folgt, wie die Wurzelspitzen: die langen Papillen des Hymenium von Hydnum imbricatum und repandum, die Röhren desjenigen von Boletus, und auch die Lamellen der Agarici krümmen sich binnen etwa 12 Stunden nach abwärts, wenn der Hut vertical aufgestellt wird. Sachs mündlich). Die peripherischen Hyphen des Strunkes der Hutpilze sind durch das Ausdehnungsstreben der inneren passiv gedehnt, aber nur in geringem Grade. Die nach aussen concave Krümmung eines vom beugungsfähigen Strunke abgelösten Streifens des oberflächlichen Gewebes ist nur mässig. Gleichwohl ist die Fähigkeit zur schroffen Krümmung bei Hutschwämmen grösser, als irgendwo. Wird Amanita muscaria oder phalloïdea in dem, der letzten Streckung des Strunkes unmittelbar vorausgehenden Zustande mit der Spitze schräg nach unten gerichtet aufgestellt, so ist die Dehnung des axilen Theiles des Strunkes so gewaltig, dass sie oft die Hyphen der convex gewordenen Kante der Aussenfläche zerreisst. — Zerlegt man ein Exemplar der Amanita muscaria desselben Entwickelungszustandes durch der Achse parallele Schnitte in mehrere Längsscheiben, und bringt diese Schnitte im feuchten dunklen Raum in horizontale Lage, so krümmt sich jeder der Längsschnitte des Strunkes aufwärts, gleichgültig ob die Flächen oder Kanten des Schnittes nach unten und oben gekehrt sind. Theilte man den Schwamm in nur zwei Längshälften, und legt sie beide horizontal, die eine mit der planen Schnittfläche, die andere mit der Aussenfläche nach unten, so krümmen die Strunke beider Hälften sich aufwärts, indem bei der ersteren jene, bei der zweiten diese Fläche convex wird. Hieraus muss geschlossen werden, dass jede der zahlreichen, den Strunk zusammensetzenden Hyphen individuell die Fähigkeit zur Aufwärtskrümmung besitzt.

Kraft und Selbstständigkeit der Aufwärtskrümmung; Unselbstständigkeit der Abwärtskrümmung.

Die gegen den Zenith concave Krümmung von Pflanzenorganen, welche auf Einwirkung der Schwerkraft eintritt, vermag bedeutende Hindernisse zu überwinden, eine nicht unbeträchtliche Last zu heben. Das Gewicht an der Krümmung nicht

Digitized by Google

sich betheiligender, mit Blättern und Blüthen dicht besetzter Enden von Sprossen, die trotz solcher Belastung sich aufwärts krümmen, betrug bei Oenothera biennis bis zu 6 Gr.; anderwärts mag es noch viel höher steigen. Die Krümmung findet auch dann statt, wenn unübersteiglicher Hindernisse wegen das obere Ende des Organs nicht gehoben werden kann. Befestigt man das eine oder beide Enden eines der Aufwärtskrümmung fähigen, geraden Organs (z. B. den Stängel einer Keimpflanze von Zea Mays, Pisum sativum, Vicia sativa, einen Blüthenschaft von Taraxacum officinale, einen Blattstiel von Tropaeolum majus) der Art unter einer horizontalen, undurchdringlichen Platte (aus Glas oder Holz), dass das Organ in seiner ganzen Länge und auf allen Punkten der Platte dicht anliegt, so krümmt sich binnen 10—24 Stunden auch in völliger Dunkelheit (in wohlverschlossenen Blechkästen mit dunstgesättigtem Raume) das Organ in einem nach unten convexen Bogen, dessen Krümmung bei Zea bis auf 110°, bei Vicia bis auf 180° steigt. (Vergleiche auch die Angaben S. 184.) Die Aufwärtskrümmung ist also eine active.

Entgegengesetzt verhält es sich mit der geocentrischen Krümmung fortwachsender Wurzelenden; und in diesem Gegensatze liegt der fundamentale Unterschied zwischen den beiden Arten von Krümmungen. Wird ein keimender Saame, oder eine im Austreiben begriffene Zwiebel oder Knolle auf horizontaler, undurchdringlicher Unterlage in der Art angebracht, dass eine hervorsprossende Wurzel sofort die Unterlage trifft, so entwickelt sich diese Wurzel der Unterlage dicht angeschmiegt, ohne je von ihr dadurch sich zu erheben, dass die ausgebildeten Theile der Wurzel eine nach unten concave Krümmung annehmen. So bei Wurzeln von Cerealien, Leguminosen und Cruciferen, bei Zwiebeln von Oxalis tetraphylla und Allium Cepa, die auf feucht gehaltenen Platten von Porzellan oder Glas lose aufgelegt im Dunklen sich entwickelten; ferner bei Saamen derselben Arten, welche ich zur Keimung brachte, nachdem ich sie mittelst durchgebohrter Nadeln auf horizontalen Bretchen, oder mittelst Kitt auf wagrechten Glastafeln befestigt hatte.

Der Hergang wird etwas modifizirt, wenn man, statt die Saamen auf der Unterlage die Keimung von Anfang an durchmachen zu lassen, die zu einiger Länge vertical abwärts entwickelten Wurzeln von Keimpflanzen einer horizontalen, glatten Platte dicht auflegt, und das Pflänzchen an der Platte unverrück-

Digitized by Google

bar befestigt. Es tritt dann zunächst die schon oben (S.187) erwähnte Hebung des älteren Theiles der Wurzel ein, innerhalb dessen Differenzen der Spannung der Gewebe stattfinden. Ist durch diese Beugung das Ende der Wurzel eine Strecke weit über die Platte gehoben worden, so wendet sich, bei von da ab eintretender Verlängerung der Wurzel, deren neu entstehender Theil abwärts, bis sein Ende — in der Regel unter noch ziemlich spitzem Winkel — auf die Platte trifft. In ihrem ferneren Längenwachsthum ist die Wurzel der Platte dann dicht angeschmiegt; eben so dicht legen sich die, während des Versuches aus der Hauptwurzel hervorsprossenden Wurzeln zweiter Ordnung der Unterlage an. Der Bogen, welchen der gehobene und der abwärts gewachsene Theil der Wurzel über der Unterlage bilden, bleibt während der ferneren Entwickelung der Wurzel unverändert.

Die mikroskopische Untersuchung sowohl, als die an im Wachsthum begriffenen Wurzeln ausgeführten Messungen, deren erste wir Ohlert verdanken,*) haben seit lange schon uns gelehrt, dass die Verlängerung der Wurzeln nur innerhalb einer beschränkten, nahe über der Wurzelspitze gelegenen Zone erfolgt, und dass diese Verlängerung darauf beruht, dass im Vegetationspunkte der Wurzel, unmittelbar über dem Scheitelpunkte der Innenwölbung der Wurzelhaube, fortgesetzte Zellentheilungen (vorwiegend durch auf der Längsachse der Wurzel senkrechte Wände) stattfinden,**) welchen Theilungen eine Längsstreckung der neugebildeten Zellen höheren Grades rasch folgt. Es ist leicht, den Nachweis zu führen, dass die geocentrischen Beugungen von Wurzeln nur innerhalb der in Verlängerung begriffenen Region der Wurzeln erfolgen, und dass Wurzeln nur insofern der Krümmung abwärts fähig sind, als sie noch in die Länge wachsen.

Ich schloss dünne gerade Endstücken von Luftwurzeln tropischer Orchideen, 10—15 C.M. lang, in cylindrische Gläser der Art ein, dass die Wurzel, der Seitenwand des Glases mit etwas Wachs angeheftet, dieser Wand vollkommen parallel und mit

*) Linnaea, XI (1837) 615.

**) Ohlert, Linnaea XI (1837) 61; Nägeli, Zeitschr. wiss. Bot. III u. IV (1846), 186. Die Einzelnheiten des Vorganges in einigen speciellen Fällen (der Wurzel von Farrnkräutern) habe ich im Bd. V der Abh. der K. sächs. G. d. W. S. 611, 628, 648 dargestellt.

Digitized by Google

der Spitze senkrecht nach oben gerichtet war. Auf den Boden der Gläser wurde etwas Wasser gebracht, die Mündungen wurden verstöpselt; die Gläser aufrecht aufgestellt. Unter solchen Verhältnissen wachsen derartige Luftwurzeln noch etwas in die Länge. Die der Aeropsia Loddigesii eignen sich zu dem Versuche besonders gut. An diesen Luftwurzeln ist die Stelle, wo nach oben hin Vermehrung und Streckung der Zellen der im Längenwachsthum begriffenen Region aufhören, durch Eintritt der weisslichen Färbung der lufthaltigen Wurzelrinde gekennzeichnet. Das in der aufrechten Glasröhre noch wachsende Stück der Wurzel ist die untere Hälfte des frisch grünen Endtheils. Es wendet sich bei Eintritt seiner Verlängerung sofort nach abwärts, und hängt am oberen Ende des aufrecht befestigten Wurzelstückes gleich einer gefrorenen Thräne.

In diesen Wurzeln findet eine geringere Streckung der neu gebildeten Rindenzellen der Wurzelspitze statt, als anderwärts. Ihr Längenwachsthum beruht zum grösseren Theile auf Zellenvermehrung, als dasjenige der gewöhnlichen Wurzeln. Aber auch bei diesen kann man sich von dem Zusammenfallen der beugungsfähigen mit dem unteren Ende der in die Länge wachsenden Region durch Anwendung der Ohlert'schen Untersuchungsmethode unschwer überzeugen, und die Richtigkeit der Angaben Ohlert's constatiren. — Ich bezeichnete gerade abwärts gewachsene Wurzeln von Keimpflanzen von Pisum sativum, Vicia sativa, Zea Mays mit in bestimmten Entfernungen aufgetragenen farbigen Punkten, und befestigte diese Wurzeln in einem völlig geschlossenen Blechkasten mit dunstgesättigtem Raume in der Art, dass sie horizontal in die feuchte Luft frei hineinragten. Die Abwärtsbeugung trat nur innerhalb der unteren Hälfte der sich verlängernden Strecken der Wurzeln ein; diese Krümmung abwärts war um so beträchtlicher, je bedeutender die Verlängerung war.

1) An einer geraden, 10,5 M.M. langen Wurzel eines keimenden Saamens von Vicia sativa maassen die bezeichneten Strecken, von der Spitze rückwärts gezählt

	1,5 M. M.	1 M. M.	2 M. M.
nach 24 Stunden	2 ,,	6 ,,	5,7 ,,

Die Wurzel war in einem Bogen von 90° abwärts gekrümmt, dessen Anfangspunkt 11 M. M. von der Spitze entfernt war

nach 48 St.	4,5 M. M.	7 M. M.	5,7 M. M.

Digitized by Google

2) Aehnliche Wurzel gerade gewachsen, 12 M. M. lang; bei horizontaler Aufstellung:

	2 M.M.	2 M.M.	1,5 M.M.	1,5 M.M.
nach 24 Stunden	1 ,,	12 ,,	2 ,,	1,5 ,,

Die Wurzel war in einem Winkel von 72° abwärts gekrümmt, dessen Anfangspunkt 12 M.M. von der Wurzelspitze entfernt war.

3) Aehnliche Wurzel, 12 M.M. lang; bei horizontaler Aufstellung

lung	2 M. M.	2 M. M.	3 M. M.	3 M. M.
nach 24 Stunden	2 ,,	7 ,,	3 ,,	3 ,,

6,5 M. M. von der Spitze im Winkel von 45° abwärts gebogen.

4) Gerade, 27 M. M. lange Wurzel von Pisum sativum; bei horizontaler Aufstellung:

	1,5 M.M.	1 M.M.	1,5 M.M.	1,5 M.M.	1,5 M.M.
nach 5 Stunden	1,5 ,,	1,5 ,,	3 ,,	3 ,,	2 ,,

Das 8 M. M. lange Endstück der Wurzel war in einem Bogen von 30° abwärts gekrümmt.

5) Dieselbe Wurzel wurde umgekehrt, mit der Concavität der Krümmung nach oben gewendet, aufgestellt. Nach 8 Stunden war die Krümmung beinahe vollständig ausgeglichen; nach 12 Stunden das 5 M.M. lange Endstück in einem Bogen von 10° abwärts gebeugt. Distanzen:

1,5 M.M. 2 M.M. 4 M.M. 3,5 M.M. 2,5 M.M.

6) Ebensolche Wurzel. Distanzen bei der horizontalen Aufstellung

stellung	2 M.M.	3 M. M.	4 M. M.	4 M. M.
nach 5 Stunden	2 ,,	3,5 ,,	4,5 ,,	4 ,,
,, 8 ,,	3 ,,	4,7 ,,	4,6 ,,	4 ,,

Nach 5 Stunden war das Ende der Wurzel, 10 M.M. lang, im Winkel von 20° aufwärts gerichtet; nach 8 Stunden das 6 M.M. lange Endstück in einem Bogen von ca. 15° abwärts gebeugt.

7) Ebensolche Wurzel:	3 M. M.	3 M. M.	3 M. M.	4 M. M.
nach 16 Stunden:	3 ,,	4 ,,	4 ,,	4 ,,

Das 5 M. M. lange Endstück ist im Winkel von ca. 45° abwärts gebeugt.

8) Eine keimende Erbse mit 12 M.M. langer, in einem Bogen von 40° gekrümmter Wurzel wird so aufgestellt, dass die Sehne jenes Bogens vertical ist.

Distanzen der Marken:	3 M. M.	2,5 M. M.	3,2 M. M.
nach 16 Stunden	3 ,,	4,5 ,,	5 ,,

Die Wurzel ist S-förmig; ihr 4,5 M. M. langes Endstück ist in

Digitized by Google

einem Bogen von ca. 45° abwärts gerichtet. — Die Sehne dieser letzten Krümmung der Wurzel ist horizontal; ein Beweis, dass der Senkung des Endstückes eine Hebung des rückwärts gelegenen Stücks voraus ging.

9) Schwächer gekrümmte, 14 M. M. lange Wurzel einer keimenden Erbse mit der Concavität nach oben so aufgestellt, dass die Sehne der Krümmung mit dem Horizonte einen Winkel von 45° bildete. Distanzen der Marken

	2,1 M. M.	3 M. M.	1,8 M. M.	1,8 M. M.
nach 16 Stunden	2,8 ,,	7 ,,	2,5 ,,	1,8 ,,

Die Wurzel ist S-förmig; der Scheitelpunkt der letzten Krümmung 6,5 M. M. von der Spitze; die Hebung 1 M. M. Die Abwärtskrümmung tritt aber nicht gleichzeitig mit dem Beginn der Verlängerung ein. Während der Hebung der Wurzelspitze, welche durch die Aufwärtskrümmung der älteren, rückwärts gelegenen Theile der Wurzel bewirkt wird (S. 186), erfolgt eine oft ziemlich beträchtliche Verlängerung des Wurzelendes, aber in geradliniger Richtung. Beispiele hierfür sind unter den vorstehenden die sämmtlichen, mehr oder weniger. Hier einige noch auffallendere, darum anschaulicher, weil der Versuch vor Beginn der Abwärtskrümmung beendigt wurde. Es maassen an vertical gerade gewachsenen, im dunklen feuchten Raume horizontal aufgestellten Wurzeln keimender Erbsen die durch Punkte bezeichneten Strecken, rückwärts von der Spitze an gezählt, bei Beginn des Versuches

	2,5 M.M.	2,5 M.M.	2,5 M.M.	2,5 M.M.	2,5 M.M.
nach 24 Stunden	2,5 ,,	6,5 ,,	6 ,,	4 ,,	2,5 ,,

dabei war das 17 M. M. lange Endstück der Wurzel in einem Winkel von 18° aufwärts gerichtet, und gerade; die Spitze nicht abwärts gebogen.

In einem zweiten derartigen Falle betrugen die bezeichneten Strecken

	3 M. M.	3 M. M.	3 M. M.	3 M. M.
nach 5 Stunden	3 ,,	4 ,,	4 ,,	3 ,,

Das 11 M. M. lange Endstück der Wurzel war im Winkel von 40° aufwärts gerichtet.

Es ergiebt sich aus den Zahlenangaben dieser und der vorigen Seite sofort aufs Neue, dass (wie Ohlert bereits zeigte) die Krümmungsfähigkeit des Wurzelendes zwar nicht auf die Zone von höchstens 0,05 M. M. Breite sich beschränkt, innerhalb deren in der wachsenden Wurzel Zellvermehrung stattfindet,

Digitized by Google

dass aber ebensowenig die Fähigkeit zur geocentrischen Krümmung auf die ganze in Längsdehnung begriffene Strecke der Wurzel sich erstreckt. An den Stellen der letzten und bedeutendsten Streckung der Zellhäute der jungen Wurzel ist diese der geocentrischen Krümmung nicht mehr fähig; — diese Streckung erfolgt geradlinig in der Richtung, welche bei der Entstehung der Zellen eingehalten wurde, aus denen der sich streckende Theil besteht. Aus diesem Verhältniss erklären sich alle diejenigen Krümmungen, welche Wurzeln dann annehmen, wenn sie in ihrem Wachsthum auf ein Hinderniss treffen, an dessen Aussenfläche die Wurzelspitze nicht hinzugleiten vermag. Entwickelt sich z. B. eine Wurzel in Wasser oder in feuchter Luft, und stösst sie auf einen Körper mit planer oder concaver oberer Fläche, so krümmt sie sich, indem ihre Spitze bei weiterem Wachsthume dem Hindernisse sich aufstemmt, zunächst in einem seitwärts geöffneten Bogen. Je höher diese Krümmung steigt, eine um so stärker gegen die Ebene des Horizonts und gegen die Oberfläche des Hindernisses geneigte Lage nimmt das Endstück der Wurzel an. In dieser geneigten Richtung findet die Vermehrung der Zellen innerhalb des Vegetationspunktes der Wurzel statt. Die Dehnung der dort gebildeten Zellen erfolgt in der nämlichen Richtung. Der Verlängerung in dieser Richtung setzt aber die Starrheit des älteren Theiles der Wurzel bald eine Gränze. Wenn durch das Längenwachsthum der Wurzel die Neigung des Endstücks soweit gesteigert wird, dass endlich nicht mehr der Scheitelpunkt, sondern ein Punkt einer der Seitenkanten der Wurzelspitze zur Berührungsstelle dieser mit dem Hindernisse wird, so ist die Möglichkeit des Hingleitens der Wurzelspitze durch ihr eigenes Wachsthum auf dem Hindernisse, des Hinkriechens der fortwachsenden Wurzel auf dem ihr in den Weg gekommenen Körper gegeben. Das Verhältniss wird ein anderes, wenn das der Wurzel entgegengestellte Hinderniss die Möglichkeit einer Verschiebung ihrer Spitze absolut ausschliesst. Aus der Zusammenwirkung der Streckung des geneigten Wurzelendes und der Elasticität des älteren Theiles der Wurzel resultirt dann eine doppelte, schraubenlinige Krümmung der Stelle, in welcher beide Theile der Wurzel zusammentreffen. Bei weiterem Längenwachsthum der Wurzel entwickelt sich diese Schraubenlinie zu mehreren, unter Umständen oft zu vielen Windungen, deren Weite, nächst dem Grade der Starrheit der

Digitized by Google

älteren Theile der Wurzel, davon abhängt, wieviel Spielraum seitwärts der Wurzel gegeben ist. Man kann solcher dicht an einander gedrängter Windungen oft bis zu achten an der Hauptwurzel von Zea Mays beobachten, wenn diese Pflanze in Wasser und in Probirgläsern von etwa 2 C. M. Dmss. und 25 C. M. Höhe gezogen wird. Sind die Gefässe überreichlich weit, so steigt der Krümmungshalbmesser der Windungen auf 60 M. M., nicht höher: er ist etwa gleich der Sehne des Bogens, bis zu welchem die einfache Krümmung der sich aufstemmenden Wurzel zu steigen vermag.

Abwesenheit von Spannungsdifferenzen der Gewebe in dem der Abwärtskrümmung fähigen Theile der Wurzel.

Mit anderen, jugendlichsten Pflanzentheilen hat die Strecke der Wurzel, welche der Abwärtsbeugung fähig ist, die weiche, breiartige Beschaffenheit ihrer Substanz gemein. Es walten innerhalb dieser Strecke keinerlei Unterschiede der Spannung der Gewebe ob. Ein abgelöster Epidermisstreif hängt schlaff herab (besonders leicht zu constatiren an dicken Adventiv-Luftwurzeln der Cordyline vivipara, bei denen die Länge dieser beugungsfähigen Stelle bis zu 4 M. M. beträgt). Eine durch zwei der Längsachse der Wurzel parallele Schnitte hergestellte Platte des beugungsfähigen Stückes wölbt ihre von der Epidermis bekleideten Seiten weder convex noch concav, wenn sie durch einen Schnitt senkrecht auf ihre Fläche in zwei Längshälften getheilt wird. Zerlegt man die Platte in mehrere parallele Längsstreifen, so verändern auch diese ihre Form nicht, auch dann nicht, wenn sie in Wasser liegen. Die jüngste frei liegende, nicht von der Wurzelmütze bedeckte Zone dieses weichen Gewebes wird in ihrer ganzen Masse von der Schwerkraft gleichmässig affizirt. Keime ihrer Längshälften oder Kanten ist bei der geocentrischen Krümmung activ. Die Membranen aller Zellen unterliegen in gleicher Passivität der Wirkung der Gravitation. Durch einige leicht anzustellende Versuche lässt sich dies in überzeugender Weise veranschaulichen. Ich entfernte an 20 bis 25 M. M. langen Wurzeln keimender Erbsen durch einen Secantenschnitt nahezu die Längshälfte des Gewebes des äussersten, des Fortwachsens fähigen Wurzelendes, und stellte die Keimpflanze im dunklen Raume so auf, dass die Wurzeln waagrecht frei in die

Digitized by Google

dunstgesättigte Luft ragten. Viele der Versuchspflanzen gingen bei dieser Behandlung sofort zu Grunde; eine nicht geringe Zahl aber zeigte ein weiteres Wachsthum der Wurzelspitzen, obwohl fast die Hälfte des Gewebes derselben abgetragen worden war. Die Verlängerungen betrugen bis zu 2,5 M. M. Diese Wurzelenden krümmten sich zunächst stets nach unten, gleichgültig ob die verwundete Seite desselben nach oben, seitwärts oder nach unten gerichtet worden war. — Ein Convexwerden der entrindeten Seiten trat erst später, mit der Erhärtung der Oberhaut der entgegengesetzten Seite ein. — Noch leichter ist die Ausführung folgenden Versuches. Ich befestigte mittelst durch die Kotyledonen gesteckter Nadeln keimende Erbsen und Linsen an Bretchen, und fixirte deren Wurzeln am Holze in der Art, dass ich einen Tropfen geschmolzenen, leichtflüssigen gelben Wachses um und auf das äusserste Ende der Wurzelspitze fliessen liess, und 2,5 bis 4 M. M. rückwärts von der Spitze die Wurzel mit einem andern Wachstropfen ans Bret anklebte. Die Breter wurden im dunklen, feuchten Raume lothrecht so aufgestellt, dass die Wurzeln in horizontaler Richtung sich befanden. Die Wurzelenden wuchsen in der Mehrzahl der Fälle kräftig weiter. Dafern sie nicht ihr festgeklebtes Ende bei eintretender Verlängerung durch Absprengen des Wachses befreiten, machte das Endstück zwischen beiden Befestigungsstellen einen sanften, beständig nach o b e n geöffneten Bogen. Drehte ich nun die Breter um, so dass die Oeffnung des Bogens nach unten gerichtet ward, so erfolgte eine S-förmige Biegung des fixirten Wurzelendes, indem das der Wurzelspitze nächste Stück desselben sich nach unten convex krümmte, während der erst gebildete Bogen um Vieles niedriger ward. Fand die Umkehrung des Brets sehr bald nach der ersten Krümmung des fixirten Endstückes statt, so wurde diese Krümmung bisweilen in die entgegengesetzte übergeführt. — Soll der Versuch gelingen, so ist es unerlässlich, das zum Fixiren des Wurzelendes dienende geschmolzene Wachs bis nahe an den Erstarrungspunkt abkühlen zu lassen, da es — wenn heisser — leicht das Wurzelende tödtet; — ferner Keimpflanzen mit v ö l l i g geraden Wurzelenden auszuwählen, denn wenn eine auch nur geringe Krümmung des beugungsfähigen Stückes schon bei Beginn des Versuches vorhanden ist, so wird sie während der Dauer desselben gesteigert, gleichviel welches ihre Richtung sei, — endlich ein nicht zu

Digitized by Google

langes Stück der Wurzel zwischen die beiden Wachstropfen einzuschliessen, denn wenn der hinterste Theil des fixirten Stückes bereits der (S. 187 erwähnten) Hebung fähig ist, so wird damit eine nach unten concave Krümmung eingeleitet, welche die normale, mit der Concavität nach oben gewendete völlig verdecken kann.

Mechanik der geocentrischen Wurzelkrümmung.

Aus den im Vorstehenden mitgetheilten Thatsachen ergiebt sich mit Nothwendigkeit der Schluss, dass der krümmungsfähige Theil des Wurzelendes in der nämlichen Weise der Einwirkung der Schwerkraft folgt, wie ein Tropfen einer zähen Flüssigkeit. Die plastische, der unmittelbaren Formveränderung durch die Gravitation fähige Beschaffenheit des Gewebes kommt allerwärts nur einem kurzen Querabschnitt des Wurzelendes zu. Dieser Querabschnitt ist, in Folge der Erhärtung der älteren Gewebe der Wurzel und der Zellvermehrung in dem von der Wurzelmütze bedeckten Vegetationspunkte der Wurzel, in stetigem Vorrücken nach der Spitze derselben hin begriffen. Aus der verschiedenen Intensität dieser Zellvermehrung erklären sich zum Theil die individuellen Unterschiede zwischen verschiedenen Wurzeln in Bezug auf die Plötzlichkeit der Ablenkung von einer anderen, als der verticalen Richtung. Den entscheidendsten Antheil an dem Hervortreten dieser Verschiedenheiten aber hat das Verhältniss des Maasses und der Eintrittszeit der nachträglichen Streckung der erhärteten, nicht mehr der geocentrischen Beugung fähigen Theile der Wurzel zu der Länge des Querabschnitts von plastischer Beschaffenheit, und zur Dauer des Beharrens desselben im plastischen Zustande. Jene nachträgliche Streckung erfolgt, wie weiter oben erörtert (S. 196), in der Richtung, welche durch die bis dahin durchlaufene Entwickelung der einzelnen Gewebtheile gegeben ist. War diese eine krummlinige, so wird der Bogen ein längerer werden. Eine Beugung, welche ohne jene Dehnung scharf knieförmig erscheinen würde, wird so in eine sanfte, gerundete verwandelt. Beispiele für diesen Fall geben die meisten in lebhaftem Längswachsthum begriffenen Wurzeln. Bei diesen, z. B. den Hauptwurzeln der Leguminosen, Cruciferen ist die beugungsfähige Strecke der Wurzel sehr kurz. Es tritt eine starke Längsdeh-

Digitized by Google

nung sofort an der Stelle der Wurzel ein, wo die Zellwände die weiche, biegsame Beschaffenheit verlieren. Bei den Luftwurzeln von Orchideen ist diese Längsdehnung gering, der Querabschnitt der Wurzel, dessen Gewebe plastisch ist, von 0,5 bis 1 M. M. Länge; damit übereinstimmend ist die Beugung der fortwachsenden Spitze einer künstlich in horizontale Lage gebrachten Wurzel eine plötzliche und scharfe. Aehnlich verhalten sich die ersten Adventivwurzeln der Keimpflanzen von Gräsern (Secale, Zea), ungeachtet der bedeutenden nachträglichen Längsdehnung ihrer Zellen. Die der Abwärtsbeugung fähige Stelle erreicht hier eine Länge von 0,5 bis 0,8 M. M.

Die Streckung in Richtung der Entwickelung ist es auch, auf welcher die von der Richtung der Hauptwurzel abweichende von Wurzeln zweiter und höherer Ordnung hauptsächlich beruht. Ich zähle an Wurzeln zweiter Ordnung keimender Erbsen in Richtung der Länge 33—59, bei der Linse 24—33 Zellen der Rinde, unmittelbar bevor die junge Wurzel aus der Oberfläche der Hauptwurzel hervorbricht. Eine sehr wenig höhere Zellenzahl (46—61 bei der Erbse, 27—38 bei der Linse) hat das Stück der Wurzel zweiter Ordnung, welches sich nach dem Auswachsen derselben senkrecht zur Längsachse der Hauptwurzel stellt. Mit der 47—62sten, beziehendlich der 28—39sten Zelle beginnt die Beugung abwärts. Aber noch ein zweiter Umstand kann der Abwärtsrichtung von Wurzeln zweiter und höherer Ordnung, sowie von Adventivwurzeln entgegenwirken: die Hebung, welche in von der Verticalen abgelenkten Pflanzentheilen nach Eintritt hoher Spannungsdifferenzen der Gewebe durch Vermehrung der Dehnbarkeit elastischer Gewebe der unteren Längshälfte vor sich geht (S. 186). Die schräg aufwärts wachsenden Wurzeln von Pothos longifolia und Lantania borbonica machen einen abgeschälten Rindenstreif stark nach aussen concav; eine g e s c h ä l t e Wurzel, längsgespalten, wird an den dem Längsschnitt zugewendeten Flächen beträchtlich concav. Aehnlich bisweilen die Wurzeln von Zea Mays, von denen die zweiter und dritter Ordnung häufig aus dem Boden hervorkommen. Auch die Wurzel erster Ordnung, in feuchter Luft und im Dunklen sich entwickelnd, krümmt sich bisweilen, ohne alle merkliche äussere Ursache, plötzlich aufwärts, so dass eine völlige Schleife gebildet wird, wenn weiterhin die Wurzelspitze wieder abwärts wächst. Bei schmächtigen Wurzeln höherer Ordnung kommt

Digitized by Google

endlich noch ein dritter Umstand ins Spiel, welcher sie hindert, der Neigung der Spitze zum Abwärtswachsen frei zu folgen: die geringe Intensität der Zellenvermehrung in dem von der Wurzelhaube bedeckten Vegetationspunkte. Es liegt auf der Hand, dass es eines gewissen Grades der Lebhaftigkeit dieser Zellvermehrung bedarf, um einen Querabschnitt der Wurzelspitze von plastischer Beschaffenheit herzustellen, von hinlänglicher Breite, um aus dem hinteren Rande der Wurzelhaube hervorrückend einen Theil der freien Aussenfläche des bleibenden Theiles der Wurzel darzustellen, so dass er von der Schwerkraft beeinflusst werden kann. Wenn jene Zellvermehrung eine nur langsame, wenn dieser Querabschnitt ein so kurzer ist, dass er noch innerhalb des von der Wurzelmütze bedeckten Theiles der Wurzel fällt, dann wird der Zug der Schwere auf die in eine starre Hülle eingeschlossene biegsame Stelle wirkungslos bleiben, oder doch von verschwindend geringer Wirkung sein. Nun unterscheiden sich die Wurzeln höherer Ordnung von Dikotyledonen sichtlich dadurch von denen niederer Ordnung, dass dort die Streckung der neugebildeten Zellen des bleibenden Theiles der Wurzel relativ näher an dem Vegetationspunkte beginnt. Die Wurzelmütze, welche bei Dikotyledonen überhaupt höher herauf an der Wurzel reicht, als bei Monokotyledonen und Gefässkryptogamen, erstreckt sich bei Wurzeln dritter Ordnung von Pisum sativum und von Phaseolus vulgaris bis zu einer Stelle der Wurzel, deren Rindenzellen nahezu ihre volle Länge erreicht haben. Ebenso bei aus der Erde genommenen Wurzeln höherer (dem Grade nach nicht bestimmter) Ordnung von Helianthus annuus, Tropaeolum majus, Pinus silvestris. An der Hauptwurzel der Keimpflanzen derselben Arten ist das Verhältniss ein anderes. Die Zellen der Wurzelrinde haben am oberen Ende der Wurzelmütze kaum ein Achtel ihrer Länge. Die Annahme erscheint gerechtfertigt, dass in jenem Umstande der horizontale Verlauf der sogenannten Thauwurzeln im Boden begründet ist. *)

---

*) Einer der anscheinend sonderbarsten Fälle des Aufwärtswachsens einer vermeintlichen Wurzel gehört gar nicht hieher: ich meine das Verhalten der Keimwurzel von Trapa. Das Radicularende des Embryo dieser Pflanze, welches beim Keimen auf mehrere Zolle Länge aus dem Saamen hervortritt, verlängert sich nur durch vom Kotyledon nach der Extremität hin

Die im Vorausgeschickten gegebene Darstellung der Mechanik der Aufwärtskrümmung der Wurzeln würde unhaltbar sein, wenn die von einem deutschen Forscher neuerdings noch scharf betonten*) Angaben Pinot's**) und Payer's***) über das tiefe Eindringen der Wurzeln auf Quecksilber in einer dünnen Wasserschicht freiliegend keimender Saamen richtig wären. Pinot und Payer sind bereits 1845 durch Durand und Dutrochet†) so gründlich widerlegt, die Ursachen der Täuschungen jener sind so vollständig aufgedeckt worden, dass die ausführliche Mittheilung von mir selbst über diesen Gegenstand angestellter Beobachtungen kaum noch nöthig ist. Es sei nur kurz erwähnt, dass die Ergebnisse, welche ich erhielt, mit denen von Durand und Dutrochet völlig übereinstimmen: ich sah nur dann die Wurzeln von Keimpflanzen tiefer in Quecksilber eindringen, als die Last des aus der Flüssigkeit hervorragenden Theiles des Saamens oder der Keimpflanze es bedingt, wenn die Pflanze, durch Eintrocknen in der das Quecksilber bedeckenden Wasserschicht gelöst gewesener Stoffe, der Oberfläche des Quecksilbers oder der Seitenwand des Gefässes adhärirten, und so oberhalb des Quecksilbers fixirt waren. — Eine Frage indess verdient noch eine Erörterung: kann die Wurzelspitze innerhalb einer Flüssigkeit von grösserem specifischen Gewichte, als ihr eigenes es ist, eine Krümmung abwärts ausführen?††) Durand's und Dutrochet's Versuche geben hierauf keine Antwort. Die Möglichkeit jenes Vorganges ist an sich nicht undenk-

---

fortschreitende Dehnung seiner, im reifen Saamen schon vorhanden gewesenen Zellen. Eine Hauptwurzel ist bei Trapa gar nicht vorhanden; die Wurzelmütze und ein von ihr bedecktes Punctum vegetationis fehlen dem Radicularende ganz und gar (Sachs, brieflich). Wir haben es also hier nur mit der Streckung eines hypokotyledonaren Stängelglieds zu thun; dass dieses aufwärts strebt, ist selbstverständlich. Aehnlich mag es sich mit der »Wurzel« der Keimpflanze von Cynomorium verhalten, deren Aufwärtswachsen Weddell beschreibt (Comptes rendus L (1860) 103).

*) Wigand, Botan. Unters. Braunschweig 1854, 137, 152.

**) Ann. sc. nat. XVII (1829) 94.

***) Comptes rendus XVIII (1844) 933.

†) Comptes rendus XX (1845) 1257.

††) Auf diesen Punkt mag sich die Aeusserung Mohl's (Wagners Handwörterbuch d. Physiol. IV, 296) beziehen, denn das Eindringen der wachsenden Wurzel einer fixirten Pflanze in Quecksilber hat offenbar nichts Befremdliches.

Digitized by Google

bar. Es könnte sein, dass innerhalb des Luft- oder Wasser-erfüllten Raumes, welcher rings um eine gewaltsam in Quecksilber getauchte Wurzel in Folge der capillaren Depression des flüssigen Metalls vorhanden ist, die Wurzelspitze in derselben Weise durch die Schwerkraft beeinflusst würde, wie in feuchter Luft. Eine Reihe von mir angestellter Experimente gab aber nur negative Resultate — ein Erfolg, der nach dem oben mitgetheilten (S. 188) Verhalten der Wurzeln horizontal in Wasser schwimmender Keimpflanzen von Erbsen mich nicht überraschte. Ich befestigte Keimpflanzen von Erbsen mit Wurzeln von 3 bis 5 C. M. Länge und von Wicken (Vicia sativa), deren Wurzeln eine Länge von 1—2 C. M. erreicht hatten, jede mittelst zweier durch die Kotyledonen gebohrter feiner Nadeln an Korkpfropfen, so dass die Wurzeln in Winkeln von etwa 45^0 schräg nach unten gerichtet waren. Diese Pfropfen wurden der Innenwölbung von Glasglocken angekittet, und unter ihnen mit Quecksilber (auf welchem eine Wasserschicht) gefüllte Gefässe so aufgestellt, dass die Wurzeln 1—5 M. M. tief in das Quecksilber tauchten. Alle die Wurzeln, welche im Quecksilber nicht abstarben (über ein Dritttheil ging zu Grunde) beugten im Quecksilber sich aufwärts, und wuchsen zum Theil endlich aus dessen Oberfläche wieder hervor.

In der Plasticität des Gewebes des Vegetationspunktes der Wurzel und in der mit der letzten, bedeutenden Streckung eintretenden Straffheit und Festigkeit der Zellen dieses Gewebes ist der Wurzel das Mittel gegeben, in poröse Substanzen auch dann tief einzudringen, wenn die Verschiebbarkeit der Theilchen derselben nur gering ist. Vermöge der Einwirkung, welche die Schwerkraft auf die Wurzelspitze übt, muss diese nothwendig in selbst sehr kleine Zwischenräume der sie umgebenden Substanz sich einsenken. Die Zunahme der Dicke der Wurzel drängt die sie umschliessenden Theilchen auseinander; die Streckung ihres Gewebes bohrt die Spitze abwärts, da eine Hebung der ganzen Pflanze bei der Reibung der höher gelegenen älteren Theile der Wurzel an dem umgebenden Medium nicht möglich ist. *)

---

*) Ich erwähne diese selbstverständliche Beziehung der Wurzel zum Boden nur in Folge der von Wigand über diesen Punkt erhobenen Bedenken (a. a. O. 139, 140).

Abweichungen des Wachsthums von Stängeln von der Richtung aufwärts.

Die Kraft, mit welcher ein von der Verticalen abgelenkter Pflanzentheil sich aufwärts krümmt, wird abgeschwächt durch die Last des an der Beugung sich nicht betheiligenden Endtheils. Ich habe früher erwähnt, dass in vielen Fällen diese Last gehoben, dieser Widerstand überwunden wird (S. 192); aber dies geschieht nicht immer. Ein auffallendes Beispiel vom Gegentheil ist die Hängeesche. Der anatomische Bau und die Spannungsdifferenzen der einzelnen anatomischen Systeme sind in den jungen Zweigen der Spielart der Esche mit hängenden Aesten genau die nämlichen wie bei der Stammform mit aufwärts wachsenden Zweigen. *) Nur darin waltet eine Verschiedenheit ob, dass bei der Hängeesche die Stängelglieder um Vieles länger und etwas schlanker sind, als bei der gemeinen. Man überzeugt sich leicht, dass bei der Hängeesche das Gewicht des Endtheils und der an ihm stehenden Blätter des in der Entwickelung begriffenen noch jungen, krautartigen Zweiges dessen weiter rückwärts gelegenen Theil im Bogen abwärts krümmt. Biegt man einen solchen Zweig vollständig zurück, so dass die bisherige Oberseite zur Unterseite wird, oder kehrt man den abgeschiedenen Zweig um, so tritt sofort eine der früheren entgegengesetzte, im Maasse aber ihr gleiche Krümmung ein. — Schneidet man die Endblätter eines jungen Zweiges hinweg, so vermindert sich seine Abwärtskrümmung. Wird ein in Entwickelung begriffener Zweig der Hängeesche in lebendiger Verbindung mit dem Baume gewaltsam, durch Aufbinden, in aufrechte Stellung gebracht und bis Ende des Sommers in dieser Stellung erhalten, so bleibt dieses Stück fortan aufrecht; nur der nach dem Aufbinden sich entwickelnde Trieb wendet sich wieder abwärts.

Auf einem anderen Grunde beruht die waagrechte oder schräg abwärts gehende Wachsthumsrichtung gewisser Stängelgebilde, der Ausläufer von Typha, Sparganium, einzelner Sprossen von Equisetum z. B. Derartigen Sprossen ist ein frühes, unverhältnissmässiges Wachsthum in die Dicke gemeinsam. Nahe

---

*) Dutrochet behauptet, dass Längsstreifen aus dem Gewebe junger Zweige der gemeinen und der Hängeesche in entgegengesetzter Richtung sich krümmen (Mémoires II, 91). Das ist thatsächlich unrichtig.

Digitized by Google

unter dem Vegetationspunkte wird eine Anzahl dicht gedrängter Blätter angelegt, vor irgend welcher Streckung eines Stängelgliedes. Diese Streckung tritt dann, in einer bestimmten Zahl von Stängelgliedern vom Vegetationspunkte, rückwärts, in je nur einem Stängelgliede plötzlich ein, und zwar mit ungewöhnlicher Lebhaftigkeit: die Streckung der Internodien ist an den unterirdischen Sprossen stärker, als an den oberirdischen. Innerhalb des im Knospenzustande befindlichen Endtheiles des Stängels mit dichtgedrängten Blättern bestehen keine merklichen Spannungsdifferenzen zwischen den verschiedenen anatomischen Systemen.

Bei Typha latifolia stehen die blattachselständigen Knospen, welche zu Ausläufern sich entwickeln werden, bei ihrem ersten Sichtbarwerden senkrecht auf der kegelförmigen Aussenfläche des Stammes. Während des ersten, lediglich auf Zellenvermehrung des Endes beruhenden Längenwachsthums der Knospe biegt sich deren Spitze innerhalb der Achsel ihres Stützblattes abwärts. Der dazu erforderliche Spielraum ist der Knospe dadurch gegeben, dass sie in einiger Entfernung vom Stützblatt, und dieses Blatt senkrecht aufstrebend an dem kegelförmigen Stängel steht. Es spricht nichts gegen die Wahrscheinlichkeit, dass die Abwärtslenkung der Knospenspitze durch die unmittelbare Einwirkung der Schwerkraft auf das noch plastische Gewebe derselben erfolge. Während die Knospe diese Beugung vollzieht, wird sie zwischen den Basen zweier übereinander stehenden Blätter fest eingeschlossen, indem das sie tragende Stammstück (durch Streckung seiner axilen Gewebe) aus der stumpf kegelförmigen in eine nahezu cylindrische Gestalt überging. *) Jetzt erst beginnt die Streckung der älteren Internodien der Knospe des Ausläufers: nur eine geringe des ersten, dem Stamme unmittelbar ansitzenden, rechtwinklig zu dessen Fläche stehenden; eine sehr bedeutende dagegen des zweiten, in der Regel etwas nach abwärts gerichteten. In Folge dieser Streckung durchbohrt die Knospe den Grund ihres Stützblattes und der weiter nach aussen stehenden Blätter, und so dringt sie in den

*) Es ist einleuchtend, dass diese rein passive Ortsveränderung der Knospe eine beträchtliche Aenderung ihrer Richtung bedingt. Sie würde, wenn sie jede selbstständige Krümmung unterliesse, in horizontale Richtung übergeführt werden.

Digitized by Google

Boden oder ins Wasser. Während und nach der Dehnung tritt im gestreckten Internodium eine Differenz der Spannung des axilen Gewebes und der Epidermis ein: diese ist durch das Expansionsstreben jenes ausgedehnt. Wo der Ausläufer in bündigem Boden, in zähem Schlamme, unterhalb eines Geflechts von Wurzeln und dergleichen wächst, da ist das Streben der gestreckten Stängelglieder zur Aufwärtskrümmung, welches aus der an der Unterseite grösseren Dehnbarkeit der elastischen Epidermis hervorgeht, geraume Zeit lang nicht hinreichend, den Widerstand der den Ausläufer deckenden Bodenschichten zu heben. Die Spitze desselben verlängert sich so lange in der einmal eingeschlagenen oder in der aus dem Aufwärtsstreben und der diesem entgegenwirkenden Belastung resultirenden (in der grossen Mehrzahl der Fälle nahezu waagrechten) Richtung bis zum Eintritt eines günstigen Zufalls, welcher dem Ausläufer die Aufwärtskrümmung gestattet, oder bis zum Absterben des Mutterstammes und der dann (mit der Ernährung des Ausläufers durch die in dem unteren Theile jenes aufgespeicherten Nahrungsstoffe) eintretenden Kräftigung des Wachsthums und Steigerung der Kraft der Aufwärtskrümmung des Ausläufers. — Hebt man eine Pflanze von Typha mit horizontalen oder abwärts gerichteten Ausläufern aus dem Schlamme und lässt sie in reinem Wasser oder in feuchter Luft weiter vegetiren, so erfolgt unmittelbar bei der ersten ferneren Streckung eines bis dahin unentwickelten Internodiums eines Ausläufers eine plötzliche Aufwärtskrümmung desselben. Ebenso verhalten sich in feuchter Luft die im Boden waagrecht oder abwärts gewachsenen Sprossen von Equisetum arvense und palustre. Diese Sprossen der Equiseten stimmen auch in Bezug auf die Vorgänge bei ihrer ersten Anlegung darin mit denen von Typha überein, dass ein frühzeitiges beträchtliches Dickenwachsthum ihrer Knospe den Raum, innerhalb dessen sie sich entwickelt, sehr erweitert,*) so dass das weit vorgezogene Ende der Knospe dem Zuge der Schwerkraft nach unten ungehindert folgen kann. Das zeitige Dickenwachsthum, die frühe starke Entwickelung der Rindengewebe erscheint somit als Bedingung der Ablenkung des Knospenendes im jüngsten Zustande von der normalen Richtung seiner Entwickelung. Hierin mag das Zu-

*) Hofmeister vergl. Unters. Taf. XIX f. 20.

treffende der Bemerkung Dutrochet's *) begründet sein, dass bei abwärts wachsenden Stängeln die Masse der Rinde diejenige der axilen Gewebe weit überwiege.

Die Erscheinung, dass nur geringe Differenzen der Spannung der verschiedenen anatomischen Systeme in Organen obwalten, welche durch anderweite Einflüsse leicht von der durch Einwirkung der Schwerkraft ihnen aufgeprägten Normalrichtung abgelenkt werden, ist eine weit verbreitete. In Bezug auf die das intensive Licht fliehenden Stängelenden von Hedera Helix erwähnte ich ihrer bereits (S. 189). Sie findet sich wieder bei den Wurzeln der Cordyline vivipara, welche (wenn die Pflanze in Wasser gezogen wurde) in ganz anders auffallender Weise vom einfallenden Lichtstrahl hinweg sich beugen, als die von Cruciferen. Die der Beugung convex gegen den einfallenden Strahl fähige Stelle fällt hier vollständig zusammen mit der der geocentrischen Krümmung fähigen. Auch in dem zur Umschlingung anderer Gegenstände tauglichen Stücke des Stängels von Schlingpflanzen sind die Spannungsdifferenzen der Gewebe nicht bedeutend. Sehr gering, fast null, sind ferner dieselben Differenzen der Gewebtheile in den der Unterlage parallel wachsenden Sprossen der blattlosen Jungermannieen und der Marchantieen. Nur bei schwacher, in ihrer Einwirkung nicht bis zu dem Gewebe der unteren Stängelflächen dringender Beleuchtung tritt hier eine Differenzirung der Gewebe ein, welche bewirkt, dass alle neu entwickelten Sprossen vom Boden sich erheben, dem Lichte zu wachsend. Als ein letztes Beispiel will ich die hakenförmig gekrümmten Sprossenden von Ampelideen (Ampelopsis, Vitis) anführen, deren Beziehungen zum Lichte und zur Schwerkraft sehr verwickelte sind. Zu der Zeit, da diese Sprossenden aus dem Knospenzustande hervortreten, sich hakenförmig beugen, da bestehen nur geringe, kaum merkliche Spannungsunterschiede zwischen den anatomischen Systemen derselben. **) Die Beugung geschieht unter allen Umständen lothrecht abwärts, innerhalb einer durch die Längsachse des Spros-

*) Comptes rendus XXI (1845) 1187.

**) Die früher von mir hervorgehobenen Spannungsdifferenzen der Gewebe der gekrümmten Zweigenden von Vitis vinifera (Diese Berichte, 1859, 193) treten nach Mitte des Sommers ein, während der bedeutenden Verlangsamung der Entwickelung; an der üppiger wachsenden Ampelopsis hederacea kommen sie so gut wie gar nicht zur Erscheinung.

Digitized by Google

ses gelegten Verticalebene; auch dann, wenn der Spross nur seitlich dem Tageslichte zugänglich war. Dass aber diese Beugung vorwiegend durch das Licht, und nur beiher durch die Schwerkraft hervorgerufen wird, — dies zeigt nicht allein die Einkrümmung des Sprossendes über die Lothlinie hinaus (bei Ampelopsis ist das letzte Ende des Sprosses nicht senkrecht, sondern ganz in der Regel dem aufstrebenden älteren Theil des Sprosses nahezu parallel, schräg abwärts gerichtet) — sondern auch das Verhalten der hakenförmigen Sprossenden in völliger Dunkelheit: sie gleichen die Krümmung binnen 12—20 Stunden mehr oder weniger aus, oft bis zu vollständiger Aufrichtung. Dem Lichte ausgesetzt krümmen sie sich dann aufs neue. — Die hakenförmige Krümmung wird bei weiterer Ausbildung des Sprosses durch dessen Aufwärtsbeugung ausgeglichen. Diese Ausgleichung schreitet in der Regel allmälig von hinten nach vorn vor. Bei Ampelopsis hederacea findet man indess nicht eben selten Ausnahmsfälle, an denen die Aufwärtskrümmung mitten in dem hakenförmig gebogenen Stück begonnen und diesem eine *S*-Form verliehen hat. Spaltet man den Spross innerhalb der schwanenhalsartig gekrümmten Strecke, so tritt sofort in dem klaffenden Auseinanderspreizen der Längshälften die hier bestehende hohe Spannung der Gewebe hervor.

Rotationsversuche.

Mehrere der im Vorstehenden besprochenen Erscheinungen treten besonders anschaulich dann hervor, wenn man, nach Knight's Vorgange, die Schwerkraft durch die Centrifugalkraft ersetzt.*) Vor allem das Beharren der Wurzel in der bisherigen Richtung während der ersten Stadien ihrer Verlängerung unter geänderten Verhältnissen. Erst nachdem eine bestimmte Verlängerung (bei Keimpflanzen von Ervum Lens etwa 0,75 M.M., von Vicia sativa etwa 1 M.M., von Zea Mays 1 M.M., von Secale

*) Ich bediente mich bei meinen Versuchen eines durch eine starke Feder in Bewegung gesetzten Uhrwerkes, dessen Schnelligkeit sich bis auf 300 Umdrehungen pr. Minute steigern liess. Die dem Versuch unterworfenen Pflänzchen schloss ich, nach der von Dutrochet (Mém. II, 40) angewendeten, sehr zu empfehlenden Methode in dünn geblasene Ballons von Glas ein. Der Apparat verträgt keine starke Belastung, empfiehlt sich aber durch Compendiosität und bequeme Handhabung.

cereale höchstens 0,5 M.M. betragend) stattgefunden hat, tritt die Aenderung der Richtung der Wurzel im Sinne des Rotationsradius hervor. Ich fand die Schnelligkeit der Rotation zwischen 60 und 300 Drehungen pr. Minute und einem Drehungshalbmesser von 75 und 120 M. M. ohne Einfluss auf die Länge jener Strecke.

Nach den übereinstimmenden Ergebnissen der Versuche von Knight, Dutrochet und Wigand bedarf es kaum der Erwähnung, dass auch ich bei horizontaler Rotation die Richtung der Wurzeln und Stängel mit Steigerung der Schwungkraft mehr und mehr der waagrechten sich nähern sah. Die Mittheilung von Zahlen scheint mir überflüssig: noch weit auffälliger, als aus den Angaben Wigand's über diesen Gegenstand,*) tritt aus meinen Versuchen die Grösse individueller Verschiedenheit zwischen den Wurzeln von Keimpflanzen einer und derselben Art hervor. Die leichteste Ablenkbarkeit von gegebener Richtung zeigten mir die Wurzeln keimender Gräser, namentlich Secale und Zea, welche als Demonstrationsobject besonders zu empfehlen sein möchten. Nicht minder unnöthig erscheint die Erörterung der Frage, ob Stängel, ob Wurzel zeitiger von der Schwungkraft zu Richtungsänderungen veranlasst werden. Alles hängt hierbei vom Grade der Ausbildung des Stängels, von der Schnelligkeit des Wachsthums der Wurzeln ab. Experimentirt man nur mit keimenden Saamen, so wird man, bei der Frühzeitigkeit der Wurzelentwickelung derselben, die Richtungsänderung der Wurzeln um vieles früher (nach 16—24 Stunden) und entschiedener wahrnehmen, als die der oberirdischen Theile. Ganz anders, wenn man entwickelte Stängel dem Versuche unterwirft. Der 137 M.M. lange einer Keimpflanze von Vicia sativa krümmte seine obere Hälfte nach 4stündiger Drehung, 200 Rotationen pr. Minute, Radius 61 M. M., zu einem gegen das Rotationscentrum concaven Bogen von 79° 38′.

Das Verhalten der fortwachsenden Spitze einer Wurzel zu einem, ihrer normalen Richtung in den Weg tretenden Hindernisse kommt in besonders augenfälliger Weise dann zur Erscheinung, wenn keimender Saamen, in schnell rotirenden, engen gläsernen Ballons sich entwickelnd, mit ihren Wurzelenden auf die Wand des Ballons treffen. Ich brachte Maissaamen, im Be–

---

*) a. a. O. 149.

Digitized by Google

ginn der Keimung, in kugelige Ballons von 25 M.M. Durchmesser. Die Saamen wurden, mittelst durch das Endosperm gebohrter, in den die Oeffnung des Ballons verschliessenden Kork eingebohrter Nadeln im Mittelpunkte des kugeligen Raumes gehalten, der durch Einführung einiger Wassertropfen dunstgesättigt erhalten ward. Die Ballons rotirten bei verticaler Stellung der Rotationsachse 150mal pr. Minute mit einem Rotationsradius von 43 M.M. Die Wurzeln wendeten sich radial nach aussen, mit der Horizontalebene einen Winkel von ca. 65° bildend, und erreichten die Wand des Ballons 44—48 Stunden nach Beginn des Versuchs. Indem sie hier sich aufstemmten, wurde der ältere Theil der Wurzel in einen seitlich (nach der Richtung der linksumläufigen Rotation hin) geöffneten Bogen gekrümmt, der binnen 6 Stunden soweit sich steigerte, dass die Wurzelspitze an der Innenwand des Ballons in horizontaler Richtung hinzugleiten vermochte. So verlängerte sie sich binnen weiteren 10 Stunden bis zu einem um 45° von dem ursprünglichen Berührungspunkte der Wurzel mit der Innenfläche des Ballons rückwärts entfernten Stelle. Von hier ab aber gewann die Einwirkung der Centrifugalkraft die Oberhand über die durch den Contact mit der Ballonwand dem Wurzelende auferlegte Ablenkung von der Normalrichtung. Die Wurzelspitze bog nach aussen, *S*-förmig werdend um, und verlängerte sich nun in einer, der bisherigen genau gegenläufigen Richtung, fortwährend dem Glase dicht angeschmiegt, von welchem der früher ihm anliegende Theil der Wurzel durch Aufstemmen der umlenkenden Wurzelspitze sich etwas entfernt hatte. Die Verlängerung der Wurzel dauerte in dieser Richtung fort, bis sie ein Viertheil des Umfanges des Ballons zurückgelegt hatte, also über den Punkt, in welchem die Rotationsachse die Ballonwand schnitt, und in welchem die Wurzel diese Wand ursprünglich berührt hatte, nach der anderen Seite hin um 45° hinausgewachsen war. Dann erfolgte eine zweite Umlenkung der Wurzelspitze, ganz in derselben Art vor sich gehend, wie die erste, aber in entgegengesetzter Richtung, und eine Entwickelung der weiterwachsenden Wurzel der Wand des Glases entlang, auf dem zuletzt zurückgelegten genau entgegengesetztem Wege. Die Wurzel erhielt schlangenlinigen Verlauf.

Ein nicht geringeres Interesse, als die Versuche Knight's nimmt der Versuch Hunter's nach der Erweiterung und Erklärung desselben in Anspruch, welche wir Dutrochet ver-

Digitized by Google

danken;*) denn er zeigt, dass die Gravitation, auch wenn sie auf ein Minimum reduzirt wurde, noch immer maassgebend auf die Richtung von Stängel und Wurzeln wirkt. Dutrochet fand, indem er keimende Saamen von Vicia sativa in der Verlängerung einer beinahe horizontalen Rotationsachse anbrachte, dass Wurzeln und Stängel in Richtung dieser Achse sich entwickelten, die Wurzeln der Senkung, die Stängel der Hebung der Achse nach; und zwar auch dann noch, wenn die Neigung der Achse gegen die Ebene des Horizonts nur 1° 30′ betrug. — Bei meinen eigenen Versuchen trat bei so geringer Neigung der Rotationsachse diese Erscheinung nur selten hervor: in der Regel entwickelten sich die Wurzeln centrifugal, wenn ihre Spitze auch nur sehr wenig seitlich über die Verlängerung der Rotationsachse hinaus gelangt war; nur die Stängel verlängerten sich dann in Richtung der Hebung der Achse. Der Grund dieser Abweichung meiner Resultate von denen Dutrochet's liegt ohne Zweifel in der Schnelligkeit der Rotationen bei meinem Versuche (300 pr. Minute). Eine Neigung der Achse um 5° erwies sich dagegen völlig ausreichend, um auch bei so rascher Drehung das Phänomen mit voller Klarheit zur Erscheinung zu bringen. — Es bedarf als selbstverständlich kaum der Erwähnung, dass geocentrisch gekrümmte Stängelstücke, welche sofort nach Eintritt der Beugung dem Hunter'schen Versuche unterworfen werden, sich wieder gerade strecken. Doch nur langsam: Stängelstücke von Ervum Lens, deren Beugung etwa 40° betrug, bedurften zur Ausgleichung derselben einer Zeit von 11 Stunden (bei einer Neigung der Rotationsachse von etwa 7°).

Der Hunter'sche Versuch ist sehr geeignet, das verschiedenartige Verhalten von Stängel und Wurzel während eines und desselben Experiments in eigenthümlicher Weise hervortreten zu lassen, wenn keimende Cruciferensaamen demselben unterworfen werden. Befestigt man im Beginn der Keimung begriffene Saamen von Lepidium sativum mittelst durch Saamenschale und Kotyledonen gebohrter Nadeln in der Verlängerung einer schwach geneigten Rotationsachse, so entwickelt sich zunächst (bei einer Temperatur von + 13 bis 16° R. binnen 24 Stunden) nur die Wurzel, der Senkung der Rotationsachse

*) Mémoires II, 13.

Digitized by Google

folgend. Dann tritt die Dehnung des hypokotyledonaren Stängelgliedes ein. Dieses Stängelglied krümmt sich während seiner Streckung in einem gegen die Hebung der Rotationsachse concaven Bogen, welcher ganz in der Regel bis auf 180° steigt. Der Vorgang wird in etwa 10 Stunden beendet. Die während desselben gerade bleibende Wurzel wird durch ihn in die ihrer vorherigen diametral entgegengesetzte Richtung übergeführt: sie zeigt jetzt mit der Spitze nach der Hebungsseite der Achse. Bei weiterem Wachsthum der Wurzel biegt die sich verlängernde Spitze plötzlich um, und wächst dem älteren Wurzeltheile parallel aber entgegengesetzt, der Senkung der Rotationsachse entsprechend weiter.

Inhalt.

Seite

Historisches 175

Unabhängigkeit der Richtung der geocentrischen Krümmung vom anatomischen Baue 178

Spannungsdifferenzen der Gewebe 179

Der Sitz dieser Spannung sind die Zellhäute 180

Verlängerung der Organe bei der Aufwärtskrümmung 181

Die Krümmung aufwärts beruht auf Steigerung der Dehnbarkeit der passiv gedehnten Gewebe 184

Alle Organe, in denen sehr hohe Spannungsdifferenzen der Gewebe obwalten, sind der Krümmung aufwärts fähig; auch die älteren Theile von Wurzeln 187

Kraft und Selbstständigkeit der Aufwärtskrümmung; Unselbstständigkeit der Abwärtskrümmung 191

Abwesenheit von Spannungsdifferenzen der Gewebe in den der Abwärtskrümmung fähigen Theilen 198

Die Schwere wirkt auf die Gewebe der Abwärtskrümmung fähiger Theile wie auf eine zähe Flüssigkeit 200

Abweichung des Wachsthums von Wurzeln von der Richtung abwärts 201

Eindringen der Wurzelspitzen in Quecksilber 203

Abweichungen des Wachsthums von Stängeln von der Richtung aufwärts 205

Rotationsversuche 209

Digitized by Google

C. Bruhns, *Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 in Tarazona in Spanien.*

Gegenwärtig gehören die totalen Sonnenfinsternisse zu den für die Astronomen wichtigsten und interessantesten Erscheinungen, indem dieselben nicht nur eine Prüfung der Genauigkeit unserer jetzigen Tafeln über die Bewegungen des Mondes und der Sonne liefern, sondern auch weitere Aufschlüsse über die physische Beschaffenheit der Sonne versprechen. Um von den betreffenden Vorgängen eine völlig klare und richtige Vorstellung zu erhalten, ist durchaus die eigene Anschauung erforderlich; es war mir daher im höchsten Grade erfreulich, als ich am 8. Juli 1860 von Sr. Excellenz dem Herrn Cultusminister Dr. von Falkenstein den Auftrag zur Beobachtung der bevorstehenden Finsterniss*) erhielt.

Ich nahm von der hiesigen Sternwarte ein Dollond'sches Fernrohr von 1,16 Meter Brennweite und 92 Millimeter Oeffnung mit Vergrösserungen von 52- bis 200fach, ferner einen Pistor'schen Cometensucher von 0,59 Meter Brennweite und 76 Millimeter Oeffnung mit 10- und 15facher Vergrösserung, ein gutes Kessels'sches Taschenchronometer No. 1256, mehrere Blendgläser von verschiedener Durchsichtigkeit und Farbe und ausserdem zwei leicht transportable Thermometer mit. Behufs der Zeit- und Breitenbestimmungen versah ich mich in Berlin durch die

*) Die nächste totale Sonnenfinsterniss findet am 31. December 1861 statt; die Zone der Totalität durchschneidet den atlantischen Ocean, Afrika, das Mittelmeer und endet in Griechenland — die Dauer der Totalität wird sehr kurz sein. Erst am 22. December 1870 findet wieder eine totale Sonnenfinsterniss statt und zwar im südlichen Spanien, in Algier, Sicilien und der Türkei. Da sie in die Zeit des Perihels der Erde fällt, wird ihre Dauer auch nicht sehr gross sein. Die nächste darauf ereignet sich am 19. August 1887 und wird für Norddeutschland total sein.

Digitized by Google

Güte des Herrn Professor Encke mit einem kleinen 5zölligen Prismenkreis mit Stativ und Quecksilberhorizont, und mit einer Perrelet'schen Uhr.

Ich reiste von hier am 10. Juli über Berlin nach Paris, wo ich am 11ten Abends eintraf, und wählte, bis dahin noch unentschlossen, ob ich mich nach Algier oder nach Spanien wenden sollte, das letztere Land, da der Director der Pariser Sternwarte, Herr Leverrier, mir aufs freundlichste anbot, mit ihm nach dem Moncayo zu reisen, wohin er bereits früher eine Expedition unter Herrn Villarceau's Leitung abgesandt hatte.

Am 12ten reisten wir von Paris ab, erreichten am 16ten über Tudela Tarazona, und beeilten uns, auf Maulthieren nach dem 4 Stunden südlich gelegenen Moncayo zu gelangen.

Bei unserer Ankunft am Nachmittage fanden wir den 2346 Meter hohen*) Berg mit Wolken bedeckt; vom Gipfel sah man, dass an der Südseite allerdings weniger Wolken als an der Nordseite, wo in 1400 Meter Höhe über dem Meere an dem sogenannten Heiligthum die französische Expedition ihre Station gewählt hatte, lagen; klar aber war es nur am Fusse des Berges und in dem den Berg umgebenden Thale. Erst am Abend senkten sich die Wolken, und es gewährte einen schönen Anblick, unter sich die weisse Wolkendecke und über sich die Sterne zu sehen.

Am 17ten ging auf dem Berge die Sonne prächtig auf; aber bald fingen die Wolken an, aus dem Thale aufzusteigen, so dass ich in der Mittagsstunde nur mit Mühe zwischen Wolken einige Sonnenhöhen**) zur Breitenbestimmung erhalten konnte. Am Nachmittage war der Himmel dick bedeckt. Doch je trüber es auf dem Berge wurde, desto heiterer schien die Sonne im Thale.

Unter diesen Umständen hielt ich es für gerathener, die Sonnenfinsterniss in der Ebene zu erwarten. Den Abend benutzte ich zur Rückreise nach Tarazona, um von dort einige Maulthiere zum Rücktransport der Instrumente zu holen. Als ich am 18. Juli früh 7 Uhr auf dem in dicken Nebel gehüllten

---

*) Nach der Karte des Herrn Aguilar.

**) Aus 8 Höhen zwischen Wolken genommen, fand ich mit dem 5 Zoll Durchmesser haltenden Prismenkreis, der durch den Vernier Winkel bis zu 20″ angiebt, die Breite 41°47′,5. Nach dem Bulletin météorologique vom 29. August findet Herr Professor Novella mit genaueren Instrumenten 41°47′,7. Eine genauere Uebereinstimmung lässt sich von einem so kleinen Instrumente wohl nicht gut erwarten.

Digitized by Google

Moncayo wieder anlangte, fand ich Herrn Leverrier bereits im Begriff nach dem Thale aufzubrechen. Herr Gautier aus Genf, und Herr Bankdirector Auerbach aus Leipzig, welcher letztere aus warmem Interesse für die Wissenschaft die Reise nach Spanien mit mir gemacht hatte, und ich folgten mit unseren Instrumenten bald nach. Am Fusse des Berges sahen wir den ersten Sonnenstrahl; der Himmel hellte sich immer mehr auf und bei fast wolkenfreiem Himmel langten wir Mittags 12 Uhr in Tarazona an. Herr Leverrier hatte bereits ein Plateau vor dem Gottesacker als passende Beobachtungsstation ausgesucht. Dort wurde ein Tisch aufgestellt, des festen Standes wegen mit Steinen beschwert; ich packte meine Instrumente aus, stellte sie auf, verglich meine Uhr mit den andern vorhandenen Chronometern und legte sie neben die Instrumente. Ich selbst wollte am Dollond'schen Fernrohr beobachten und ausser den Contactbestimmungen mein Hauptaugenmerk auf die Protuberanzen richten. Herr Auerbach übernahm es, die Einsterniss im Cometensucher und mit blossem Auge zu beobachten und die Thermometer, von denen das eine in der Schattenseite am Tische, das andere in der Sonnenseite befestigt war, abzulesen.

Im Dollond'schen Fernrohr behielt ich die 52fache Vergrösserung bei, weil ich darin die ganze Sonne übersehen konnte, im Cometensucher hatte ich die 15fache Vergrösserung eingeschraubt.

Ich theile die Beobachtungen ein in:

1) Contactbestimmungen,
2) Beobachtungen zwischen dem Anfang der Finsterniss überhaupt und dem Anfang der Totalität,
3) Beobachtungen während der Totalität,
4) Beobachtungen zwischen dem Ende der Totalität und dem Ende der Finsterniss überhaupt,
5) Beobachtungen der Temperatur und des Verhaltens der Umgebung während der ganzen Finsterniss.

1) Die Contactbestimmungen.

Das Kessels'sche Chronometer No. 1256, welches in Leipzig im ruhigen Stehen täglich 4 Secunden voreilte, hatte auf der Reise einen andern, aber guten und regelmässigen Gang angenommen. Ich verglich es hier, in Berlin, in Paris, auf dem

Digitized by Google

Moncayo, und bestimmte in Tudela durch 3 Sonnenhöhen seinen Stand. Reducire ich den jedesmaligen Stand auf Leipziger Zeit, wobei ich Leipzig $4^m5^s,3$ westlich von Berlin, $40^m8^s,7$ östlich von Paris und $56^m2^s,7$ östlich von Tudela*) annehme, so habe ich:

	Stand des Chronometers gegen Leipziger Zeit.	
Juli 9,0	$+4^m33^s,0$	durch Vergleichung in Leipzig.
10,0	4 30,0	,, ,, ,, Berlin.
12,35	4 25,6	,, ,, ,, Paris.
19,30	4 22,9	,, 3 Sonnenhöhen in Tudela.

Aus Juli 12 und 19 folgt der tägliche Gang

$$-0^s,4$$

Für die folgenden Beobachtungen wende ich die Correction an, welche ich durch Vergleichungen am 17. Juli auf dem Moncayo mit einem nach Sternzeit gehenden Chronometer von Winnerl erhalten habe. Es sind 2 Vergleichungen, von denen die erste am 17ten am Nachmittage gemacht, die andere, nachdem ich nach Tarazona hin und zurück geritten war und das Chronometer bei mir in der Tasche getragen hatte, am andern Morgen angestellt wurde. Es folgt aus den Vergleichungen fast genau der oben abgeleitete Gang, sodass durch den Transport des Chronometers keine Störung im Gange entstanden ist.

Die Vergleichungen sind

	Chronom. Winnerl		Chronom. Kessels	
Juli 17	$11^h45^m25^s,5$	=	$4^h54^m29^s,0$	Mittel aus 2 Vergleichungen
17	3 9 34,5	=	20 16 8,0	,, ,, ,,

Im Etat atmosphèrique vom 29. August d. J., herausgegeben von der Pariser Sternwarte, ist der Stand des Chronometers Winnerl gegen Moncayoer Zeit angegeben und zwar

Juli 16	15^h	$-36^s,42$
17	15^h	$-34,81$
18	15^h	$-32,86$
20	15^h	$-30,55$

und mit den Uhrständen für die Zeit der Vergleichungen, nämlich $-35^s,0$ und $-33^s,8$ finde ich den Stand des Kessels'schen Chronometers

---

*) Mädler hat in seiner Abhandlung über die Sonnenfinsterniss, im 15. Bande der Dorpater Beobachtungen, Tudela 16° 1′ 30″ östlich von Ferro, also 3° 58′ 30″ westlich von Paris.

Digitized by Google

Juli 17 . $4^h\,54^m$ . . $-52^m\,26^s,4$ gegen Moncayoer Zeit
20 16 . -52 26,6 „ „ „

Für die Zeit der Beobachtungen am Nachmittage des 18. Juli nehme ich ihn an zu:

$-52^m\,26^s,7$ gegen Moncayoer Zeit.

Meine Beobachtungen sind damit in Uhrzeit und in Moncayoer Zeit:

	Kessels 1256		Moncayoer Zeit
Anfang der Finsterniss	$2^h36^m20^s,0$	=	$1^h43^m53^s,3$
Eintritt eines Flecken, erster Rand	2 50 24,0	=	1 57 57,3
„ „ „ zweiter „	2 51 27,2	=	1 59 0,5
„ eines 2. „ erster „	3 36 29,6	=	2 44 2,9
„ „ „ zweiter „	3 37 5,0	=	2 44 38,3
Anfang der Totalität	3 48 21,6*)	=	2 55 54,9
Ende der Totalität	3 51 42,4	=	2 59 15,7
Ende der Finsterniss	4 57 24,4	=	4 4 57,7

Die sichersten Zahlen sind das Ende der Totalität und das Ende der Finsterniss, der Anfang der Finsterniss ist vielleicht zu spät notirt; die Sonnenflecken sind die grössten von 2 Gruppen, die ich sah, den grössern Flecken einer 3. Gruppe versäumte ich zu beobachten.

Die Länge des Beobachtungsortes ist durch die Herren Villarceau und Novella strenge bestimmt. Nach einer Mittheilung des Herrn Villarceau liegt Tarazona $17^s,1$ östlich vom Moncayo und $6^m57,2$ westlich von Greenwich, sodass also zu obiger Moncayoer Zeit 17,1 Secunden zu addiren ist, um Tarazonaer Zeit zu erhalten.

---

*) Für den Anfang der Totalität hatte ich erst eine andere Zahl angenommen. Ich zählte nämlich die sich nach $0^s,4$ wiederholenden Schläge meines Chronometers, und habe im Tagebuche die Zahlen 30 und 79 notirt. Ich fing mit 0 die 50. Secunde des Chronometers an zu zählen und glaubte, dass zum Anfange $3^h48^m50^s,0 + 30 \times 0^s,4 = 3^h49^m2^s,0$ gehörte. Herr Leverrier machte mich aufmerksam, dass dies wohl falsch sei und ich machte zuerst (siehe die Zahlen im Pariser Etat atmosphèrique vom 19. August) die Hypothese, mich um 30 Secunden geirrt zu haben. Jetzt scheint es mir wahrscheinlicher, dass die Minute 47 zu wählen, und um den Anfang der Totalität zu erhalten, mit der zweiten Zahl 79 zu verbinden ist. Dann folgt $3^h47^m50^s + 79 \times 0.4 = 3^h48^m21^s,6$, also die oben angenommene Zahl, während $0^h47^m50^s + 30 \times 0,4 = 3^h48^m2^s,0$ dem Zeitpunkt für die Wahrnehmung des ganzen Mondes angehören würde, den ich auch notirt habe, und wofür ich keine andere Zahl finde.

Digitized by Google

Die Breite von Tarazona beträgt nach der Note im „Etat atmosphérique" vom 29. August d. J.

$+ 41^{0}\ 54',2.$

Um zu sehen, wie die strenge Rechnung mit den Beobachtungen übereinstimmt, habe ich aus den neuesten Mond- und Sonnentafeln für die Breiten $41^{0}\ 40'$, $41^{0}\ 50'$, $42^{0}\ 0'$, $42^{0}\ 10'$ und die Längen $1^{0}\ 30'$, $1^{0}\ 45'$, $2^{0}\ 0'$ westlich von Greenwich den Anfang und das Ende der Finsterniss und der Totalität berechnet.

Mit den Mond- und Sonnenörtern aus Hansen's neuen Tafeln, wie sie sich in der Hansen'schen Abhandlung: Theorie der Sonnenfinsternisse, pag. 435 für Juli 18 angegeben finden (mit den von Hansen berechneten Mond- und Sonnenörtern stimmen die von Wolfers im 48. Bande der astronomischen Nachrichten pag. 41 und von Hind im 5. Circular des Nautical-Almanac gegebenen bis auf 0",1 in Bogen vollständig überein) habe ich erhalten:

φ	6 Minuten westlich von Greenwich.		7 Minuten westlich von Greenwich.		8 Minuten westlich von Greenwich.	
	Anfang der Finsterniss.	Positionswinkel.	Anfang der Finsterniss.	Positionswinkel.	Anfang der Finsterniss.	Positionswinkel.
$41^{0}\ 40'$	$1^{h}39^{m}45^{s},0$	$297^{0}\ 10'$	$1^{h}38^{m}24^{s},4$	$297^{0}\ 21'$	$1^{h}37^{m}\ 3^{s},6$	$297^{0}\ 33'$
41 50	39 28,6	296 57	38 7,7	297 8	36 46,6	297 20
42 0	39 12,3	296 44	37 51,0	296 56	36 29,7	297 8
42 10	38 55,9	296 32	37 34,4	296 43	36 13,0	296 55

φ	6 Minuten westlich von Greenwich.		7 Minuten westlich von Greenwich.		8 Minuten westlich von Greenwich.	
	Ende der Finsterniss.	Positionswinkel.	Ende der Finsterniss.	Positionswinkel.	Ende der Finsterniss.	Positionswinkel.
$41^{0}\ 40'$	$4^{h}0^{m}57^{s},7$	$117^{0}\ 0'$	$3^{h}59^{m}50^{s},5$	$117^{0}\ 12'$	$3^{h}58^{m}43^{s},2$	$117^{0}\ 24'$
41 50	4 0 39,0	116 47	3 59 31,9	116 59	3 58 24,6	117 11
42 0	4 0 20,4	116 35	3 59 13,3	116 47	3 58 6,0	116 59
42 10	4 0 1,8	116 22	3 58 54,7	116 34	3 57 47,4	116 46

φ	6 Minuten westlich von Greenwich.		7 Minuten westlich von Greenwich.		8 Minuten westlich von Greenwich.	
	Anfang der Totalität.	Positionswinkel.	Anfang der Totalität.	Positionswinkel.	Anfang der Totalität.	Positionswinkel.
$41^{0}\ 40'$	$2^{h}51^{m}58^{s},2$	$104^{0}\ 57'$	$2^{h}50^{m}41^{s},0$	$110^{0}\ 0'$	$2^{h}49^{m}26^{s},1$	$117^{0}\ 45'$
41 50	2 51 43,9	94 34	2 50 25,0	102 48	2 49 8,9	110 41
42 0	2 51 32,1	86 33	2 50 11,0	95 14	2 48 52,1	103 25
42 10	2 51 22,8	77 55	2 49 59,1	87 18	2 48 35,7	95 58

Digitized by Google

φ	6 Minuten westlich von Greenwich.		7 Minuten westlich von Greenwich.		8 Minuten westlich von Greenwich.	
	Ende der Totalität.	Positionswinkel.	Ende der Totalität.	Positionswinkel.	Ende der Totalität.	Positionswinkel.
41° 40′	$2^h 55^m 20^s,8$	282° 40′	$2^h 54^m 10^s,2$	290° 42′	$2^h 52^m 57^s,7$	297° 57′
41 50	2 54 57,6	274 43	2 53 49,0	282 56	2 52 37,3	290 48
42 0	2 54 32,4	266 42	2 53 26,2	275 23	2 52 17,0	283 32
42 10	2 54 5,2	258 6	2 53 4,9	267 32	2 51 57,2	276 8

Die angegebene Zeit ist wahre Sonnenzeit des Ortes, wofür die Länge und Breite angegeben ist; um mittlere Zeit zu erhalten, ist die Zeitgleichung zu addiren, sie beträgt nach Hansen

Juli 18 0^h Greenw. Zeit $+5^m\ 54^s,8$
3 ,, 55,3
6 ,, 55,9

Die Positionswinkel sind wie üblich von Nord an, durch Ost, Süd und West gezählt.

Will man statt der Hansen'schen Sonnentafeln die Leverrier'schen, nach denen am 18. Juli die Rectascension der Sonne $0'',8$, die Deklination $0'',5$, die Parallaxe $0'',35$ grösser, der Halbmesser $0'',7$ kleiner ist, zu Grunde legen, so hat man zu dem oben berechneten Anfange und Ende der Finsterniss respective

$$+2^s,5 \text{ und } -0^s,8$$

zu dem Anfange und Ende der Totalität aber

$$-0^s,7 \text{ und } +2^s,3$$

zu addiren.

Will man noch auf die Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresfläche Rücksicht nehmen, so hat man für 2000 Meter Erhöhung zu dem Anfange und Ende der Finsterniss und der Totalität

$$+0^s,4$$

zu addiren.

Aus obigen nach Hansen's Tafeln berechneten Daten habe ich für Tarazona, wenn ich dafür die Breite $+41^0 54^m,2$, die Länge $6^m\ 57^s,2$ westlich von Greenwich annehme, durch Interpolation erhalten:

Anfang der Finsterniss
$=1^h 38^m 4^s,5$ Wahre Tarazonaer Zeit in 297° 3′ Positionswinkel
Ende der Finsterniss
$=3^h 59^m 27^s,2$,, ,, 116 54 ,,

Anfang der Totalität

$=2^h50^m22^s,6$ Wahre Tarazonaer Zeit in 99° 6′ Positionswinkel

Ende der Totalität

$=2^h53^m42^s,2$,, ,, 279 23 ,,

und mit Berücksichtigung der Zeitgleichung und der Annahme, dass Tarazona 17,1 Secunden östlich vom Moncayo liegt, folgt durch Vergleichung mit den Beobachtungsdaten:

	Rechnung — Beobachtung
Anfang der Finsterniss	—10,8
Ende ,, ,, ...	+ 7,9
Anfang der Totalität	+ 5,9
Ende ,, ,, ...	+ 4,9

sodass der Unterschied zwischen der Rechnung und Beobachtung, wenn man den offenbar zu spät beobachteten Anfang der Finsterniss ausschliesst, nur etwa 6 Secunden beträgt, während er 1851 nach den Burckhardt'schen Mondtafeln an 56 Secunden betrug.

2) Beobachtungen zwischen dem Anfang der Finsterniss und dem Anfang der Totalität.

Man hat behauptet, dass bei totalen Finsternissen der ganze Mond bereits geraume Zeit vor Anfang der Totalität sichtbar werde und dass er nicht immer ganz schwarz, sondern hin und wieder gefärbt erscheine. Um zu untersuchen, ob diese Wahrnehmungen sich bei der gegenwärtigen Finsterniss zeigen würden, sah ich oft in das Dollond'sche Fernrohr und auch in den Cometensucher, habe aber bis kurz vor Anfang der Totalität (20 Secunden vorher) nur immer vom Monde soviel gesehen als sich vor der Sonnenscheibe befand und dieser Theil war stets kohlschwarz. Deutlich erkannte man am südöstlichen Mondrande der sich vor der Sonne befand 2 Hervorragungen, 2 Mondberge. Auf der Beer-Mädler'schen Karte sind sie nicht angegeben, weil die Libration für die Zeit der Beobachtung —4° 8′ in Länge und 9′ in Breite betrug.

Die Temperatur nahm anfangs wenig ab, nach und nach mehr und aus den später folgenden Thermometer-Ablesungen wird man ersehen, dass das Minimum der Temperatur ziemlich nahe mit dem Ende der Totalität zusammenfällt.

Digitized by Google

Der Wind wehte sehr heftig, und besonders 6 Minuten vor der Totalität erhob sich ein Windstoss, der aber nur von sehr kurzer Dauer war. Der Wind, welcher anfangs aus Südwest kam, drehte sich nach und nach durch West und Nordwest und wehte während der Totalität aus Nord.

Die Beleuchtung nahm erst stark ab, als die Sonne schon über $^3/_4$ verfinstert war, der Himmel färbte sich von dieser Zeit an besonders in der Nähe des Horizontes graugrün und die Umgebung auf der Erde nahm ein fahles Ansehen an. Je mehr die Totalität heran rückte, desto schneller nahm die Helligkeit ab, doch blieb es stets so hell, dass man bequem ohne Anstrengung lesen und schreiben konnte.

Wenn man das Wallen der Ränder der Sonne und des Mondes, hervorgebracht durch die unruhige, ungleich erwärmte Luft, abrechnet, so waren die Hörner der Lichtsichel bis kurz vor dem Anfang der Totalität scharf begrenzt. 2,5 Minuten vor dem Anfang der Totalität sah ich noch die Spitzen beider Hörner, kurze Zeit, 0,3 Minuten nachher, schien plötzlich die Spitze des im Fernrohr obern (des südlichen) Hornes zu verschwinden, und unmittelbar darauf, noch 2 Minuten vor Anfang der Totalität, verschwand auch die Spitze des untern Hornes. Wenig weiter nach unten aber, etwa 1 Minute nördlicher, erblickte ich sofort durch ein schwach rothes Blendglas die erste Protuberanz, welche nicht allein während der ganzen Zeit der Totalität, sondern noch bis 6,3 Minuten nach derselben von mir gesehen wurde. Der schwarze Zwischenraum zwischen der Protuberanz und der abgerundeten Sichel vergrösserte sich sehr rasch; bis 0,5 Minuten vor Anfang der Totalität verfolgte ich dies Grösserwerden und als ich um diese Zeit meine Aufmerksamkeit dem Westrande des Mondes zuwandte, sah ich diesen sofort, und als runde kohlschwarze Scheibe stand der Mond da; ja an seinem Westrande glänzte auch schon ein heller Saum, die Corona; von Protuberanzen dagegen war an dieser Seite noch nichts sichtbar. Schnell richtete ich meine Aufmerksamkeit dem Ostrande wieder zu und beobachtete zu der oben erwähnten Zeit das Verschwinden des letzten directen Sonnenstrahls.

Digitized by Google

3) Beobachtungen während der Totalität.

Hatte man bisher nur eine Protuberanz, und die Corona nur am Westrande des Mondes gesehen — so traten nach dem Verschwinden des letzten Sonnenstrahls sofort mehrere Protuberanzen — aber alle an der Ostseite — hervor. Die Corona strahlte in intensiv weissem Lichte, ja sie glänzte so stark, dass dadurch die Sichtbarkeit der Protuberanzen weniger hervortrat, und ich bemerkte, dass ich sie mit einem dünnen rothen Blendglase, wenn ich dieses an das Okular hielt, besser sehen konnte. Mit dem dünnen Blendglas entwarf ich in der ersten Minute der Totalität die erste Zeichnung, die ich in Figur I. so getreu als möglich wieder gebe, und nach ihr werde ich in der Richtung wie man die Positionswinkel zählt, d. h. von Norden durch Osten nach Süden, oder in der Zeichnung von unten durch rechts nach oben die einzelnen Protuberanzen durchgehen.

Die erste Protuberanz ist die schon mehrmals erwähnte; wir finden sie in 35 Grad Positionswinkel*). Die Basis betrug 1½—2 Minuten, ihre Höhe ebenfalls 1½—2 Minuten, die Spitze war etwas nach oben gekrümmt, die Farbe, welche vor der Totalität schwach roth gewesen, war jetzt intensiv rosenroth, nur an der Spitze ein wenig matter.

Die 2. Protuberanz in 60 Grad Positionswinkel war vollständig vom Monde getrennt, zwischen ihr und dem Monde war ein Zwischenraum von ½ Minute. Ihre lange Seite lief eine Strecke mit dem Monde parallel, entfernte sich dann von ihm und endete in einer Spitze; die ganze Länge war 1½—2 Minuten, die Breite nur ½ Minute, die Farbe ebenfalls rosenroth.

Die 3. Protuberanz erhob sich in 75° Positionswinkel bergähnlich mit einer Basis von 1½ Minute und einer Höhe von etwas über ½ Minute. An diese grenzte unmittelbar ein rother Saum mit mehreren kleinen Auszackungen, die Länge betrug an 50 Grad im Positionswinkel, die Höhe gleich nach dem Verschwinden des letzten Sonnenstrahls kaum ½ Minute, die Farbe war anfangs blassroth, aber in wenigen Secunden ging die blassrothe Farbe in prächtiges Rosenroth über und es schien

*) Die Positionswinkel, sowie auch die Dimensionen der Protuberanzen sind, da es wegen des heftigen Windes nicht möglich war, Messungen anzustellen, Schätzungen, wobei die Distanzen mehrerer Fäden, die ich im Brennpunkt eingezogen hatte, als Maassstab dienten.

Digitized by Google

auch, als wenn die Höhe zugenommen hätte. Bald aber merkte man wieder die Abnahme der Höhe, denn der sich bewegende Mond bedeckte nach und nach den ganzen Saum.

Eine 4. Protuberanz erhob sich noch in 155 Grad Positionswinkel; die Basis war nicht sehr gross, höchstens ³/₄ Minuten, die Höhe betrug 1½ Minute, die Form hatte Aehnlichkeit mit der eines Stierhornes, die Spitze war bedeutend hakenförmig gekrümmt. Die hakenförmige Krümmung nach unten (Norden) zeigend erinnerte mich lebhaft an die von vielen Astronomen 1851 gesehene hakenförmige Protuberanz. Die Farbe war auch rosenroth.

Weiter nach oben (Süden) konnte ich keine Protuberanz wahrnehmen, und während der ganzen Totalität habe ich, obwohl ich öfters meine Aufmerksamkeit dahin richtete, dort nichts sehen können.

Im Laufe der 2. Minute wurden die eben beschriebenen Protuberanzen immer kleiner, nur die erste Protuberanz im Norden blieb in ihrer Grösse und Gestalt fast unverändert, die freischwebende war vom Monde erreicht und wurde immer mehr bedeckt; der Saum war am Ende der zweiten Minute ganz verschwunden und ich konnte daher meine Aufmerksamkeit der Westseite des Mondes und der Sonne zuwenden und sah dort mehrere Protuberanzen, von denen ich vorher nichts gesehen hatte.

Die Zeichnung II. giebt ein Bild, wie mir 2 Minuten nach Anfang der Totalität das Doppelgestirn erschien. Gehen wir nach ihr die einzelnen Protuberanzen wieder durch, so finden wir: bergähnlich die 5. Protuberanz in 260 Grad Positionswinkel als eine sehr kleine Hervorragung von ½ Minute Basis und kaum derselben Höhe; die Farbe ist wieder rosenroth.

Unmittelbar daran schliesst sich ein niedriger Saum von ¼ Minute Höhe von 270 bis 300 Grad, also in 30° Länge im Positionswinkel. In 310° Positionswinkel befindet sich die 6. Protuberanz, eine in eine Spitze endigende Hervorragung von beträchtlicher Basis von etwa 2′ und einer grössten Höhe von ³/₄ Minuten.

Eine 7. Protuberanz ist noch sichtbar im Positionswinkel von 340 Grad, die Basis misst 1 Minute, die Höhe gleich der vorigen Protuberanz etwa ³/₄ Minuten, die Farbe bei dieser und der vorhergehenden ist wie bei den andern rosenroth.

Digitized by Google

Unten erblickte ich unter einem Winkel von etwas weniger als 35 Grad die als erste bezeichnete Protuberanz und je mehr ich sie betrachtete, desto grösser schien sie mir zu werden; die zuerst gesehenen scharfen Begrenzungen waren nicht mehr sichtbar, flammenartige Ausstrahlungen erhoben sich; bis zu einer Höhe von 3 bis 4 Minuten konnte ich sie verfolgen, und in dieser Höhe wurden sie so matt, dass sie sich von der Umgebung nicht mehr unterscheiden liessen. Die Farbe, welche unten an der Basis rosenroth war, wurde, je mehr man sich von dieser entfernte, immer blasser und vermischte sich zuletzt mit dem Weiss der Corona.

Nachdem ich diese Ausstrahlungen etwa eine halbe Minute beobachtet hatte, ohne in dieser Zeit grosse Aenderungen wahrzunehmen, wandte ich mich vom Fernrohr fort, um die Corona und den Himmel auf kurze Zeit mit blossem Auge anzusehen.

Der dunkle, auch für das freie Auge vollkommen schwarz aussehende Mond war mit einem hellstrahlenden Kranze von nicht gleicher Breite umgeben. Unten war die Breite beträchtlich grösser als oben, ich schätzte sie unten auf $^3/_8$ Grad, oben nur auf $^1/_4$ Grad und es sah ganz so aus, als wenn die Mondscheibe excentrisch in der Corona schwebte.

Die Form der Corona erschien mir kreisrund, nur nach Osten hin zeigte sich eine Ausstrahlung von einem Grad Länge, während ihre Breite an der Basis 3 Minuten und nach dem Ende nur halb so viel betrug. Während der Beobachtungszeit von etwa 10 Secunden änderte sich weder die Richtung noch die Ausdehnung dieses Lichtstreifens, und sein Licht, mit dem Lichte der Corona verglichen, war bedeutend schwächer. Das Licht der Corona war ein sehr unruhiges, es schien zu zittern und hatte dann Aehnlichkeit mit stark funkelnden Sternen, die Farbe schien glänzend weiss, wenigstens konnte ich nicht den geringsten Farbenton erkennen.

Ich sah mich um nach Sternen und erkannte die Venus und den Jupiter mit der grössten Leichtigkeit, erstere strahlte bedeutend heller als letzterer. Obwohl ich den Ort von Castor und Pollux, sowie auch von Procyon, Merkur und Saturn genähert wusste und die betreffenden Stellen schnell durchmusterte, konnte ich doch in den wenigen Secunden, die ich zur Auffindung verwandte, keinen dieser Sterne wahrnehmen.

Mein Reisebegleiter, Herr Auerbach, welcher mit blossem

Digitized by Google

Auge längere Zeit sowohl nach der Corona als nach Sternen sah, hat im Umfange der Corona nach Südwesten eine Einbiegung wahrgenommen, der Strahlenbüschel nach Osten wurde von ihm fast ebenso wie von mir gesehen. Das Licht schien ihm ruhig und während mehrerer Minuten hat er in der Form keine Aenderung wahrgenommen. An Sternen hat er noch Pollux aufgefunden, Castor ist mit Sicherheit noch von einem andern Beobachter gesehen, mehr als 4 Sterne hat aber meines Wissens in Tarazona niemand wahrgenommen.

Die Tafel II. giebt von der Corona, wie Herr Auerbach sie gesehen, eine Darstellung.

Als ich gegen Ende der 3. Minute der Totalität wieder durch das Fernrohr sah, entwarf ich schnell eine 3. Zeichnung, welche in Figur III. wiedergegeben ist. Die Protuberanzen hatten, mit Fig. II. verglichen, sich beträchtlich geändert. Es schien bereits wieder heller geworden zu sein, denn von den Ausstrahlungen der ersten Protuberanz konnte ich nichts mehr wahrnehmen; sie hatte ihre begrenzte Form wieder angenommen und war in Grösse wenig von ihrer ersten Ausdehnung verschieden.

Die Protuberanz in 340^0 Positionswinkel war bedeutend grösser geworden, die Basis mass etwa 2 Minuten, die Höhe mochte $1\frac{1}{2}$ Minute sein. Der rothe Saum hatte sich weiter ausgebreitet, er bedeckte die Protuberanz in 310^0 Positionswinkel und umfasste an 50 Grad Länge und hatte eine Höhe von 1 Minute, und eine intensiv rosenrothe Farbe. Die Protuberanz in 260 Grad Positionswinkel hatte sich vom Monde losgetrennt, sie schwebte ganz frei, ihre Entfernung vom Monde war aber sehr gering, kaum $\frac{1}{4}$ Minute, ihre Länge 1 Minute, ihre Höhe $\frac{1}{2}$ Minute. Endlich war noch eine ganz kleine Protuberanz in 240 Grad Positionswinkel sichtbar geworden, sie hatte kaum $\frac{1}{2}$ Minute Basis und Höhe, glich einem Kegel und war ebenfalls von rosenrother Farbe.

Je mehr das Ende der Totalität heranrückte, desto undeutlicher wurden die Protuberanzen; die Farbe wurde blasser, und gleich nach der 3. Minute der Totalität ging eine bedeutende Veränderung vor. Fast alle Protuberanzen bis auf zwei, die kleine in 240 Grad und die freischwebende in 260 Grad Positionswinkel, welche unsichtbar wurden, nahm der Saum in sich auf; er nahm eine Ausdehnung von mehr als 90 Grad Länge im

Digitized by Google

Positionswinkel an, hatte eine Höhe von $1\frac{1}{2}$ Minute und war von blassrother Farbe. — Nur etwa 20 Grad im Positionswinkel von ihr war noch unverändert, vielleicht in etwas hellerer Farbe, die Protuberanz I; die 4. Figur giebt die Zeichnung, welche ich entwarf.

Indem ich meine Aufmerksamkeit auf den Punkt richtete, wo der erste Sonnenstrahl zum Vorschein kommen sollte, sah ich zu gleicher Zeit den Saum verschwinden und nur noch die Protuberanz I. konnte ich in meinem Fernrohr mit dem dünnen rothen Glase wahrnehmen.

4) Beobachtungen nach der Totalität.

Als der erste Sonnenstrahl, von dem Freudengeschrei der uns umgebenden Menge begrüsst, die Totalität beendet hatte und die Umgebung heller beleuchtet war, sah ich noch ununterbrochen in das Fernrohr und gewahrte die Protuberanz I, ich bemerkte wie die Lichtsichel, deren Hörner ich stets vollständig in Spitzen auslaufend gesehen habe, sich ihr immer mehr näherte und wie dadurch die Farbe der Protuberanz immer heller und heller wurde, sodass mit dem Wachsen der Breite der Lichtsichel auch die Schwierigkeit des Erkennens der Protuberanz zunahm. Bis zu 3 Uhr 58 Minuten, also 6,3 Minuten nach dem Ende der Totalität, gelang es mir die Protuberanz zu sehen und aus der Bewegung der Lichtsichel konnte ich schätzen, dass 2 Minuten später, also 8,3 Minuten nach dem Ende der Totalität das nördliche Horn sie berühren würde. Während der ganzen Dauer der Sichtbarkeit der Protuberanz konnte ich an ihr weder eine Grössen- noch eine Formänderung wahrnehmen.

Als ich 2 Minuten nach dem Ende der Totalität den Mondrand verfolgte, konnte ich noch den ganzen Umfang der Mondscheibe erkennen, 5 Minuten später war es nicht mehr möglich; ausser dem Theile, welcher vor der Sonnenscheibe sich befand, war nichts zu erkennen. Unebenheiten am sichtbaren Mondrande konnte ich nicht sehen, und ebenso wie vor der Totalität war auch die Farbe des Mondes vollständig schwarz. Die Beleuchtung nahm nach und nach wieder zu, und je mehr sie zunahm, desto mehr erschien die Umgebung wieder in ihrer gewöhnlichen Färbung. Der Wind drehte sich von Norden zurück nach Nordwest und wehte in dieser Richtung den Nachmittag

Digitized by Google

fort. Die Temperatur nahm auch wieder zu und erreichte dieselbe Höhe wie vor der Finsterniss. Ich beobachtete schliesslich noch so genau als möglich das Ende der Finsterniss.

5) Temperaturbeobachtungen während der Finsterniss und über das Verhalten der Umgebung.

Herr Auerbach las von 5 zu 5 Minuten beide Thermometer, das im Schatten und das in der Sonne hängende, ab. Seine Ablesungen sind, wenn ich gleich die Correction der Thermometer, welche sie mit einem Normalthermometer zeigten, anbringe und ausser der wahren Tarazonaer Zeit noch die Zeit vor und nach der Totalität angebe:

Wahre Tarazonaer Zeit.	Zeit vor der Totalität.	Thermometer im Schatten R°.	Thermometer in der Sonne R°.	Wahre Tarazonaer Zeit.	Zeit nach der Totalität.	Thermometer im Schatten R°.	Thermometer in der Sonne R°.
1h 23m	1h 27m	19°,2	20°,3	2h 53m	−0h 1m	. . .	+15,9
1 28	1 22	19,2	20,1	2 58	+0 4	+15,4	+15,9
1 33	1 17	19,0	19,9	3 3	0 9	+15,4	+15,9
1 38	1 12	18,6	19,5	3 8	0 14	+15,4	+16,1
1 43	1 7	18,8	20,1	3 13	0 19	+17,2	+17,5
1 48	1 2	19,0	20,5	3 18	0 24	+17,0	+17,7
1 53	0 57	19,0	20,3	3 23	0 29	+17,2	+17,9
1 58	0 52	18,6	19,7	3 28	0 34	+17,4	+18,5
2 3	0 47	18,6	19,7	3 33	0 39	+18,0	+18,7
2 8	0 42	18,6	19,3	3 38	0 44	+17,8	+18,9
2 13	0 37	18,6	19,3	3 43	0 49	+17,6	+19,1
2 18	0 32	18,6	19,5	3 48	0 54	+18,0	+19,3
2 23	0 27	18,2	18,5	3 53	0 59	+19,0	+20,9
2 28	0 22	18,0	17,9	3 58	1 4	+19,2	+20,9
2 33	0 17	17,6	17,7				
2 38	0 12	17,4	17,7				
2 43	0 7	17,0	16,9				
2 48	0 2	. . .*)	16,5				

An unserm Beobachtungsorte blühten einige kleine Blumen, sie schlossen mit zunehmender Finsterniss ihre Kelche etwas, thaten es aber auch, wenn man einen Gegenstand so hinstellte, dass sie sich im Schatten desselben befanden. Maulthiere, welche uns umgaben, blieben vollständig indifferent und Vögel habe ich wenige fliegen sehen.

*) Die Graduirung dieses Thermometers war etwas feiner als die des andern und daher ohne künstliche Beleuchtung, die wir nicht anwenden wollten, nicht abzulesen.

Digitized by Google

Folgerungen aus den Beobachtungen.

Nachdem im Vorstehenden bereits angegeben worden, wie genau unsere jetzigen Tafeln mit den Beobachtungen übereinstimmen, wollen wir aus den beobachteten Vorgängen die Frage zu entscheiden suchen, ob die Protuberanzen bloss optische Erscheinungen sind oder integrirende Theile der Sonne bilden.

Besonders wichtig in dieser Beziehung erscheint die Protuberanz I, sowohl wegen der langen Dauer ihrer Sichtbarkeit als auch wegen der Unveränderlichkeit in Grösse und Gestalt, wenn man von den flammenartigen, nur während der Mitte der Totalität wahrgenommenen, Ausstrahlungen absieht.

Wie früher erwähnt, erschien die Protuberanz I. 2 Minuten vor dem Anfange der Totalität über dem nördlichen Horne, und wurde erst 8½ Minuten nach dem Ende der Totalität von der Lichtsichel wieder berührt. Die nördliche Spitze der Sichel hatte, wenn ich nach leicht abzuleitenden Formeln die Rechnung ausführe,

2 Minuten vor der Totalität einen Positionswinkel von $48^0,8$.

Dicht darüber erschien die Protuberanz, deren Basis ich zu 1½ bis 2 Minuten schätzte; rechnen wir 1¾ Minute und die Entfernung von der Spitze des Horns bis zum Anfange der Protuberanz $1'$, so wird, da der Halbmesser des Mondes um diese Zeit $16',55$ war, von der Hornspitze bis zur Mitte der Protuberanz der Positionswinkel für $1\frac{7}{8}'$ um

$$6^0,5$$

verkleinert werden müssen; dadurch erhalten wir für die Mitte der Protuberanz

um $2^h\ 48',4$ wahre Tarazonaer Zeit den Positionswinkel

$$48^0,8-6,5=42^0,3.$$

8,3 Minuten nach der Totalität bildete dasselbe Horn am Mittelpunkt des Mondes nach der Rechnung den Positionswinkel von

$$12^0,9.$$

Nach der Schätzung berührte die Lichtsichel die Protuberanz, und rechnen wir wieder bis zur Mitte derselben ⅞ Minuten = $3^0,1$ Positionswinkel, so kommt

um $3^h\ 2',1$ wahre Tarazonaer Zeit der Positionswinkel

$$12^0,9+3,1=16^0,0.$$

mithin beträgt am Mittelpunkt des Mondes die Aenderung des Positionswinkels der Protuberanz

in 13,7 Minuten $26^0,3$.

Untersuchen wir wie gross der Positionswinkel beide Male

am Mittelpunkt der Sonne war, so haben Punkte von 48°,8 und 12°,9 Positionswinkel am Mittelpunkt des Mondes zu den erwähnten Zeiten am Mittelpunkt der Sonne die Positionswinkel von 43°,4 und 32°,3, und 1 7/8′ zuerst und 7/8′ nachher geben bei 15′,75 Halbmesser für die Sonne noch 6°,8 und 3°,2 Positionswinkel, sodass die Positionswinkel am Mittelpunkt der Sonne

um 2^h 48′,4 Tarazonaer Zeit 36°,6
„ 3^h 2,1 „ „ 35,5

betragen. Die Uebereinstimmung ist so nahe wie man nur wünschen kann, und ¼ Minute Schätzungsfehler in der Grösse der Protuberanz oder in der Entfernung derselben von der Hornspitze würde eine völlige Uebereinstimmung herbeiführen.

Die Protuberanz I. hat also in dem Zeitraume von fast 14 Minuten ihren Positionswinkel am Mittelpunkt der Sonne nicht geändert, während der Positionswinkel am Mittelpunkt des Mondes nicht weniger als

26°

kleiner geworden ist. Die Protuberanz stand zum Mittelpunkt der Sonne im Positionswinkel von 36°, der Abweichungskreis bildete mit der Richtung der Bewegung des Mondes den Positionswinkel von 117 Grad, folglich bildete die Protuberanz mit der Richtung der Bewegung am Mittelpunkt der Sonne einen Positionswinkel von 81° und sie durfte daher durch die Bewegung des Mondes während der Beobachtungszeit ihre Grösse nicht sehr verändern, welches ebenfalls mit der Beobachtung übereinstimmt. Ich glaube daher mit Sicherheit behaupten zu können, dass die Protuberanz I. für die Hypothese, dass die Protuberanzen Theile der Sonne sind, und wider die optische Hypothese spricht. Die für diese Hypothese angeführte Wahrnehmung, dass der Mond durch seine Bewegung nicht die in der Richtung seiner Bewegung liegenden Protuberanzen in der Zeit, in welcher sie wieder verschwinden, verdecken kann, lässt sich vielleicht auf andere Weise erklären, ich mache darauf aufmerksam, dass ich auf der Ostseite des Mondes gleich nach Anfang der Totalität den rothen Saum sich in wenigen Secunden beträchtlich vergrössern und an Intensität der Farbe zunehmen sah, welche Erscheinung ich durch das Verschwinden der gebeugten Strahlen am Mondrande und durch die zunehmende Dunkelheit erklären mögte. Dass umgekehrt besonders die Spitzen der Protuberanzen, wenn der Mond durch seine Bewegung

Digitized by Google

den untern, breitern Theil der Protuberanzen bedeckt hat, vielleicht weil sie sich von dem durch die Corona gebildeten hellen Hintergrunde nicht mehr unterscheiden lassen, eher verschwinden, als sie nach den Messungen sollten, halte ich nicht für unmöglich.

Ebenso möchte ich die Verschiedenheit der Beobachtungen und besonders die Ungleichheit der Grössen und Formschätzungen nicht als Beweis für die Richtigkeit der optischen Hypothese ansehen. — Dass durch die Bewegung des Mondes, durch die ab- und zunehmende Beleuchtung fortwährend Aenderungen vorgehen ist gewiss, sicher spielen aber auch Beobachtungsfehler eine nicht unbedeutende Rolle, denn das ganze Phaenomen, welches nur etwas über 3 Minuten dauert, bietet so viel Aussergewöhnliches, dass man kaum weiss, wo man anfangen soll, und wenn man einen Totaleindruck sich verschaffen will, kann man bei jedem Einzelnen nur zu kurze Zeit verweilen. Erst wenn viele Beobachter sich geeinigt haben, ihre ganze Aufmerksamkeit einem e i n z e l n e n Gegenstande zu schenken und strenge Messungen anstellen, wird sich darüber genauer Aufschluss geben lassen.

Wenn die Protuberanzen Theile der Sonne, vielleicht eine Art Wolken sind, weil sich freischwebende gezeigt haben, so muss nach unsern Ansichten auch eine Art Atmosphäre existiren, in der sie schweben, und die Corona könnte alsdann grade diese Atmosphäre sein. Die Beobachtungen der Corona von mir und meinem Begleiter scheinen im Wesentlichen mit den Beobachtungen Anderer übereinzustimmen: der nach Osten gesehene Strahlenbüschel ist auch an andern Orten gesehen worden; doch möchte ich glauben, dass bei der Corona Beugungserscheinungen und Reflexionsphaenomene in unserer Atmosphäre mitwirken, wenigstens scheint man im Thale an der Meeresküste eine grössere Anzahl von der Corona ausgehender Strahlenbüschel gesehen zu haben, als wir in Tarazona, in einer Höhe von etwa 800—1000 Meter über der Meeresfläche; die grössere Breite der Corona unten lässt sich durch den Vorübergang des Mondes vor der Sonnenscheibe erklären: Tarazona liegt beträchtlich nördlich von der Centrallinie, der Mondrand überragte den südlichen Sonnenrand um 62″, den nördlichen nur um 32″.

Die Aenderung der Windrichtung erklärt sich vielleicht durch die Abnahme der Temperatur; in der Zone der Totalität ist es während der Finsterniss um mehrere Grade kälter gewor-

Digitized by Google

den als ausser dieser Zone, die Temperaturen suchten sich auszugleichen, sowohl von Norden wie von Süden strömte die warme Luft in die Zone der Totalität hinein. Da Tarazona der Nordgrenze der Totalität am nächsten liegt, so hatten wir nur den Nordstrom, der sich mit dem herrschenden Westwinde verband, zu Nordwest wurde, ja während der Zeit der Totalität bedeutend den Westwind überflügelte und allein vorherrschend war, und als die Temperaturen in und ausser der Zone der Totalität wieder gleich wurden, nahm der Wind seine ursprüngliche Richtung wieder an.

Das Minimum der Wärme fand erst etwa 5 Minuten nach dem Ende der Totalität statt und es zeigte sich hier dieselbe Nachwirkung wie im Laufe der täglichen Temperatur. Die Abnahme betrug im Schatten, wenn man das Minimum 15°,4 R. vergleicht mit der Temperatur von 19°,2 am Anfang und Ende der Finsterniss . . . . 3°,8 R., die Abnahme in der Sonne von 19,9 zu 15,9 zu 20,9 im Mittel . . . 4°,5. Während der Totalität haben beide Thermometer fast gleiche Temperatur gezeigt.

Die Dunkelheit war nicht so gross, wie ich erwartet hatte, man konnte bequem lesen und schreiben ohne sich sehr anzustrengen, einen optischen Versuch machte Herr Auerbach mit dem Lesen einer Schrift. Vor der Totalität konnte er sie in 1,25 Meter, während der Totalität in 0,35 Meter Entfernung lesen.

Das Verhalten der Pflanzen und Thiere scheint mir hervorgebracht durch die Abnahme des Lichtes und der Wärme und ist wohl ganz dasselbe wie in der Dämmerung. Die von Einigen beobachtete Aengstlichkeit einzelner Thiere bei solchen Erscheinungen hat ihren Grund wohl nur in der unerwartet schnellen Abnahme des Lichtes und der Wärme, welche erst ¼ Stunde vor der Totalität merklich ist.

Schliesslich erfülle ich nur eine Pflicht der Dankbarkeit, wenn ich der grossen Freundlichkeit und Zuvorkommenheit der Spanier gedenke. Sie waren uns überall behülflich und erzeigten uns Gefälligkeiten, wo sie konnten. Nicht allein in Tudela, auf dem Moncayo und in Tarazona, sondern auch auf dem Wege nach Madrid, wohin ich nach der Finsterniss reiste und in Madrid selbst war es besonders Herr de Ardanaz, Chef der uns von der Regierung entgegengesandten Commission, der uns durch seine Humanität zum wärmsten Danke verpflichtete.

Leipzig, im November 1860.

Digitized by Google

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

Protuberanzen gesehen am Anfange der zweiten Minute der Totalität.

III.

Protuberanzen gesehen am Ende der dritten Minute der Totalität.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Hofmeister, über die durch die Schwerkraft bestimmten Richtungen von Pflanzentheilen 175

Bruhns, Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860 in Tarazona in Spanien 214

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIZEHNTER BAND.

1861.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

Digitized by Google

Digitized by Google

SEP 27 1907

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Herr Staatsminister a. D. *Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim.*
Seine Excellenz der Herr Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Johann Paul von Falkenstein.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- Professor *Hermann Brockhaus* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Hofrath *Eduard Albrecht* in Leipzig.
- Professor *Gustav Flügel* in Dresden.
- Rector *Friedrich Franke* in Meissen.
- Geheimer Regierungsrath und Geheimer Kammerrath *Hans Conon von der Gabelentz* in Altenburg.
- Geheimer Hofrath *Karl Göttling* in Jena.
- Doctor *Hermann Alfred von Gutschmid* in Leipzig.
- Hofrath *Gustav Hänel* in Leipzig.

Digitized by Google

Herr Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Jena.
- Hofrath *Karl Nipperdey* in Jena.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Hofrath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Domherr *Friedrich Tuch* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wachsmuth* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.
- Professor *Anton Westermann* in Leipzig.
- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in Tübingen.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Moritz Haupt* in Berlin.
- —— *Otto Jahn* in Bonn.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Hofrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhardt Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Ernst Heinrich Weber* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Geheimer Medicinalrath *Karl Gustav Carus* in Dresden.
- Professor *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- —— *Otto Linné Erdmann* in Leipzig.
- —— *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Geheimer Regierungsrath *Peter Andreas Hansen* in Gotha.
- Doctor *Wilhelm Hofmeister* in Leipzig.
- Hofrath *Karl Gotthold Lehmann* in Jena.

Digitized by Google

Herr Professor *Georg Mettenius* in Leipzig.
- —— *August Ferdinand Möbius* in Leipzig.
- —— *Karl Friedrich Naumann* in Leipzig.
- —— *Eduard Pöppig* in Leipzig.
- Bergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Professor *Theodor Scheerer* in Freiberg.
- —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Hofrath *Mathias Jacob Schleiden* in Jena.
- Professor *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- —— *Eduard Friedrich Weber* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich d'Arrest* in Kopenhagen.
- —— *Otto Funke* in Freiburg.
- —— *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- —— *Alfred Wilhelm Volkmann* in Halle.
- —— *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1861 eingegangenen Schriften.

Schriften von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. Berlin 1861.

Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1860, August—December. 1861, Januar—October.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. XIX. Mit LVIII Tafeln. Wien 1861.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe, Bd. XXXIV, 3. XXXV, 1—5. XXXVI, 1. Wien 1860. 1861. — Mathem.-naturwiss. Classe, Bd. XXXVIII, 28. XXXIX, 6. XLI, 15—20. XLII, 21—28. XLIII, 1. Wien 1860. 1861.

Digitized by Google

Fontes rerum Austriacarum. Zweite Abtheilung. Diplomata et Acta. Bd. XIX. XX. Wien 1859. 1860.

Archiv für Kunde österreichischer Geschichtsquellen. Bd. XXIV, 2. XXV, 1. 2. Wien 1860.

Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. X. Jahrg. 1860. Wien 1860.

Mittheilungen der K. K. geographischen Gesellschaft. Jahrg. IV. Wien 1860.

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrg. 1860, Juli—Dec. 1861, Jan.—Juni. Prag 1860. 1861.

Abhandlungen der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Hist. Cl. Bd. VIII. Abth. 3. München 1860. Philos.-philol. Cl. Bd. IX. Abth. 1. München 1860. Mathem.-phys. Cl. Bd. VIII. Abth. 3. München 1860.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1861. I, 1—3. München 1861.

Gelehrte Anzeigen der K. Bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 49. 1859, Jul.—Dec. Bd. 50. 1860, Jan.–Jun.

Einleitende Worte zur Feier des Geburtstags des Königs Maximilian II, von M. J. Müller. München 1859.

Einleitende Worte zur Feier des Geburtstags des Königs Maximilian II, von J. v. Liebig. München 1860.

Festrede zur Feier des Geburtsfestes Sr. Maj. Maximilian II, von E. Harless. München 1860.

Rede auf Macaulay u. s. w., von G. Th. v. Rudhart. München 1860.

Denkrede auf Alex. v. Humboldt, von C. Fr. Ph. v. Martius. München 1860.

Gedächtnissrede auf F. v. Thiersch, von G. Mart. Thomas. München 1860.

Verzeichniss der Mitglieder der Königl. Bayerischen Akad. d. Wiss. München 1860.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. IX. von dem J. 1860. Göttingen 1861.

Nachrichten von der Georgs-August-Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Vom J. 1860, No. 1—29. Göttingen 1860.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 38, 1. 2. Görlitz 1861.

Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Herausg. von dem naturwiss. Verein für Sachsen und Thüringen. Jahrg. 1859, Juni. 1860, Juli—December. 1861, Januar. März—Juli. Berlin 1859—1861.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. VI, Heft 1. Halle 1861.

Würzburger naturwissenschaftliche Zeitschrift. Bd. I, 3. 4. Bd. II, 1. Würzburg 1861.

Würzburger medicinische Zeitschrift. Bd. I, 5. 6. Bd. II, 1—4. Würzburg, 1861.

Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen, Sept. 1854. Göttingen 1860.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins in Heidelberg. Bd. II, 3. 4.

Jahrbücher des Vereins für Naturkunde im Herzogthum Nassau. Heft 14. 15. Wiesbaden 1859. 1860.

Das Festland Australien, von Fr. Obernheimer. Beilage zu den Jahrbüchern u. s. w. Wiesbaden 1861.

Digitized by Google

Jahresbericht des physikal. Vereins in Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1859—1860. Frankfurt 1861.

Der zoologische Garten. Organ für die zoologische Gesellschaft zu Frankfurt a. M. Herausg. von Dr. D. F. Weinland. Jahrg. II, 1861, No. 1—12.

Bericht (2.) des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Offenbach 1861.

Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Philos.-histor. Abth. 1861. Heft 1. — Abth. für Naturwissenschaften und Medicin. 1861. Heft 1. 2. Breslau 1861.

Jahresbericht (38.) der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1860.

Die fossile Fauna der silurischen Diluvial-Geschiebe von Sadewitz bei Oels in Nieder-Schlesien. Eine palaeontologische Monographie von Dr. F. Römer. (Gratulationsschrift der Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Cultur zum 50jährigen Jubiläum der Universität Breslau.) Breslau 1861.

Schriften der Königl. ost-preussischen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. I. Abth. 1. 2. Königsberg 1860. 1861.

Die Metamorphose des Caryoborus, von H. L. Elditt. (Gratulationsschrift der königl. ost-preuss. phys.-ökon. Gesellsch. zum 25jähr. Professor-Jubiläum des Hrn. Prof. Rathke in Königsberg.) Königsberg 1860.

Schriften der Universität zu Kiel aus dem Jahre 1860. Bd. 7. Kiel 1861.

Neue Denkschriften der allgemeinen schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd. XVII. XVIII. Zürich 1860. 1861.

Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. III, 3 u. 4. IV, 1—4. V, 1—4. Zürich 1858—1860

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus den Jahren 1858—1860. Nr. 408—468 (4 St.). Bern 1859. 1860.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. 43ste Versammlung. Bern 1859.

Atti della società elvetica delle scienze naturali riunita in Lugano. 1860. Sessione 44. Lugano 1861.

Bericht über die Thätigkeit der St. Gallischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft während der Vereinsjahre 1858–60. St. Gallen 1860. — Während des Vereinsjahres 1860—61. St. Gallen 1861.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. VI, 1859—60. Chur 1861.

Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XVI, P. 1. Genève 1861.

Mémoires de l'académie royale des sciences &c. de Belgique. T. XXXII. Bruxelles 1861.

Bulletin de l'académie royale . . . de Belgique. 29ème année. Sér. II. T. IX et X. Bruxelles 1860.

Annuaire de l'académie royale . . . de Belgique 1861. 27ème année. Bruxelles 1861.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. 2de Verzameling. Deel XIV. 1. 2. Deel XV. Haarlem 1861.

Extrait du programme de la Société hollandaise des sciences à Harlem pour l'année 1861.

Archiv für die Holländischen Beiträge zur Natur- und Heilkunde von F.C. Donders und W. Berlin. Bd. II, 4. III, 1. Utrecht 1860. 1861.

Digitized by Google

Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. IX. Venezia 1860.

Atti dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. V, Serie 3, Disp. 10. T. VI, Serie 3, Disp. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. Venezia 1859 1861.

Philosophical transactions of the royal society of London for the year 1860. Vol. 150, P. 1. 2. London 1861.

Proceedings of the royal society of London. Vol. X, No. 39—41, mit Index und Titel zu Vol. X. London 1860. Vol. XI, No. 42—44.

The royal society (List of members) 30th Nov. 1860.

Memoirs of the royal astronomical society of London. Vol. XXIX. London 1861.

Notices of the proceedings at the meetings of the members of the royal institution of Great-Britain. Part XI, 1860—61. London 1861.

The royal institution of Great-Britain 1861. A list of members ... for 1860. London 1861.

Memoirs of the royal astronomical society of London. Vol. XXIX. London 1861.

Transactions of the royal society of Edinburgh. Vol. XXII. P. 2. 1859—1860.

Proceedings of the royal society of Edinburgh. Vol. IV. No. 50. 1859—1860.

The transactions of the royal Irish academy. Vol. XXIV, P. 1. Science. Dublin 1860.

The Journal of the royal Dublin society. No. 18 & 19. July & Oct. 1860. Dublin 1860.

Journal of the geological society of Dublin. Vol. VIII, P. 3. Dublin 1857—1860.

Comptes rendus des séances et mémoires de la société de biologie. T. V, sér. 2. Année 1857. Paris 1858. T. I, sér. 3. Année 1859. Paris 1860.

Mémoires de la société impér. des sciences naturelles de Cherbourg. T. V. 1857. Cherbourg 1858. T. VII. 1859. Cherbourg 1860.

Annales des sciences physiques et naturelles &c. publiées par la société impériale d'agriculture &c. de Lyon. IIème Série, T. VII, 2ème partie. 1855. IIIème Série, T. IV. 1860.

Annuaire de l'institut des provinces, des sociétés savantes et congrès scientifiques. Sér. II. 3.e Vol. (13.e Vol. de la collection). Caen 1861.

Memorias de la Real Academia de Ciencias morales y politicas. T. I, Parte 1. Madrid 1861.

Discursos pronunciados en la Real Academia de Ciencias morales y politicas con motivo de la recepcion pública del Ilmo. Sr. D. Miguel Sanz y Lafuente. Madrid 1860.

Oversigt over det Kongl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aar. 1860. Kjöbenhavn 1861.

Det Kongelige Norske Videnskabernes-Selskabs Skrifter i det 19de Aarhundrede. 4d Binds 2det Hæfte. Throndhjem 1859.

Forhandlinger af det Videnskabs-Selskabet i Christiania, Aar. 1859. Christiania 1860.

Beretning om Bodsfængslets Virksomhed i Aaret 1859. Christiania 1860.

Det Kongelige Norske Frederiks Universitets Stiftelse, fremstillet i Anledning af dets Halvhundredaarsfest, af M. J. Monrad. Universitets-Program. Christiania 1861.

Digitized by Google

Solennia academica universitatis literariae regiae Fredericianae ante L annos conditae d. II Sept. a. 1861 celebranda indicit Senatus academicus. Christianiae 1861.
Cantate ved det Norske Universitets Halvhundredaarsfest d. 2den Sept. 1861. Text af J. S. Welhaven, Musik af C. Arnold.
Det Kongelige Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1859. Christiania 1861.
Index scholarum in universitate regia Fredericiana. Christianiae 1860. 1861.
Om Cirklers Berøring af C. M. Guldberg. Universitets-Program. Christiania 1861.
Om Kometbanernes indbyrdes beliggenhed. Af H. Mohn. Universitets-Program. Christiania 1861.
Om Siphonodentalium vitreum. Af Dr. Michael Sars. Universitets-Program. Christiania 1861.
Acta societatis scientiarum Fennicae. T. VI. Helsingforsiae 1861.
Palaeontologie Südrusslands u. s. w. von Alexander v. Nordmann (vorgetragen in der Finnischen Soc. d. Wiss.). Heft III mit Tafel XIII—XXVIII. Helsingfors 1859.
Bidrag till Kännedom om Finlands Natur och Folk, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. Haeftet 1—4. Helsingfors 1858—1861.
Bidrag till Finlands Naturkännedom, Etnografi och Statistik u. s. w. Häftet 3. 5—7. Helsingfors 1859—1861.
Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. III, 1. Stockholm 1859.
Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 17. Årg. 1860. Stockholm 1861.
Nova acta reg. societ. scient. Upsaliensis. Ser. III. Vol. III. Upsaliae 1861.
Kongl. Svenska Fregatten Eugeniens Resa omkring jorden 1851—1853. Botanik II. Zoologi V. Stockholm 1861.
Voyage autour du monde sur la fregatte Suédoise L'Eugénie &c. par l'Académie royale des sciences à Stockholm. Physique II. Stockholm 1861.
Årsskrift utgifven af Kon. Vetenskaps-Societeten i Upsala. 2. Årg. Upsala 1861.
Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Sér. VII, T. III, 2—12. St.-Pétersbourg 1860. 1861.
Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. T. II, 5—8. III, 1—8. IV, 1. 2.
Nouveaux mémoires de la société impér. des naturalistes de Moscou. T. XIII, 2. Moscou 1861.
Bulletin de la société impér. des naturalistes de Moscou. Année 1860, 2—4. Moscou 1861.
Compte-rendu de la commission impériale archéologique pour l'année 1859. Avec un Atlas. St.-Pétersbourg 1860.
Annals of the Lyceum of natural history of New York. New York 1860.
Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1860. p. 193—579. Register. 1861. p. 1—192.
Proceedings of the biological department of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1860. p. 1—8.
Proceedings of the American academy of arts and sciences. Boston. Vol. IV, p. 249 bis zu Ende. From May 1857—May 1860. — Vol. V. From 29 May 1860—14 May 1861.
Proceedings of the American association for the advancement of science. 14th meeting. 1860. Cambridge 1861.

Digitized by Google

The transactions of the academy of sciences of St. Louis. St. Louis 1860.
Jahresbericht (14.) der Ohio-Staats-Ackerbaubehörde u. s. w. für das J. 1859. Columbus Ohio 1860.
Report of the commissioner of patents for the year 1859. Arts and manufactures. Vol. I. II. Washington 1860.
Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XII. Washington 1860.
Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution. Washington 1860.

Schriften für das magnetische Observatorium.

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von K. Kreil. Bd. VII. Jahrg. 1855. Herausg. durch die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien 1860.
Appendix to the Makerstoun magnetical and meteorological observations, being a supplement to vol. XXII of the Transactions of the royal society of Edinburgh. Reduced and edited by Balfour Stewart. Edinburgh 1860.
A. T. Kupffer, Annales de l'observatoire physique central de Russie. Année 1858. No. 1. 2. St. Pétersbourg 1861.
—— Compte rendu annuel 1859. 1860. St. Pétersbourg 1861.

Einzelne Werke.

Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde, in den Jahren 1857, 1858, 1859, unter den Befehlen des Commodore B. von Wüllerstorf-Urbair. Beschreibender Theil. Bd. I. II. Wien 1861.
Collection de chroniques belges inédites publiées par ordre du gouvernement. Chronique des ducs de Brabant par Edmond de Dynter, publiée par P. F. X. de Ram. T. I. P. 1. Bruxelles 1854—1860.
Jac. van Maerlant, Alexanders Geesten, voor de eerste maal uitgegeven door Snaellert. Deel I. Brussel 1860.
Glossarium of Maerlants Rymbybel u. s. w. door J. David. Brussel 1861.
Chronica regum Manniae et insularum &c. edited by P. A. Munch. Christiania 1860.
Karlamagnus Saga ok kappa hans &c. udgivet af C. R. Unger. II. Christiania 1860.
Quetelet, Sur le congrès international de statistique tenu à Londres le 16 juillet 1860. (Sonderabzug.)
Aug. le Jolis, Examen des espèces confondues de Laminaria digitata. 2e édit. Cherbourg 1855. — Quelques remarques sur la nomenclature générique des algues. Cherbourg 1856.
Neues schweizerisches Museum. Zeitschrift für die humanistischen Studien und das Gymnasialwesen in der Schweiz. Jahrgang I. Doppelheft 1. 2. (Jan.—April.) Bern 1861.
König Ernst August, von C. E. von Malortie. Hannover 1861.
P. A. Hansen, Ueber das neue Repsold'sche Aequatoreal der Sternwarte zu Gotha. Wilna 1861.
Bericht über die Thätigkeit des kaufmännischen Vereins zu Leipzig 1860/61. Leipzig 1861.

Digitized by Google

L. Cremona, Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Bologna 1861.
— Prolusione ad un corso di geometria superiore. Estratto dal Politecnico, fasc. I. Gennajo 1861. Milano 1861.
Sulle forme cristalline di alcuni sali derivati dall' ammoniaca, per Quintino Sella, membro della reale academia delle scienze. Torino 1861.
Copia estratta dal primo dei dodeci volumi della politica del Comm^{e}. Pres^{e}. Salv. Fenicia. Napoli 1861.
L'Oracolo d'Esculapio d'Epidauro sulla lebbra d'Italia scritto nel 1845 dal Presid^{e}. Commend^{e}. Salv. Fenicia. Napoli 1861.
Précis du Muséum d'histoire naturelle et d'anatomie comparée, du prof. Th. G. Van Lidth de Jeude à Utrecht. Utrecht, Juillet 1860.
Cicero pro Roscio Amerino. Antwoord of het Rapport in de Koninkl. Acad. &c. van S. Karsten. Utrecht 1861.
Dr. Rob. Caspary, de abietinearum carr. floris feminei structura morphologica dissertatio &. Regiomonti 1861.
Programm zu den mit den Schülern der Königl. polytechnischen Schule und der Königl. Baugewerkenschule in Dresden zu haltenden Prüfungen 1860/61.
M. Hoek, Recherches astronomiques de l'observatoire d'Utrecht. Livr. I. La Haye 1861.
Simon Newcomb, On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids, from the Memoirs of the American Academy, Vol. V. 1860. Cambridge 1860.
J. D. Graham, Lunar Tidal Wave in Lake Michigan. — Lunar Tidal Wave in the North American Lakes. Cambridge 1861.
M. J. Monrad, De vi logicae rationis etc. Christianiae 1860.
M. Sars og Th. Kjerulf, Iagttagelser over den Postpliocene eller glaciale Formation &c.
Die Landtafel des Markgrafenthums Mähren. Liefg. XIX—XXI. Brünn 1861.
Die Vegetationsverhältnisse des Bayerischen Waldes u. s. w. von O. Sendtner, vollendet von W. Gümbel und L. Radlkofer. München 1860.
Vom Pflanzen, Ziehen und Erhalten der Obstbäume. Von Dr. Back. Zwickau 1861.
Ueber Fortbildung-Schulen im Herzogthume Sachsen-Altenburg. Von Dr. Back. (Altenburg 1861.)
Der Schlaf der Pflanze. Von Dr. Back. (Altenburg 1861.)
Steinmetz-Zeichen, gesammelt von Dr. Back. 2 Bogen Lithogr., mit einem Viertelbogen Druck: Von Steinmetz-Zeichen. (Altenburg 1861.)
Die geschichtlichen und alterthümlichen Beziehungen Altenburgs. Von Dr. E. Hase. Altenburg 1861.
Second report of a geological reconnoissance of the southern and middle countries of Arkansas, made during the years 1859 and 1860. Philadelphia 1860.
Annual report of brevet Lieut. Col. J. D. Graham, major of U. S. topographical engineers. Washington 1860.
Statistical report on the sickness and mortality in the army of the U. S. &c. by Richard H. Coolidge. Washington 1860.
Norton's literary letter: the bibliography of state of Maine, 1859; the bibliography of Vermont. Washington 1860.
Report on the history and progress of the American coast survey. Washington 1858.

Digitized by Google

Lectures on the construction of roads and bridges &c. by Fairman Rogers. Washington 1861.

Systematic Catalogue with Synonyma of jurassic, cretaceous and tertiary fossils, by F. B. Merk and F. V. Hayden. (Sonderabdruck aus Proceedings of the Academy of natural sciences.)

First report of Philip T. Tyson, State Agricultural Chemist, to the house of delegates of Maryland, Jan. 1860 Annapolis 1860.

Observations on the discovery in various localities of the remains of the human art mixed with the bones of extinct races of animals, by Ch. Babbage Esq. (Sonderabdruck aus den Proceedings of the royal society, May 26, 1859. London.)

Sketch of the geology of the country about the headwaters of the rivers by Dr. F. V. Hayden. (Sonderabdruck aus the American Journal of sciences and arts. Vol. 31. March 1861.)

Explanations and sailing directions to accompany the wind and current charts, by M. F. Maury. 8. edition enlarged and improved. Vol. I. II. Washington 1858.

D. D. Owen, Second report of the geological survey in Kentucky. Vol II. Frankfort Kentucky 1857. — Third report &c. Vol. III — Maps and illustrations referred to in Vol. II & III of the report. 1857.

Tidal observations in the arctic seas by E. K. Kane, reduced and discussed by Ch. Schott. Washington.

Digitized by Google

XI

INHALT.

W. Hankel, Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte . . S. 1
Derselbe, Notiz über phosphorisches Leuchten des Fleisches . . . 5
Feddersen, Die oscillatorische elektrische Entladung und ihre Grenze. Vorgelegt von Hankel 13
M. W. Drobisch, Neue Ableitung der Grundformeln von Fechner's Psychophysik 20
G. Th. Fechner, Ueber den seitlichen Fenster- und Kerzenversuch . 27
Derselbe, über die Correctionen bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen, der Bestimmung der Schwankungen meteorologischer Einzelwerthe um ihren Mittelwerth, und der psychophysischen Maassbestimmungen nach der Methode der mittleren Fehler 57
Feddersen, über eine eigenthümliche Stromtheilung bei Entladung der Leidner Batterie. Vorgelegt von Hankel 114
O. Schlömilch, Ueber eine Transformation unendlicher Reihen . . 120

Digitized by Google

SEP 27 1907
4066

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1861.

13

I. II.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1862.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG AM 16. FEBRUAR 1861.

W. Hankel, *Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte.*

Die Erklärung der Entstehung eines galvanischen Stromes setzt eine genaue Kenntniss der sogenannten elektromotorischen Kräfte oder der durch die Berührung heterogener Leiter hervorgerufenen elektrischen Spannungen voraus. Leider fehlen aber bis jetzt ausgedehntere Untersuchungen, aus denen sich die betreffenden Zahlenwerthe mit Sicherheit entnehmen liessen. Um diesen Mangel abzustellen, habe ich mich seit mehreren Jahren mit der Messung jener Spannungen beschäftigt, und die Versuche nicht bloss auf die Berührung der festen Leiter untereinander, sondern auch auf das Verhalten der flüssigen Leiter gegen feste ausgedehnt.

Ich erlaube mir, der Königl. Gesellschaft heute einen Theil der hiebei gewonnenen Résultate, nämlich die Werthe der bei Berührung fester Leiter untereinander entstehenden Spannungen vorzulegen, indem ich mir vorbehalte, die auf das Verhalten der Flüssigkeiten bezüglichen Beobachtungen baldigst folgen zu lassen. Da jedoch die Zeit ein näheres Eingehen auf Einzelnes nicht gestattet, so begnüge ich mich hier mit einer Angabe des Inhaltes der Abhandlung im Allgemeinen.

Die vorliegende Abhandlung (die fünfte in der Reihe meiner elektrischen Untersuchungen) beginnt mit der Erläuterung des von mir zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte sowohl zwischen festen als auch zwischen flüssigen Leitern angewandten Verfahrens. Zur Messung des gegenseitigen Verhaltens der festen Leiter bei Ausschluss aller Flüssigkeiten vermag nur eine Condensatorvorrichtung zu führen, die sich auch ohne wesentliche Schwierigkeit so herstellen lässt, dass die Beobachtungen jede gewünschte Sicherheit und Genauigkeit erhalten. Der

Digitized by Google

von mir construirte Apparat bestand zunächst aus einer auf beiden Seiten ebengeschliffenen kreisförmigen Kupferplatte von 95mm Durchmesser, die isolirt an drei Drähten hing und mittelst derselben ohne seitliches Schwanken vertical auf- und niederbewegt werden konnte. Gerade unter ihr war feststehend eine zweite Kupferplatte von gleicher Grösse und Beschaffenheit angebracht, die je nach den Umständen mit der Erde leitend verbunden oder isolirt werden konnte; auf diese zweite Kupferplatte wurden die gleichfalls ebengeschliffenen Platten von 95mm Durchmesser gelegt, deren elektrisches Verhalten oder deren Ort in der sogenannten Spannungsreihe bestimmt werden sollte. Beide Platten, die obere an den Drähten hängende und die unterhalb derselben hingelegte, wurden mittelst empfindlicher Wasserwagen horizontal gestellt, wozu die oberen Befestigungspunkte der drei Drähte sowie der Träger der unteren Platte die geeigneten Vorrichtungen darboten; das Auf- und Abbewegen der oberen Platte störte ihre einmal hergestellte Horizontalität nicht. Durch eine besondere Einrichtung war es möglich die obere Platte der unteren auf jeden beliebig kleinen Abstand, dessen Grösse durch ein seitwärts stehendes Mikroskop mit Ocularmikrometer gemessen werden konnte, zu nähern und in demselben festzuhalten. Sollten die infolge der Berührung von Flüssigkeiten mit Metallen erregten elektrischen Spannungen ermittelt werden, so ward an die Stelle der unteren Metallplatte die kreisförmige Oberfläche einer Flüssigkeit von gleichem Durchmesser mit den Platten gebracht. Die obere an den Drähten hängende Kupferplatte stand durch einen sehr feinen spiralförmig gewundenen Platindraht, der aber ihre Auf- und Abbewegung durchaus nicht behinderte, mit einem Messapparate für freie Elektricität in continuirlicher Verbindung.

Als solcher Messapparat diente das von mir construirte und bereits vor vielen Jahren beschriebene*) Elektrometer; dasselbe besteht im Allgemeinen aus einem Goldblättchen, das zwischen zwei isolirten und durch Mikrometerschrauben verstellbaren Messingscheiben hängt, denen von den Polen einer in ihrer Mitte zur Erde geleiteten und aus ungefähr 60 kleinen Elementen (Zink, Kupfer, Wasser) bestehenden Volta'schen Säule entgegengesetzte

*) Berichte der Gesellschaft für 1850, S. 71; Pogg. Ann. Bd. 84 S. 28; Abhandlungen der Gesellschaft Bd. V. S. 393.

Digitized by Google

elektrische Spannungen ertheilt werden. Der Ausschlag, welchen das Goldblättchen zeigt, sobald ihm Elektricität mitgetheilt wird, kann durch ein mit Ocularmikrometer versehenes Mikroskop gemessen werden. Ein in die Verbindung der Säulenpole mit den Scheiben eingeschalteter Commutator macht es möglich, die Polarität in den Scheiben zu verwechseln; beim Umlegen desselben gibt das Goldblättchen den doppelten Ausschlag; durch wiederholtes Umlegen lässt sich dieser Ausschlag beliebig oft beobachten und die Messung zugleich von einer möglicherweise eingetretenen Aenderung in der ursprünglichen Lage des Goldblättchens befreien. Es hat mir zweckmässig geschienen, der vorliegenden Abhandlung einige Bemerkungen über die Justirung und Behandlung dieses Instrumentes beizufügen.

Das Verfahren zur Bestimmung des Ortes der verschiedenen Metalle in der Spannungsreihe bestand nun darin, dass ich alle Metallplatten mit der oberen an den Drähten hängenden Kupferplatte verglich; sämmtliche Metallplatten wurden nämlich der Reihe nach auf die untere Kupferplatte gelegt, die obere Kupferplatte ihnen bis zu einem bestimmten Abstande (gewöhnlich $0,94^{mm}$) genähert, dann sowohl die obere als auch die untere Platte zur Erde abgeleitet, darauf die obere wieder isolirt und schliesslich bis auf 330^{mm} von der unteren entfernt. Die in der oberen Platte condensirt gewesene Elektricität verbreitete sich über die Platinspirale und das Goldblättchen des Elektrometers, an welchem die Spannung der mitgetheilten Elektricität in zuvor angedeuteter Weise gemessen werden konnte. Ich zeige in der Abhandlung, dass eine einzige solche Messung, wobei z. B. die untere Platte aus Zink und die obere aus Kupfer besteht, nicht als ein Maass für die Grösse des Unterschiedes zwischen Zink und Kupfer in elektrischer Beziehung betrachtet werden darf; dass wir dagegen bei sonst unveränderten Umständen vergleichbare Werthe für diese elektrischen Unterschiede erhalten, wenn wir die Differenzen je zweier Ausschläge nehmen, welche die Metalle, wenn sie der Reihe nach auf die untere Platte gelegt werden, bei dem zuvor beschriebenen Verfahren hervorrufen.

Die Spannungsverhältnisse sind je nach dem Zustande der Reinheit der Oberfläche sehr verschieden; ich habe deshalb dieselben sowohl für möglichst reine als auch für mehr oder weniger durch längeres Liegen an der Luft veränderte Oberflächen

gemessen. Es hält sehr schwer, völlig reine Flächen zu erhalten; ich glaube, dass es mir durch Scheuern mit Schmirgelpapier von verschiedenen Feinheiten und kräftiges Abreiben mittelst eines leinenen Tuches gelungen ist, solche Flächen darzustellen; Flüssigkeiten sind beim Putzen unbedingt zu vermeiden.

Mit Uebergehen aller Einzelheiten der Messungen will ich nur noch zwei Tabellen mittheilen.

Die erste enthält die Spannungen, welche die in derselben genannten Metalle bei reinem Oberflächenzustande zeigen. Ich werde die beiden Metalle, deren Berührung die betreffende Spannung erzeugt, durch Nebeneinanderstellen ihrer chemischen Zeichen andeuten, und dabei stets dasjenige Metall, welches durch die Berührung mit dem andern Metalle positiv elektrisch wird, voranstellen. Dabei wird es aus praktischen Rücksichten am zweckmässigsten sein, die Spannung zwischen Zink und Kupfer, also Zn Cu = 1,00 zu setzen, und alle übrigen Spannungen in dieser Einheit auszudrücken.

Al Zn	= 0,25	Zn Cu
Zn Sn	= 0,23	,,
Zn Cd	= 0,24	,,
Zn Pb	= 0,44	,,
Zn Sb	= 0,69	,,
Zn Bi	= 0,72	,,
Zn Hg	= 0,81	,,
Zn Fe	= 0,84	,,
Zn Cu	= 1,00	,,
Zn Au	= 1,00	,,
Zn Pd	= 1,15	,,
Zn Ag	= 1,18	,,
Zn C	= 1,22	,,
Zn Pt	= 1,23	,,

Die meisten Metalle wurden möglichst rein aus dem Handel genommen; das Silber war vollkommen chemisch rein, das Antimon durch Schmelzen mit Salpeter gereinigt. Die Goldplatte bebestand aus einer galvanisch vergoldeten Kupferplatte, die Kohlenplatte (C) aus einem Stück Gascoke.

Aus den vorstehenden Werthen lässt sich unmittelbar eine sogenannte Spannungsreihe aufstellen; ich werde in derselben das Intervall zwischen Zink und Kupfer = 100 setzen, jedoch um negative Vorzeichen zu vermeiden, den Ort des Zinks durch

Digitized by Google

200, und folglich den des Kupfers durch 100 bezeichnen. Ausser der Stellung, welche die blanken Metalle einnehmen, füge ich dieser zweiten Tabelle auch noch die Stellung dieser Metalle nach kürzerem oder längerem Liegen an der Luft, sowie die Werthe für einige Legirungen bei.

Name des Metalles.	Ort in der Spannungsreihe				Betrag der grössten beobachteten Veränderung.
	unmittelbar nach dem Putzen	1 bis 2 Tage nach dem Putzen	4 bis 7 Tage nach dem Putzen	länger als 2 Monate nach dem Putzen	
Aluminium .	225		165	140	85
Amalgam. Zink	200				
Zink . . .	200	188		157	43
Zinn . . .	177		164	152	25
Cadmium .	176		164	139	37
Blei . . .	156		135	151	21
Antimon . .	131		121	113	18
Wismuth. .	128	116	110	106	22
Neusilber .	125			105	20
Messing . .	122	110			
Quecksilber .	119	60			59
Eisen . . .	116		100	95	21
Stahl . . .	109			93	16
Gusseisen .	108			96	12
Kupfer . .	100		86		14
Gold . . .	100		81		19
Palladium .	85				
Silber . .	82		70	82	12
Coke . . .	78		78		
Platin. . .	77				

Die merkwürdige Ortsveränderung, welche Blei und Silber zeigen, indem sie beim Aussetzen an die Luft erst sinken und später wieder steigen, scheint ihren Grund darin zu haben, dass anfangs eine Oxydation, und später eine Schwefelung der Oberfläche eingetreten ist.

W. Hankel, *Notiz über phosphorisches Leuchten des Fleisches.*

Die bekannt gewordenen Fälle, wo ein phosphorisches Leuchten des Fleisches von Säugethieren beobachtet worden,

Digitized by Google

scheinen nicht sehr zahlreich zu sein. Einige wenige ältere Beobachtungen über diesen Gegenstand finden sich in dem Werke über die Phosphorescenz der Körper von Placidus Heinrich (III, S. 382) und in Gmelin's Chemie (Bd. I, S. 180) zusammengestellt; diesen ist noch die im Jahre 1853 von Heller in Wien gemachte Mittheilung über Würste, welche im Finstern ein sehr helles, über ihre ganze Oberfläche ausgedehntes grünes Licht verbreiteten, hinzuzufügen. (Heller, Archiv für phys. u. pathol. Chemie u. Mikroskopie, Jahrg. 1853. Heft 1; Fechner, Centralblatt 1853, S. 807.) Es dürfte daher die folgende Notiz nicht ganz ohne Interesse sein.

In der Mitte des Januar dieses Jahres war an einem Sonnabend von einem der grössten Fleischer Leipzigs gehacktes Rind- und Schweinefleisch gekauft worden. Die beiden Fleischarten, noch gesondert, aber, wenigstens das Schweinefleisch, mit Salz und Kümmel bereits vermengt, sollten am Sonntag zur Mahlzeit zubereitet werden. Als die Magd am Morgen die Schüssel mit dem Fleische aus der etwas dunklen Speisekammer herausnahm, fand sie den einen Theil des Fleisches leuchtend, worauf die Schüssel mit ihrem Inhalte mir übersandt wurde.

Eine sofort vorgenommene Untersuchung ergab nun, dass bloss das Schweinefleisch, nicht aber das Rindfleisch leuchtete, und durch mikroskopische Beobachtungen wurde festgestellt, dass weder Infusorien noch Kryptogamen an dem leuchtenden Fleische nachzuweisen waren. Das Fleisch erschien frisch und ohne fauligen Geruch; auch habe ich an diesem Tage keine Krystalle von phosphorsaurer Ammoniak-Talkerde wahrgenommen, die vielmehr erst am Montag Abend, nachdem das Fleisch am Sonntag mehrere Stunden lang in der warmen Stube gestanden hatte, sich zeigten.

Als nach Eintritt der Nacht die Untersuchung von Neuem begonnen wurde, hatte die Intensität des Leuchtens zugenommen, und schien während des Verbleibens in der warmen Stube im Laufe der nächsten Stunden noch beträchtlich zu wachsen. Das Licht war silberweiss, und sein Glanz so stark, dass man in dem sonst völlig dunkeln Raume die in der Nähe des Fleisches liegenden Gegenstände deutlich zu erkennen und mit der Spitze einer Pincette einzelne besonders durch ihre Helligkeit ausgezeichnete Punkte zu fassen vermochte.

Ward mit einem Messer ein Theil der leuchtenden Masse

Digitized by Google

hinweggenommen, so erschien die verletzte Stelle je nach den Umständen dunkel oder doch stets weniger leuchtend als die unverletzten Theile der Oberfläche; mit der Zeit verminderte sich der Unterschied und späterhin war die Stelle nicht mehr zu erkennen. Hiernach zeigten also vorzugsweise die an der Oberfläche in Berührung mit der Luft befindlichen Fleischmassen den leuchtenden Zustand.

Brachte man die stärkst leuchtenden Punkte mit der Pincette auf ein Stückchen Glas, so ergab die Untersuchung mit freiem Auge oder mittelst einer schwachen Loupe, dass das Leuchten nicht von Muskeltheilen, sondern von kleinen schmierig aussehenden Massen ausging. Unter dem Mikroskope konnte im finstern Zimmer selbst bis zu 400facher Vergrösserung das Leuchten deutlich wahrgenommen werden. Begann man mit sehr schwachen Vergrösserungen, die man nach und nach verstärkte, so löste sich die ursprünglich beim Betrachten mit blossen Augen oder einer nur schwachen Loupe als gleichförmig erscheinende leuchtende Substanz in einzelne stärker leuchtende, auch wohl durch dunkle Stellen getrennte Massen auf.

Die Beobachtungen unter dem Mikroskope im Finstern haben grosse Schwierigkeit, indem das Auge oft nicht gehörig accommodirt ist und die richtige Stellung oberhalb des Oculars nicht leicht findet. Am Besten stellt man das Object unter hinreichender Beleuchtung mittelst einer Lampe ein; und verkleinert und entfernt dann dieselbe, während das Auge seinen Ort über dem Oculare unverrückt zu behalten sucht. Durch geringes Verschieben des Objectes gelingt es meistens bald, die leuchtenden Theilchen ins Gesichtsfeld zu bringen. Sehr vortheilhaft ist bei diesen Versuchen das Gaslicht, dessen Helligkeit man allmählig so weit verringern kann, dass das übrigbleibende kleine blaue Flämmchen durch sein ausserordentlich schwaches Licht keinen störenden Einfluss mehr auszuüben vermag. Das Fortbrennen der Flamme, dem Spiegel des Mikroskops gegenüber, gewährt aber die Füglichkeit, in jedem Augenblicke wieder etwas mehr Licht zu geben, wenn das Auge die richtige Stellung über dem Oculare verloren haben sollte.

Aller sorgfältigen Beobachtung ungeachtet zeigte sich auch an diesem Abend kein eigenthümliches thierisches oder pflanzliches Gebilde, von dem das Leuchten hätte herrühren können. Heller leitet das Leuchten thierischer Substanzen von einem

Digitized by Google

Pilze her, den er mit dem Namen der Sarcina noctiluca bezeichnet. Da ich mir jedoch den betreffenden Jahrgang seines Archivs für physiologische und pathologische Chemie und Mikroskopie nicht zu verschaffen vermocht, und die Schlussergebnisse, zu denen er gelangt, nur aus Fechner's Centralblatt für 1853 S. 1012 kenne, so weiss ich nicht, welche Formen er diesem Pilze beilegt, da er in diesen Schlussergebnissen keine Beschreibung desselben gibt.

Deckte ich die leuchtende Fettmasse mit einem Deckglase zu, und drückte dasselbe fest auf, so zeigte sich die Masse unter dem Mikroskope nur noch am Rande, wo sie mit der Luft in Berührung stand, leuchtend; es schienen mir niemals besondere Theile zu sein, von denen das Leuchten ausging, sondern eben die schmierigfettige Masse in ihrer Berührung mit der Luft.

Als ein Theil der leuchtenden Masse in einem Glase mit destillirtem Wasser von der Temperatur des Zimmers übergossen wurde, erschien nach einer halben Stunde das Leuchten nicht merklich geändert. Selbstverständlich ist jedoch eine genaue Angabe unmöglich, indem sich eine scharfe Vergleichung auf so lange Zeit hin nicht ausführen lässt. Nach $^5/_4$ Stunden war bereits eine deutliche Abnahme in der Intensität des Lichtes eingetreten; nach $2^1/_2$ Stunden fand ich die Masse immer noch leuchtend, wenn auch beträchtlich schwächer. Das Wasser nahm von der leuchtenden Substanz Nichts auf, leuchtete selbst nicht.

Mit Olivenöl übergossen zeigte sich nach 10 Minuten keine merkliche Abnahme des Leuchtens, die auch nach $^1/_2$ Stunde noch nicht deutlich hervortrat. Nach $^3/_4$ Stunden dagegen war die Intensität offenbar etwas geringer; nach 2 Stunden fand ich das Fleisch immer noch ziemlich stark leuchtend; am nächsten Abend jedoch, bis wohin das Fleisch vom Oele bedeckt zwischen den Doppelfenstern des Zimmers gestanden hatte, war jede Spur eines Leuchtens verschwunden. Ebenso wie das Wasser nahm das Oel von der leuchtenden Substanz Nichts auf und leuchtete auch an seiner Oberfläche nicht.

Während Wasser und Oel die leuchtende Eigenschaft des Fleisches nur langsam vernichteten, geschah dies viel schneller durch Aether, Alkohol und Kalilösung.

Wurde ein Theil der leuchtenden Masse mit Aether übergossen, so begann das Leuchten sofort abzunehmen, war nach

Digitized by Google

einer halben Minute noch mässig stark, dagegen nach 3 bis 4 Minuten vollständig verschwunden.

Aehnlich verhielt sich das Fleisch gegen absoluten Alkohol.

In verdünnter Kalilösung verschwand das Leuchten sehr schnell; in concentrirter sofort bei der Berührung mit dieser Flüssigkeit.

Das Temperaturintervall, innerhalb dessen der Process des Leuchtens eintritt, ist beschränkt; während ihn mässige Wärme erhöht, wird er durch Kälte und höhere Temperaturen vernichtet.

Auf den Boden eines kleinen Trinkglases wurde ein Theil der leuchtenden Fleischmasse gebracht und dort seitlich mässig angedrückt, so dass das Glas umgestülpt und das Leuchten durch den Boden beobachtet werden konnte; das Glas wurde dann mit der Oeffnung nach unten auf einen Teller gestellt und mit Eis und Schnee umgeben, die aber nicht mit der Fleischmasse in Berührung kamen. Bereits nach 7 Minuten war das Leuchten kaum noch wahrnehmbar, wozu freilich auch das Beschlagen des Glases einen Theil beitragen mochte. Als die Herren Prof. E. H. Weber und Bacc. med. Kohlschütter das leuchtende Fleisch unmittelbar auf Schnee legten und daselbst längere Zeit liegen liessen, dauerte das Leuchten auf beiden Seiten und namentlich auch auf der Seite fort, die dem Schnee unmittelbar zugekehrt war. Unter Wasser und Oel, bei einer Temperatur von + 9° R., sahen sie das Leuchten fortdauern.

Wurde das Fleisch von dem kälteren Vorsaale, wo es am Tage gestanden, in die geheizte Stube gebracht, so erschien das Licht, wie schon bemerkt, nach und nach lebhafter. Dagegen reichte schon eine Temperatur, die wahrscheinlich noch nicht einmal 30° R. zu betragen braucht, hin, um das Leuchten aufhören zu lassen. Als ein etwas leuchtendes Fleisch enthaltendes kleines Becherglas in Wasser von 42° R. getaucht wurde, war alles Licht verschwunden, als ein mit seiner Kugel in das Fleisch eingedrücktes Thermometer 32° zeigte; man darf wohl annehmen, dass die Temperatur der Oberfläche des Fleisches noch geringer war. Bei einem spätern Versuche, wo ein dünnes Streifchen leuchtendes Fischfleisch an die Seitenwand eines Probirgläschens gelegt, und letzteres nach Verschluss mittelst eines Korkes unter warmes Wasser getaucht wurde, erlosch das Licht schon, wenn das Wasser kaum eine Temperatur von 30° R. besass, trat aber nach

Digitized by Google

dem Erkalten wieder ein. Herr Prof. E. H. Weber und Herr Baccalaureus E. Kohlschütter erhielten bei den von ihnen mit demselben Fleische gemeinschaftlich angestellten Versuchen dasselbe Resultat, als es 5 Minuten lang in einer von beiden übereinandergelegten Händen gebildeten Höhle gelegen hatte. Als ich das leuchtende Schweinefleisch mit Wasser von 32° R. unmittelbar übergoss, so verschwand das Leuchten in weniger als einer halben Secunde; mit Wasser von 45° übergossen, ward die Substanz augenblicklich dunkel. Die Herren Weber und Kohlschütter sahen Fleisch, dessen Licht durch Eintauchen in Wasser oder Oel von 29° R. fast augenblicklich erloschen war, an der Luft allmälich wieder leuchtend werden; indessen erreichte die Intensität des Lichts in einer halben Stunde nicht ganz den früheren Grad. Hatte dagegen das Fleisch durch Benetzen mit Alkohol seine leuchtende Eigenschaft verloren, so erhielt es dieselbe auch nach dem Abspühlen mit Wasser nicht wieder.

Durch das öftere und länger andauernde Aufbewahren des gehackten Schweinefleisches im warmen Zimmer trat sehr bald eine starke Fäulniss ein, die aber, wie auch sonst bekannt, den Lichtentwickelungsvorgang nicht verstärkte; derselbe nahm mit ihrem Eintreten ab. Noch nach acht Tagen, wo ich das Fleisch endlich der starken Fäulniss wegen fortwerfen musste, habe ich leuchtende Massen darin wahrgenommen.

Das neben dem leuchtenden Schweinefleische liegende gehackte magere Rindfleisch ward von dem ersteren nicht angesteckt, sondern blieb fortwährend dunkel.

Zur Fortsetzung der Untersuchung suchte ich mir einen leuchtenden Fisch zu verschaffen, den ich auch bald in einer Sendung frischer Dorsche auffand.

Wurde ein Stück leuchtendes Fischfleisch unter das Mikroskop gebracht, so erschien die ganze Masse leuchtend; es waren nicht blos einzelne leuchtende Partien, wie beim Schweinefleisch, wo dieselben wahrscheinlich auch nur durch die Vertheilung des Fettes beim Hacken getrennt worden waren. Legte man ein Stück Haut auf den Objectträger, so konnte man im eigenen Lichte desselben deutlich die kleinen dunkelbraunen strahligen Flecken erkennen. Beim ersten Anblick nahm es sich so aus, als ob das Fleisch in seiner ganzen Masse leuchtete; wie weit jedoch in Wirklichkeit der Lichtprocess ins Innere des Flei-

Digitized by Google

sches eingedrungen, dürfte bei dem starken Durchscheinen der Masse nicht leicht zu entscheiden sein.

Einzelne Punkte an der Hautfläche und besonders auf dem silberfarbenen Peritonäum der Bauchhöhle (ich hatte den Fisch der Länge nach gespalten) leuchteten vorzugsweise hell; unter das Mikroskop gebracht liess sich aber in der schleimigfettigen Masse nichts Eigenthümliches auffinden.

Ward ein Stück in seiner ganzen Ausdehnung leuchtendes Fischfleisch, das einen sehr stark leuchtenden Punkt enthielt, auf einem kleinen Uhrglase unter den kaum 1½ Cubikzoll haltenden Recipienten einer Luftpumpe gesetzt, so nahm beim Evacuiren die Lichtintensität ab, verschwand aber selbst bei Verdünnung bis auf 2 oder 3^{mm} Druck und nach längerer Dauer derselben nicht ganz, während Hulme (Gilb. Ann. Bd. 12. S. 308) unter ähnlichen Verhältnissen ein gänzliches Verlöschen beobachtet zu haben angibt. Namentlich wurde der stark leuchtende Punkt sehr geschwächt, so dass sein Ort auf der mattglimmenden Fläche wenig erkennbar war. Bei raschem Zutritte der Luft blitzte er plötzlich wieder auf, und auch die übrige Masse erhielt gleichzeitig ihre frühere Lichtstärke wieder.

Dagegen erlosch das Licht vollständig, wenn der Recipient zur Entfernung alles Sauerstoffs mehrere Male mit reiner Kohlensäure gefüllt und leergepumpt wurde; aber auch jetzt verschwand das Licht nicht sogleich beim Auspumpen, sondern erst nach einiger Zeit. Beim Zulassen von atmosphärischer Luft trat sofort der frühere Lichtglanz wieder auf.

Wurde aber unter einer Glasglocke neben einem Stücke leuchtenden Fleisches etwas Schwefel verbrannt, so war nach dem Klarwerden des Inhalts der Glocke jede Spur des Leuchtens vernichtet, und auch auf Zutritt von atmosphärischer Luft blieb Alles finster.

Die Versuche über das Verhalten des leuchtenden Fleisches in luftverdünntem Raume zeigten, dass keine grosse Sauerstoffmenge nöthig ist, um ein starkes Leuchten hervortreten zu lassen. Konnte ich also auch das Resultat voraussehen, so glaubte ich dennoch den Versuch ausführen und das Fleisch der directen Wirkung des Sauerstoffs aussetzen zu müssen, namentlich da Heller unter seinen Resultaten (Fechner's Centralblatt 1853. S. 1013) anführt, dass reiner Sauerstoff das Licht verstärke. Bei vergleichenden Versuchen mit zwei nahe gleichstark leuch-

Digitized by Google

tenden Fleischmassen, von denen die eine in der Luft liegen blieb, die andere aber unter eine Glocke gebracht wurde, in welche mittelst eines Aspirators reiner Sauerstoff gesogen werden konnte, zeigte sich in der Lichtintensität des unter der Glocke befindlichen Stückes auch nach reichlichem Zuflusse von Sauerstoff keine Zunahme. Man muss sich bei diesem Versuche sehr hüten, durch verschiedene Theile der Glocke zu blicken, weil diese möglicherweise das Licht ungleich schwächen.

Zur Beantwortung der Frage, ob nicht vielleicht ein ozonisirter Sauerstoff das Leuchten des Fleisches vermehren würde, leitete ich den Sauerstoff, bevor er in die Glocke trat, unter welcher das Fleisch lag, durch einen Ozonapparat. Derselbe bestand aus zwei ineinandergeschobenen Glasröhren, zwischen denen der Sauerstoff hindurchgeleitet wurde; die äussere Röhre war auf ihrer äussern, die innere auf ihrer inneren Fläche mit Stanniol belegt, und beide Belegungen standen mit den beiden Enden der Inductionsspirale eines sehr kräftigen Inductionsapparates in Verbindung, so dass das Gas stark ozonisirt ward. Aber auch jetzt zeigte sich das Leuchten des Fleisches nicht vermehrt.

Ein Versuch, mittelst des leuchtenden gehackten Schweinefleisches den Inhalt einer frischen Bratwurst in gleichen Zustand zu versetzen, hatte nicht den gewünschten Erfolg. Dagegen gelang es, ein einige Millimeter dickes Stück Schweineflaum (Fett aus dem Gekröse), das 2 bis 3 Stunden in schwachem Salzwasser gelegen hatte, durch Aufstreichen der leuchtenden Fischmasse ebenfalls zum starken Leuchten zu bringen, während andere umliegende, ganz ähnlich behandelte Stücke den Zustand nicht annahmen. Das leuchtende Fettstück sah im Dunkeln porcellanartig durchscheinend aus; das Leuchten schien ebenso wie beim Fischfleische sich auch in eine gewisse Tiefe der Masse zu erstrecken.

Die vorstehenden Versuche griffen infolge des häufigen, meist plötzlichen Wechsels von fast absoluter Dunkelheit und sehr hellem Lichte die Augen stark an; ich habe mich dadurch genöthigt gesehen, die Untersuchung einstweilen zu unterbrechen, beabsichtige jedoch, dieselbe sobald als möglich wieder aufzunehmen.

Digitized by Google

Feddersen, *die oscillatorische elektrische Entladung und ihre Grenze.* Vorgelegt von Hankel.

In der Mittheilung, welche ich am 13. Aug. 1859 der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu machen die Ehre hatte, konnte ich die Gesetze angeben, nach welchen sich die Dauer der elektrischen Oscillationen ändert; allein ich war nicht im Stande unter verschiedenen Umständen die Grenze genau zu bestimmen, bei welcher die oscillatorische Entladung in die continuirliche übergeht. Ich habe mittlerweile verschiedene Wege versucht, um in diesem Punkte genauere Resultate zu erzielen.

Folgendes Verfahren scheint die besten Resultate zu liefern. Man schaltet als Schliessungsdraht einen Leiter von geringem Widerstande aber von grosser Länge ein. Nach meiner vorigen Mittheilung ist es nämlich bekannt, dass die Oscillationsdauer mit der absoluten Länge des Leiters zunimmt. Nachdem ich auf dem Boden des Augusteums, der mir von der Universität gütigst zur Verfügung gestellt war, eine Drahtlänge von über 1300 Meter Kupferdraht von ungefähr ½ Linie Dicke aufgespannt habe, verlangsame ich bei Anwendung dieses Schliessungsdrahtes die Oscillationsdauer dergestalt, dass man, schon bei nur 20 bis 30 Rotationen des Spiegels in der Sekunde, die Oscillationen auf der matten Glasplatte, welche das vom Spiegel reflektirte Funkenbild auffängt, vortrefflich mit dem Auge unterscheiden kann. Hat man keinen weiteren Widerstand in die Leitung eingeschaltet, so sind die Oscillationen sehr zahlreich, vielleicht oft mehr als 20. Allein bringt man mit verdünnter Schwefelsäure gefüllte Röhren in die Leitung, so wird mit wachsendem Widerstande die Zahl der Oscillationen immer geringer und schliesslich kommt man zu dem Punkte, wo nur eine einzige Oscillation übrig bleibt, die nun ihrerseits continuirliche Entladung genannt werden kann und mit wachsendem Widerstande an Ausdehnung stetig zunimmt.

Digitized by Google

Die direkten Beobachtungen des momentanen Funkenbildes können im Wesentlichen nur qualitativer Art sein; aber dadurch, dass die zu messende Grösse (der »Grenzwiderstand«) eine Qualitätsänderung in der Erscheinung bewirkt, ist durch die Beobachtungen eine quantitative Bestimmung möglich. Wann 3, wann 2, wann nur 1 Oscillation im Funken auftreten, lässt sich sehr deutlich erkennen, sobald das Funkenbild bei richtiger Akkommodation auf die Stelle des deutlichen Sehens der Netzhaut fällt.

Als erstes Gesetz habe ich gefunden, dass unter sonst gleichen Bedingungen die von mir angewendete Schlagweite keinen merklichen Einfluss äussert auf die Widerstandsgrenze, bei welcher die oscillatorische Entladung in die continuirliche übergeht. Bei den Versuchen mit einer Ladungshöhe von $1\frac{1}{2}^{mm}$ und von 6^{mm} Schlagweite bedurfte es desselben Widerstandes, um die letzte Oscillation allein zur Erscheinung zu bringen.

Bei Anwendung einer verschiedenen Flaschenzahl habe ich für die Grenze der oscillatorischen Entladung folgende Widerstände, angegeben in millimeterdicken Fäden verdünnter Schwefelsäure vom spec. Gew. 1,25, gefunden:

Flaschenzahl	Widerstand beob.	Widerstand ber.	Diff.
16	0^M,014	0,014	0,000
8	0 ,018	0,020	+ 0,002
4	0 ,025	0,028	+ 0,003
2	0 ,041	0,040	— 0,001
1	0 ,058	0,056	— 0,002

Man sieht aus den beobachteten Werthen, dass mit zunehmender elektrischer Oberfläche der Widerstand, welcher die Grenze bildet, abnimmt. Das Gesetz der Abnahme folgt ebenfalls aus vorstehenden Beobachtungen, denn berechnet man die Widerstände nach der Formel

$$w = a\frac{1}{\sqrt{s}}$$

wo w der Widerstand, s die elektrische Oberfläche und a eine Constante ist, so erhält man nahe mit den beobachteten übereinstimmende Werthe, so nahe, als die Art des Experimentes es überhaupt erwarten lässt.

Digitized by Google

Man sieht also, dass schon bei einer elektrischen Oberfläche von nur mässiger Grösse der Widerstand sehr bedeutend sein muss, um die oscillatorische Entladung zu unterdrücken. So beträgt er z. B. $0^M,041$ verdünnter Schwefelsäure entsprechend 28600^M Kupferdraht von 1^{mm} Dicke für 2 Flaschen von zusammen 4,4□Fuss innerer Belegung.

Hätte ich die lange Leitung ausgeschaltet und die beiden Belegungen durch einen kurzen Leiter*) geschlossen, so würde der Grenzwiderstand freilich geringer ausgefallen sein. Frühere Beobachtungen**) über die kleinste Länge des Schweifes hatten nämlich für das eben erwähnte Beispiel den Widerstand $0^M,009$ verdünnte Schwefelsäure oder ca. 6000^M Kupferdraht von 1^{mm} Dicke ergeben. Wenn diese Zahl auch wegen der Schwierigkeit der damaligen Beobachtung auf keine grosse Genauigkeit Anspruch macht, so darf man doch den sichern Schluss daraus ziehen, dass jene Grenze des Widerstandes für die oscillatorische Entladung mit wachsender Leiterlänge weiter hinausrückt.***)

Da der Widerstand von 6000^M bis 28600^M Kupferdraht ein recht bedeutender zu nennen ist, darf man wohl behaupten, dass fast alle Experimente älterer und neuerer Zeit, welche an einer Leidener Flasche mit einem vollen metallischen Schliessungsbogen angestellt worden sind, es mit der oscillatorischen Entladung zu thun gehabt haben. Es erklären sich hierdurch manche bisher wenig berücksichtigte Beobachtungen älterer Forscher, von denen ich auf einige aufmerksam machen möchte, und zugleich untersuchen, ob sich da vielleicht eine andere Methode zur Bestimmung des Grenzwiderstandes auffinden lässt.

Zuerst erinnere ich an zahlreiche, aber wie es scheint wenig bekannte Versuche von Bohnenberger. Dieser so ausgezeichnete Beobachter beschreibt in seinen »Beiträgen zur Elektricitätslehre« Stck. III. eigenthümliche Erscheinungen beim Durchschlagen eines Entladungsfunkens durch eine Lage Papier, in deren Mitte sich ein Stanniolblatt befindet. Unter diesen Um-

---

*) Um einer richtigen Anschauung von den Vorgängen bei einer elektrischen Entladung zu folgen, muss man sich vor Allem davor hüten, dass man nicht etwa einen langen und einen kurzen Leiter von demselben Widerstande in der Wirkung gleichsetzt.

**) Vergl. Ber. d. Königl. sächs. Ges. d. W. Bd. 11. S. 171.

***) Verschiedenheiten des Rückstandes kommen nicht in Betracht.

Digitized by Google

ständen findet er nämlich, dass der Funke von jedem Pole bis zum Stanniol in immer zahlreicheren und kleineren Löchern die einzelnen Blätter durchbricht, und dass einige dieser Löcher oder, wenn sie sich durch mehrere Blätter fortsetzen, ganze Reihen von Löchern ihren Wulst nach der positiven, andere nach der negativen Seite der Flasche gekehrt haben. Da wo ein Loch sich nicht weiter fortsetzt, also die Elektricität zwischen den Blättern für eine kleine Strecke einen Seitenweg eingeschlagen zu haben scheint, ist stets ein Eindruck wie mit einem stumpfen Pfriem in die nächsten Blätter gemacht. Die grossen Centrallöcher in unmittelbarer Nähe der Pole zeigen dagegen an einer Stelle ihrer Peripherie eine Umbiegung nach der positiven, an einer andern nach der negativen Seite. Neben der ausführlichen Beschreibung giebt Bohnenberger zahlreiche Abbildungen der durchgeschlagenen Löcher, so dass man an der Richtigkeit seiner Beobachtungen wohl nicht zweifeln darf. Wie aus der Theorie der elektrischen Oscillationen für die Beobachtungen eine ungezwungene Erklärung abgeleitet werden könnte, brauche ich wohl nicht weiter auszuführen.

Hierdurch veranlasst untersuchte ich, ob nicht jener Grenzwiderstand vielleicht dadurch zu bestimmen sei, dass man ein Blatt Papier bei verschiedenen Widerständen der Leitung vom Funken durchbohren lässt. Es war ja möglich, dass man bei jenem gesuchten Widerstande, wo die continuirliche Entladung Platz greift, eine Ausbiegung des Lochrandes nach einer bestimmten Seite wahrnehmen würde, allein die Versuche gaben ein negatives Resultat. Die continuirliche Entladung zeigte bei einem dünnen Blatt Papier das Loch rein ausgeschlagen, ohne sichere Andeutung einer bestimmten Richtung des Stosses. Bei einem Stück Pappe war dagegen, jedenfalls durch die seitliche Wirkung der Explosion innerhalb der Masse, der Rand auf beiden Seiten nach aussen aufgeworfen.

Eine andere merkwürdige Erscheinung zeigen die Priestley'schen Ringe und Flecke. Wie bekannt treten sie an den gegenüberliegenden Punkten zweier durch die Luft getrennter Leiter auf, zwischen welchen die Elektricität bei einer Flaschenentladung überspringt.

Im Allgemeinen findet man auf jeder Fläche eine oder mehrere Stellen, wo die Oberfläche wie zerschmolzen erscheint, oder als wenn von derselben Theile herausgerissen sind, wäh-

Digitized by Google

rend sich in der Umgebung eine reiche Oxydschicht abgelagert hat. Die letztere bildet unter Umständen ein System von Ringen, in deren Mitte die Grübchen als ein Centralfleck erscheinen. Versuche, welche ich anstellte, indem ich den Entladungsschlag zwischen blank polirten Messingkugeln stattfinden liess, gaben folgende Resultate.

Beschränkt man die Zahl der Oscillationen auf eine einzige, so zeigt sich, dass am positiven Pol ein sehr kleines Grübchen, eingefasst von einem feinen aber dunklen Oxydringe, entsteht, während auf der negativen Kugel eine dünne ausgebreitete Wolke von Oxyd sich bildet, je nach der Menge der angewendeten Elektricität, bald mehr, bald weniger erkennbar.*) Hat man die zweite Oscillation mit auftretend, so lässt sich auf dem negativen Pol ausser der Wolke auch noch eine Spur von einem feinen Ringe und einem zerschmolzenen Centrum erkennen, während man auf dem positiven Pole eine schwache, kaum sichtbare Wolke von Oxyd zu dem sich bildenden Ringe hinzutreten sieht, ähnlich wie sie bei der continuirlichen Entladung dem negativen Pole allein entsprach. Indem man durch Verringerung des Widerstandes eine grössere Anzahl von Oscillationen bei der Entladung auftreten lässt, kann man die Grübchen und Wolken auf jeder Polkugel vermehren. Leider decken sie sich zum grossen Theil, die eine Oscillation reisst theilweise das von der vorhergehenden gebildete Oxyd herunter, wodurch eine weitere Unterscheidung unmöglich wird; sonst würden die Priestley'schen Ringe ein vortreffliches Mittel abgeben, um die Zahl der Oscillationen zu bestimmen. Wenn man keinen Spiegelapparat zur Verfügung hat, so halte ich die Priestley'schen Flecke immer noch für das beste Mittel,**) den Uebergangspunkt der oscillatorischen Entladung in die continuirliche annähernd zu finden. Ausgedehntere Versuche mit Polkörpern verschiedener Form und

---

*) Die Ausbreitung des Stromes von der positiven zur negativen Seite bietet nichts Ueberraschendes. Aus den elektrischen Lichterscheinungen ist Derartiges längst bekannt, ich brauche nur an die baumförmige Ausbreitung des einfachen Conduktorfunkens zu erinnern.

**) Die kürzlich von Dr. Paalzow in den Berl. Monatsber. v. 9. Aug. 1860 veröffentlichte Methode zur Nachweisung der elektrischen Oscillationen dürfte sich vielleicht auch zur Bestimmung des Grenzwiderstandes eignen.

Digitized by Google

Beschaffenheit würden möglicher Weise die Brauchbarkeit dieser Methode noch erhöhen. *)

Eine eigenthümliche Angabe, die sich aus den Gesetzen der Oscillationen erklären lässt, rührt von Nairne her. Um das Zerspringen der Flaschen, was den älteren Forschern häufig nicht nur während der Ladung, sondern oft gerade in dem Augenblick der Entladung und nicht selten an mehreren Stellen zugleich widerfuhr, zu verhüten, schreibt derselbe vor, dass man die Batterie nie durch einen guten Leiter entladen dürfe, wenn derselbe nicht wenigstens 5 Fuss Länge habe. Da, wie ich gefunden, **) die Oscillationen mit wachsender Länge des Schliessungsdrahtes an Dauer zunehmen, das Maximum der Stromstärke also abnimmt, so ist es einleuchtend, dass durch grössere Länge die »Schlagweite« der strömenden Elektricität herabgesetzt wird. Die Fähigkeit, eine Glaswand zu durchschlagen, muss also für dieselbe Ladung ebenfalls eine geringere werden durch Verlängerung des Schliessungsbogens. — Auch die Beobachtung von Priestley, dass nach dem Zersprengen der Batterie nicht immer blos eine, sondern oftmals mehrere Flaschen zugleich zersprungen sind, scheint nach der Annahme von Oscillationen weniger unnatürlich.

Von älteren Versuchen***) möchte ich schliesslich nur noch an diejenigen erinnern, welche von Lullin, Henley u. A. angegeben worden sind, um aus den Wirkungen des Entladungsfunkens die Richtung der elektrischen Materie bei der Entladung zu bestimmen. Sämmtliche Versuche dieser Art geben nur mehr oder weniger unsichere Resultate; unter ganz beschränkten Be-

---

*) Die von Riess in den Berl. Monatsber. (Sitzung vom 22. Oct. 1860) angekündigte Untersuchung, obschon sie einen ganz andern Zweck verfolgen und ganz andere Gesichtspunkte zu Grunde legen muss, könnte dennoch hierüber einige Aufschlüsse geben.

**) Vergl. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 11, S. 173.

***) Die von Priestley in seiner Geschichte der Elektricitätslehre (S. 479 der Uebersetzung von Krünitz) angeführten Beobachtungen über den Ton des Entladungsschlages dürften wohl mit den Gesetzen der Oscillationen in keinen Zusammenhang zu bringen sein, obschon es merkwürdig bleibt, dass Priestley die Tonhöhe des Entladungsschlages mit wachsender elektrischer Oberfläche abnehmend, dagegen von der Höhe der Ladung fast unabhängig fand.

Digitized by Google

dingungen sind die Prüfungsmittel brauchbar und selbst dann sind die Angaben oft zweifelhafter Natur. Geht man von der Theorie der Oscillationen aus, so erklärt sich diese Unsicherheit höchst einfach, wenn man bedenkt, dass, wie auch die Bohnenberger'schen Beobachtungen und die Priestley'schen Flecke anzudeuten scheinen, die einzelnen Oscillationen an der Unterbrechungsstelle in ihrer Wirkung und ihrem Wege einander nicht genau entsprechen.

Welch eine wichtige Rolle die Oscillationen und der Grenzwiderstand bei den Savary'schen Beobachtungen, ferner bei den Riess'schen Untersuchungen über die Erwärmung bei Entladung in Flüssigkeiten spielen müssen, darauf habe ich schon früher ebenfalls hingedeutet.

SITZUNG AM 13. APRIL 1861.

M. W. Drobisch, *Neue Ableitung der Grundformeln von Fechner's Psychophysik.*

Wie Fechner in seinem interessanten und wichtigen Werke »Elemente der Psychophysik« ausführlich dargethan hat, ist durch Versuche bewiesen, dass für die Empfindungen der Stärke des Lichts, der Grösse der Temperatur, der Schwere von Gewichten, der Stärke von Tönen, endlich der mittels der Augen oder der Hautfläche wahrgenommenen Distanzen folgender Satz (das »Webersche Gesetz«) gilt:

> Bedeuten β und $\beta + \varDelta\beta$ zwei nur quantitativ verschiedene Reizgrössen, welche zwei Empfindungen hervorbringen, deren Grössenunterschied $\varDelta\gamma$ nur eben merklich ist, so dass also, wenn statt $\beta + \varDelta\beta$ ein schwächerer Reiz angewandt wird, der Unterschied der dadurch erzeugten Empfindung von der dem Reize β entsprechenden völlig unmerklich ist, so geben zwei andere, den vorigen bezüglich proportionale Reizgrössen β' und $\beta' + \varDelta\beta'$ zwar Empfindungen, die, je nachdem β' grösser oder kleiner als β, stärker oder schwächer als die durch β und $\beta + \varDelta\beta$ erzeugten sind, deren Unterschied $\varDelta\gamma'$ aber gleichfalls nur eben merklich, also dem Unterschied $\varDelta\gamma$ gleich ist.

Dieser Satz lässt sich auch kurz so ausdrücken:

> Wenn $\beta : \beta' = \varDelta\beta : \varDelta\beta'$, so ist sowohl $\varDelta\gamma$ als $\varDelta\gamma'$ nur eben merklich, daher $\varDelta\gamma' = \varDelta\gamma$.

Derselbe Satz gilt auch, was Fechner sehr wohl bemerkt hat, für die Empfindungen der Höhenunterschiede der Töne oder Intervalle, nur dass hier die Gleichheit von $\varDelta\gamma$ und $\varDelta\gamma'$ ohne Beschränkung auf nur eben merkliche Grössenwerthe

Digitized by Google

statt hat. Denn es ist allgemein anerkannt, dass, wenn die Schwingungszahlen β und $\beta + \Delta\beta$ zweier Töne den Schwingungszahlen β' und $\beta' + \Delta\beta'$ von zwei andern Tönen bezüglich proportional sind, dann das Intervall $\Delta\gamma$ der beiden ersten Töne gleich gross empfunden wird mit dem Intervall $\Delta\gamma'$ der beiden andern, und dass diese Gleichheit sowohl bei sehr engen als bei sehr weiten Intervallen mit Sicherheit erkannt werden kann. Hieraus leuchtet ein, dass das mathematische Gesetz, nach welchem in den von Fechner nachgewiesenen Fällen die Empfindungsgrösse γ von der ihr entsprechenden Reizgrösse β abhängt, dasselbe sein muss, wie das seit Euler bekannte Gesetz der Abhängigkeit der Intervalle von den Schwingungszahlen der Töne, welche sie bilden. Denn der angeführte Erfahrungssatz, dessen Auffindung und Befestigung durch zahlreiche neue Versuche, ohngeachtet aller werthvoller Vorarbeiten, doch Fechner's grosses Verdienst ist, stellt sich der Form nach als ein specieller Fall des älteren Satzes, die Gleichheit der Tonintervalle betreffend, dar. Somit können also ohne Weiteres alle Formeln, welche für die Tonintervalle gelten, auf sämmtliche Classen von Empfindungen, welche jener Erfahrungssatz umfasst, übergetragen werden. Denn es versteht sich in aller Strenge von selbst, dass, was gilt, wenn $\Delta\gamma$ und $\Delta\gamma'$ bei beliebiger Grösse gleich sind, auch noch gelten muss, wenn diese Unterschiede in das nur noch eben merkliche Kleine übergehen. Es bedarf also eigentlich gar keiner besondern Ableitung der für diesen letzteren speciellen Fall geltenden Formeln, wenn dieselben bereits für die allgemeinere Voraussetzung erwiesen sind. Ausserdem aber unterliegt diejenige Ableitung, welche sich darauf gründet, dass $\Delta\gamma$ und $\Delta\gamma'$, weil sie nur eben merkliche Grössen sind, als Differentiale angesehen werden können, doch einigen Bedenken. Denn da noch merkliche, wenn auch sehr kleine, Grössen doch noch nicht Differentiale sind, so könnten die Formeln, welche man erhält, in den Verdacht kommen, den wirklichen erfahrungsmässigen Thatbestand nur näherungsweise darzustellen. Allerdings hat nun auch Fechner*) eine Ableitung der Formeln gegeben, welche nicht von der Voraussetzung ausgeht, dass $\Delta\gamma$ und $\Delta\gamma'$ als Differentiale betrachtet werden können. Sie beruht auf demselben Prin-

*) Elemente der Psychophysik, II, S. 35 ff.

Digitized by Google

cip, nach welchem ich im J. 1853*) eine, wie ich glaube, strenge Begründung der Eulerschen Maassbestimmung der Tonintervalle gegeben habe. Indess besitzt vielleicht der nachfolgende Versuch vor meinem früheren den Vorzug, auf noch directere und durchsichtigere Weise zum Ziele zu führen und keinen Augenblick zweifelhaft darüber zu lassen, dass man es hier weder blos mit einer specifischen Eigenthümlichkeit der Tonempfindungen, noch blos mit den Empfindungsclassen zu thun hat, bei welchen die Gleichheit ihrer Unterschiede, nur wenn sie eben merklich werden, erkannt werden kann.

Es sei die Aufgabe zu lösen: die stetige Function $\gamma = f(\beta)$ zu finden, welche die Eigenschaft hat, dass, wenn β und β' zwei beliebige positive Werthe ihrer Variablen, $\Delta\beta$ und $\Delta\beta'$ aber solche Aenderungen dieser Werthe bedeuten, die der Grösse derselben proportional sind, so dass also

$$\Delta\beta : \Delta\beta' = \beta : \beta'$$

die zugehörigen Aenderungen $\Delta\gamma, \Delta\gamma'$ der Werthe der Function gleich gross sein sollen.

Man kann setzen $\beta' = n\beta$, wo n eine beliebige positive, rationale oder irrationale Zahl bedeutet. Dann ist auch $\Delta\beta' = n\Delta\beta$, daher

$$\Delta\gamma = f(\beta + \Delta\beta) - f(\beta),$$
$$\Delta\gamma' = f(\beta' + \Delta\beta') - f(\beta') = f[n(\beta + \Delta\beta)] - f(n\beta),$$

folglich nach der Voraussetzung, dass $\Delta\gamma' - \Delta\gamma = 0$, wenn man zur Abkürzung $f(n\beta) - f(\beta) = F(\beta)$ setzt,

$$F(\beta + \Delta\beta) - F(\beta) = 0,$$

und wenn man entwickelt und mit $\Delta\beta$ dividirt,

$$F'(\beta) + \frac{\Delta\beta}{2} F''(\beta + \theta\Delta\beta) = 0,$$

wo $0 < \theta < 1$

und $F'(\beta) = nf'(n\beta) - f'(\beta),$

$$F''(\beta) = n^2 f''(n\beta) - f''(\beta),$$

folglich durch Vertauschung von β mit $\beta + \theta\Delta\beta$

$$F''(\beta + \theta\Delta\beta) = n^2 f''[n(\beta + \theta\Delta\beta)] - f''(\beta + \theta\Delta\beta).$$

Da aber $\Delta\beta$ eine von β unabhängige Grösse, so muss in der vorstehenden Bedingungsgleichung gleichzeitig

$$F'(\beta) = 0 \text{ und } F''(\beta + \theta\Delta\beta) = 0$$

---

*) Poggendorff's Annalen, XC, S. 375 ff.

Digitized by Google

sein. Die erste dieser Gleichungen ist identisch mit

$$nf'(n\beta) - f'(\beta) = 0,$$

woraus für den speciellen Werth $\beta = 1$ folgt

$$nf'(n) - f'(1) = 0,$$

oder, wenn man die constante Grösse $f'(1) = \varkappa$ setzt,

$$f'(n) = \frac{\varkappa}{n}.$$

Da aber n jede beliebige positive, rationale oder irrationale Zahl bedeutet, so kann n mit β vertauscht werden, woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} f'(\beta) &= \frac{\varkappa}{\beta} \\ \text{oder}\quad d\gamma &= \frac{\varkappa d\beta}{\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dieser Ausdruck für $f'(\beta)$ leistet aber auch zugleich der zweiten Bedingungsgleichung $F''(\beta + \theta\varDelta\beta) = 0$ Genüge. Denn er giebt

$$f''(\beta) = -\frac{\varkappa}{\beta^2},$$

woraus durch Vertauschung von β mit $n(\beta + \theta\varDelta\beta)$ folgt

$$f''[n(\beta + \theta\varDelta\beta)] = -\frac{\varkappa}{n^2(\beta+\theta\varDelta\beta)^2}.$$

Da nun die Vertauschung von β mit $\beta + \theta\varDelta\beta$ in $f''(\beta)$ giebt

$$f''(\beta + \theta\varDelta\beta) = -\frac{\varkappa}{(\beta+\theta\varDelta\beta)^2},$$

so wird vermöge (1) in der That auch $F''(\beta+\theta\varDelta\beta) = 0$. Integrirt man nun die Formel (1) und setzt $\gamma = 0$ für $\beta = 1$, d. h. nimmt als Maasseinheit von β denjenigen Werth desselben an, bei welchem $\gamma = 0$ wird, so ergiebt sich

$$\gamma = f(\beta) = \varkappa \lg \text{nat}\, \beta, \qquad (2)$$

und ist durch diese Bestimmung der gesuchten Function die Aufgabe gelöst.

Die in dieser Formel enthaltene Constante $\varkappa$ kann auf folgende Weise ausgedrückt werden. Setzt man, für irgend einen Werth α von β, $\gamma = 1$ (nimmt also, wenn α eine der Grösse nach bestimmten Reiz bedeutet, die intensive Grösse der zugehörigen Empfindung als Maasseinheit der Empfindungen an), so wird nach (2)

$$\varkappa = \frac{1}{\lg \text{nat}\, \alpha},$$

folglich auch

$$\gamma = \frac{\lg \text{nat}\, \beta}{\lg \text{nat}\, \alpha} = \frac{\lg \beta}{\lg \alpha}, \qquad (2^*)$$

wo im zweiten Ausdruck das Logarithmensystem völlig beliebig

Digitized by Google

ist. Von selbst folgt hieraus, dass, wenn einem andern Reize von der Grösse β' die Empfindungsgrösse γ' entspricht,

$$\gamma' - \gamma = \frac{\lg \beta' - \lg \beta}{\lg \alpha} = \frac{\lg \frac{\beta'}{\beta}}{\lg \alpha} \tag{3}$$

dass also der Unterschied zweier gleichzeitigen Empfindungsgrössen dem Unterschied der Logarithmen ihrer Reizgrössen, oder, was dasselbe, dem Logarithmus des Quotienten aus dem schwächern Reiz in den stärkern proportional ist. Endlich folgt aus (2*) und (3)

$$\beta = \alpha^{\gamma}, \tag{4}$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = \alpha^{\gamma' - \gamma}. \tag{5}$$

Es entspricht demnach dem geometrischen Verhältniss der Reize immer ein arithmetisches der ihnen zugehörigen Empfindungen; oder: wenn die Reizgrössen nach einer geometrischen Reihe fortschreiten, so bilden die Grössen der ihnen entsprechenden Empfindungen eine arithmetische Reihe, es sind daher die Unterschiede aller derjenigen Paare von Empfindungsgrössen gleich, deren zugehörige Reizgrössen in ein und demselben geometrischen Verhältniss stehen.

Nur beiläufig mag noch bemerkt werden, dass, wenn man in (2) und (3) $\lg \alpha = 1$ setzt, also sich eines Logarithmensystems bedient, dessen Basis $= \alpha$ ist, dann die Empfindungsgrössen durch diese Logarithmen ihrer Reize selbst ausgedrückt werden, daher auch die Empfindungsunterschiede den Unterschieden dieser Logarithmen gleich sind.

Da diese Ableitung in aller Strenge für jeden beliebigen Werth von $\Delta\beta$, folglich auch für solche Werthe gilt, bei denen $\Delta\gamma$ und $\Delta\gamma'$ nur noch eben merklich sind, so zeigt es sich, dass die erhaltenen Formeln auch in diesem letzteren Falle nicht etwa blos approximative, sondern genaue Geltung haben.

Es lässt sich voraussetzen, dass die in dem »Weber'schen Gesetz« enthaltene Annahme, wonach alle nur eben merkliche Unterschiede gleich sind, durch die in der Psychophysik angewandten, theils directen, theils indirecten, einander controlirenden Methoden experimental, wenigstens »innerhalb der Grenzen der mittleren Erregbarkeit«, zulänglich gesichert ist. Indess mögen hier noch die Consequenzen einer Voraussetzung untersucht werden, nach welcher die Empfindungsunterschiede

Digitized by Google

bei unter sich proportionalen Reizgrössen nur nahe gleich sind.

Sei nämlich, wie zuvor,

$$\beta : \beta' = 1 : n,$$

dagegen $$\varDelta\gamma : \varDelta\gamma' = 1 : n^{\omega},$$

wo ω eine Grösse bedeutet, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Je nachdem man dann ω positiv oder negativ annimmt, werden mit zunehmender Stärke der Reize die Empfindungsunterschiede bezüglich langsam zu- oder abnehmen, für $\omega = 0$ aber sich gleich bleiben. Setzt man nun wieder $\gamma = f(\beta)$, so erhält man, da jetzt $\varDelta\gamma' = n^{\omega}\varDelta\gamma$, zur Bestimmung dieser Function die Bedingungsgleichung

$$f[n(\beta + \varDelta\beta)] - f(n\beta) - n^{\omega}[f(\beta + \varDelta\beta) - f(\beta)] = 0,$$

oder, wenn man $f(n\beta) - n^{\omega}f(\beta) = F(\beta)$ setzt,

$$F(\beta + \varDelta\beta) - F(\beta) = 0.$$

Diese Gleichung kann ganz auf dieselbe Weise, wie die obige, von der gleichen Form aufgelöst werden und giebt dann

$$f'(n\beta) = n^{\omega-1}f'(\beta),$$

woraus für $\beta = 1$

$$f'(n) = n^{\omega-1}f'(1) = \varkappa n^{\omega-1},$$

und durch Vertauschung von n mit β folgt

$$\left.\begin{aligned} f'(\beta) &= \varkappa\beta^{\omega-1} \\ \text{oder}\quad d\gamma &= \frac{\varkappa d\beta}{\beta^{1-\omega}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die Integration giebt

$$\gamma = \frac{\varkappa\beta^{\omega}}{\omega} + \text{Const.},$$

und wenn man, für $\beta = 1$, $\gamma = 0$ setzt, Const. $= -\frac{\varkappa}{\omega}$, daher

$$\gamma = \frac{\varkappa}{\omega}(\beta^{\omega} - 1). \qquad (7)$$

Die Constante $\varkappa$ wird, wie oben, bestimmt, wenn man, für $\beta = \alpha$, $\gamma = 1$ setzt, was $\frac{\varkappa}{\omega} = \frac{1}{\alpha^{\omega}-1}$ giebt. Es ist daher auch

$$\gamma = \frac{\beta^{\omega}-1}{\alpha^{\omega}-1}. \qquad (7^*)$$

Wird $\omega = 0$, so geben beide Formeln als wahren Werth des dann erscheinenden $\frac{0}{0}$

$$\gamma = \frac{\lg\beta}{\lg\alpha},$$

Digitized by Google

in Uebereinstimmung mit (2*). Der Formel (3) entspricht dann

$$\gamma' - \gamma = \frac{\beta'^{\omega} - \beta^{\omega}}{\alpha^{\omega} - 1} . \qquad (8)$$

Entwickelt man in dem rechten Theil dieser Formel Zähler und Nenner in Reihen und setzt zur Abkürzung

$$\frac{\lg \alpha}{\lg e} = a , \ \frac{\lg \beta}{\lg e} = b , \ \frac{\lg \beta'}{\lg e} = b' ,$$

wo die Logarithmen beliebige und e die Basis der natürlichen, so ergiebt sich

$$\gamma' - \gamma = \frac{\lg \frac{\beta'}{\beta}}{\lg \alpha} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2}(b' + b)\omega + \frac{1}{6}(b'^2 + b'b + b^2)\omega^2 + \frac{1}{24}(b'^3 + b'^2 b + b' b^2 + b^3)\omega^3 + \ldots}{1 + \frac{1}{2}a\omega + \frac{1}{6}a^2\omega^2 + \frac{1}{24}a^3\omega^3 + \ldots} \right\}, \qquad (9)$$

in welcher Formel beide Reihen für jeden Werth von ω convergiren. Hieraus erhellt nun, dass, wenn ω nicht $= 0$, also $\Delta\gamma, \Delta\gamma'$ nicht vollkommen gleich sind, $\frac{\lg \frac{\beta'}{\beta}}{\lg \alpha}$ nur der erste Näherungswerth von γ ist, der, da alle vorstehende Formeln für jeden Werth von ω gelten, wenn dieser bekannt ist, nach (9) mit beliebiger Schärfe verbessert werden kann. Ist z. B. ω so klein, dass die in die dritten und höhern Potenzen von ω multiplicirten Glieder der vorstehenden Reihen vernachlässigt werden können, so wird

$$\gamma' - \gamma = \frac{\lg \frac{\beta'}{\beta}}{\lg \alpha} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}(b' + b - a)\omega + \tfrac{1}{12}[(b' + b - a)(2b' - a) + 2b(b - a)]\omega^2 \right\}.$$

Die Voraussetzung, auf der diese Rechnung beruht, nämlich dass

$$\Delta\gamma : \Delta\gamma' = 1 : n^{\omega} = \beta^{\omega} : \beta'^{\omega},$$

ist allerdings nur eine hypothetische, aber die Vergleichung der daraus folgenden Grundformel $d\gamma = \frac{\varkappa d\beta}{\beta^{1-\omega}}$ mit der für streng gleiche Empfindungsunterschiede giltigen $d\gamma = \frac{\varkappa d\beta}{\beta}$ zeigt deutlich, dass sie eine sehr natürliche Erweiterung der zur Zeit durch die Versuche gegebenen Grundlage ist, die vielleicht für die der oberen Grenze nahe liegenden Reizwerthe brauchbar werden kann.

Digitized by Google

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 1. JULI 1861.

G. Th. Fechner, *über den seitlichen Fenster- und Kerzenversuch.*

Das Folgende ist ein Nachtrag zur Erörterung eines kleinen Versuches, den ich in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen*) unter dem Namen des seitlichen Fensterversuches beschrieben habe. Veranlasst ist dieser Nachtrag durch die Rücksichtsnahme auf einige, mir theils erst nach Erscheinen meiner Abhandlung bekannt gewordene, theils erst später erfolgte, Vornahmen desselben Versuches durch Andere, die einigen Bemerkungen und neuen Beobachtungen meinerseits Raum gegeben haben, worüber ich hier Mittheilung machen will.

Das Hauptinteresse des Versuches dürfte vielleicht nur darin liegen, dass er nach einander drei verschiedene Erklärungsversuche hervorgerufen hat, ohne noch bis heute vollständig und sicher erklärt zu sein, denn jede der drei versuchten Erklärungen nöthigt zu an sich unwahrscheinlichen, wenn schon an sich möglichen Voraussetzungen, ohne dass, wie es scheint, die Aussicht einer andern Erklärung übrig bleibt. Und wenn sich nach der folgenden Discussion die eine, die neueste, dieser Erklärungen erledigen dürfte, vermöchte ich doch nicht sicher zwischen den beiden andern zu entscheiden, was nur nach Versuchen geschehen könnte, die ich nach dem Zustande meiner Augen Andern überlassen muss. Das Folgende ist daher hauptsächlich nur bestimmt, durch Hervorhebung der Puncte, um die es sich noch handelt, den Gegenstand einer weiteren Aufmerksamkeit zu empfehlen, die er in sofern verdient, als irgend welche Bereicherung der physiologischen Optik dabei zu erwarten ist. Jedoch

*) Abhandl. der math. phys. Cl. der k. sächs. Ges. d. W. V. S. 371 ff.

Digitized by Google

wird man einigen experimentelen Zuwachs zur Erläuterung des Gegenstandes, so weit ich mich auf diese Seite der Sache einlassen durfte, im Folgenden nicht vermissen.

Zuvörderst rufe ich die wesentlichen Umstände des Versuches unter Zufügung einiger Particularitäten zurück.

In der Anwendung von Tageslicht besteht der Versuch darin, dass man bei seitlichem Stande gegen das Fenster durch geeignete Kreuzung der Sehaxen das Doppelbild eines kleinen weissen Feldes auf schwarzem Grunde erzeugt, wobei ein auffallender Helligkeitsunterschied und zumeist, namentlich bei hellem Himmel, auch Farbenunterschied beider Bilder beobachtet wird. Das Bild in dem, dem Fenster nähern, also mehr beleuchteten, Auge, welches Auge ein- für allemal *N* heisse, erscheint dunkler und bläulich, bei trübem Himmel für mein Auge jedoch meist nur schwach grünlich, das Bild in dem andern, vom Fenster entfernten Auge, welches *E* heisse, heller und röthlich oder rothgelblich. Helligkeits- und Farbenunterschied sind bei hellem Himmel sehr auffällig, um so mehr, wenn man die Hand oder eine Tafel als Scheidewand zwischen beide Augen einschiebt, und bisher noch von jedem wahrgenommen worden, den ich den Versuch anstellen liess; das Blau in *N* aber erscheint intensiver als das Roth in *E* und wird oft allein wahrgenommen, während das Bild in *E* weiss erscheint. Mit der Dauer der Betrachtung oder Fortsetzung und Vervielfältigung des Versuchs scheinen sich im Allgemeinen die Farbenphänomene zu verstärken. Auch macht es einen grossen Unterschied, ob man das eine oder andere Bild fixirt, und wenigstens bei ungleichseitigem Doppeltsehen wird die Färbung des blauen Bildes deutlicher, wenn man das andere fixirt, was aber wohl nur von der andern Wendung der Augen gegen das Fenster, die dabei eintritt, abhängt.

Der Helligkeitsunterschied der Bilder ist von mir aus Contrastwirkungen erklärt worden; betreffs des Farbenunterschiedes habe ich in meiner Abhandlung offen gestanden, nach manchen vergeblichen Versuchen, demselben auf den Grund zu kommen, dass ich keine Erklärung dafür weiss.

Wie leicht zu erachten, lässt sich das seitliche Fensterlicht auch durch seitliches Lampen- oder Kerzenlicht ersetzen. Ich konnte bei meiner frühern Anstellung in dieser Weise keinen entschiedenen Helligkeitsunterschied der Bilder, sondern nur

Digitized by Google

einen Farbenunterschied finden, was aber blos daher rührte, dass ich, den Versuch als Parallelversuch zum seitlichen Fensterversuch anstellend, das Licht immer in entsprechender Entfernung vom Auge anbrachte, wie es etwa beim gewöhnlichen Lesen und Schreiben steht, wo der schwache Helligkeitsunterschied bei dem Unterschiede der Färbungen nicht recht sicher beurtheilt werden kann; bringe ich aber das Licht nahe am äussern Augenwinkel an, so ist der Helligkeitsunterschied beider Bilder nicht nur erkennbar, sondern kann ebenso wie der Farbenunterschied sehr bedeutend werden. Die Doppelbildscomponente des weissen Feldes auf schwarzem Grunde im Auge *N* erscheint dann grün, was ich manchmal in intensivster Weise gesehen habe, im andern *E* nach Umständen röthlichgelb, röthlichweiss, manchmal mehr roth als gelb, andermale mehr gelb als roth, was sich bei mir nach Tagen oder unbekannten Nebenumständen ändert, indess es keinen Unterschied machte, ob ich eine Stearinkerze oder einen gewöhnlichen Wachsstock oder eine Studirlampe als Quell der Beleuchtung anwendete. Das Bild im Auge *N* ist das dunklere, im Auge *E* das hellere. Die Richtung des Unterschiedes ist also in Bezug auf die Helligkeit dieselbe, als bei der Beleuchtung durch das Fenster, in Bezug auf die Färbung scheinbar verkehrt, insofern das blaue Himmelslicht die ihm gleichartige Farbe im Auge *N*, das rothgelbe Kerzenlicht im Auge *E* erzeugt; aber insofern übereinstimmend, als beidesfalls im Auge *N*, was also vom stärkeren Licht getroffen wird, die brechbarere, im andern die minder brechbare, Farbe erscheint. Da sowohl das blaue Himmelslicht als gelbe Kerzenlicht zum grössern Theile aus weissem Licht nur mit einer Farbenzumischung besteht, so scheint diese nach Vorigem keinen andern Erfolg zu haben, als den, wesentlich von dem Helligkeitsunterschiede der Beleuchtung beider Augen abhängigen, Farbenunterschied der Bilder zu nüanciren.

Stelle ich den seitlichen Kerzenversuch mit einem schwarzen Felde auf weissem Grunde an, so erscheint das Bild im Auge *N* roth, im Auge *E* gewöhnlich rein schwarz, zuweilen doch selten intensiv blau, jenes bei nahe am Auge *N* gehaltenem Licht sehr hell, dieses nächtlich dunkel, so dass man nicht glauben sollte, es seien Bilder desselben Objects. Bei Anstellung desselben Versuchs jedoch als seitlichen Fensterversuch, kann ich den Helligkeitsunterschied der schwarzen Bilder nicht so ent-

Digitized by Google

schieden finden, und bei der röthlichen Färbung, welche das schwarze Bild im Auge *N* auch hier hat, indess das andere rein schwarz erscheint, wegen des ganz verschiedenen Charakters, den das Schwarz hierdurch annimmt, oft nicht recht beurtheilen, welches das hellere ist, oder nach Umständen diess oder jenes heller finden.

Erst nach Erscheinen meiner Abhandlung bin ich durch eine briefliche Notiz von Dr. Auber darauf aufmerksam geworden, dass der Versuch mit Kerzenlicht nichts Neues, sondern schon früher von Dr. Smith in Fochabers angestellt*), später von Brewster**) wiederholt und von einem Erklärungsversuche begleitet, endlich von Brücke***) aufs neue in Betracht genommen, abändernden Wiederholungen unterworfen und neu erklärt worden sei, welche Versuche mir entgangen oder vielmehr entfallen waren. Im Factischen stimmen meine Beobachtungen wesentlich mit denen der genannten Beobachter, die jedoch nur auf den Farben- nicht Helligkeitsunterschied Rücksicht genommen haben, überein. Nur findet Brücke bei schwarzem Felde auf weissem Grunde das Bild im Auge *E* grün, indess ich es bemerktermassen rein schwarz oder manchmal blau finde, so wie auch Volkmann bei einer von mir veranlassten Wiederholung des Versuches es für rein schwarz erklärte. Dieser Unterschied kann von Zufälligkeiten der Stimmung des Auges oder der äussern Versuchsumstände abhängen.

Als Fensterversuch ist der Versuch nach Erscheinen meiner Abhandlung, doch ohne Kenntniss von derselben oder den vorerwähnten Versuchen Anderer zu haben, von F. Zöllner unter dem Titel: »Ueber eine neue Beziehung der Retina zu den Bewegungen der Iris« in Pogg. Ann. CXI. S. 481 ff. beschrieben, eine von den frühern abweichende Erklärung davon gegeben, und eine nachträgliche Bezugnahme auf die ihm wie mir erst später bekannt gewordenen Versuche von Smith und Brücke in Pogg. Ann. CXI. S. 660 ff. hinzugefügt worden. Im Factischen stimmen seine Beobachtungen ebenfalls wesentlich mit den meinigen überein.

So viel vom Thatsächlichen und Historischen des Versuches.

---

*) Edinb. of Sc. Vol. V. p. 25.

**) Pogg. Ann. XXVII. 493.

***) Pogg. Ann. LXXXIV 120.

Digitized by Google

Wenden wir uns jetzt zu den Versuchen seiner Erklärung. Sie hat sich einerseits auf den Helligkeits- anderseits auf den Färbungsunterschied beider Bilder zu beziehen. Um mit dem neuesten Erklärungsversuche zu beginnen, so sucht Zöllner den Grund des Helligkeitsunterschiedes wesentlichst in der geringeren Pupillenapertur des mehr beschatteten Auges, und zieht nur subsidiär ein Contrastverhältniss zu, indess ich umgekehrt (S. 578 ff. meiner Abhandlung) den Einfluss der verschiedenen Pupillenapertur für bedeutungslos erklärt und den ganzen Grund der verschiedenen Helligkeit auf ein Contrastverhältniss bezogen habe. Das Auge *N* sieht nämlich das weisse Object auf dem schwarzen Grunde in Contrast mit dem vorwiegend von ihm erblickten hellen Himmel und der lichten Gegend draussen, das andere *E* mit dem vorwiegend von ihm erblickten verhältnissmässig dunklen Grunde des Zimmers. Diese Erklärung setzt voraus, dass das Bild in jedem Auge trotz der sog. Identität der Netzhautstellen mit dem Grunde dieses Auges insbesondere in Contrast treten und dadurch in seiner Helligkeit verschieden vom andern Auge modificirt werden könne. In der That aber ist durch eine Reihe fremder und eigener Versuche, welche im 7. Abschnitt meiner Abhandlung über das binoculare Sehen angeführt sind, dargethan, dass der Contrast sich in jedem Auge für sich mit besondern Wirkungen und zwar in augenfälligster Weise geltend machen könne.

Bei der Ansicht, dass ein Einfluss der verschiedenen Pupillenweite wesentlich hierbei nicht in Betracht komme, stützte ich mich theils auf eine directe Beobachtung meiner Pupillen bei seitlichem Stande am Fenster durch Volkmann und Heidenhain, welche keinen Unterschied der Weite hierbei wahrnehmen konnten, theils die mir von denselben mitgetheilte Notiz, dass schon Joh. Müller die Gleichheit der Pupillen bei ungleicher Beleuchtung beider Augen als Thatsache anführe. Wirklich findet sich in seinem Handb. der Physiol. (1855) Th. I. S. 663 folgende Stelle: »Ist der Lichteindruck auf beide Augen verschieden, so ist gleichwohl die Grösse der Pupille auf beiden Augen gleich und entspricht dem Mittel aus beiden Lichteindrücken.« Die gleiche Angabe findet sich in Ruete's Ophthalmol. (2. Aufl. Th. I. 95), welcher mir ausserdem sagte, dass auch bei Staarkranken, wo die eine Linse verdunkelt oder die eine Netzhaut gelähmt sei, so lange nur nicht die Ciliarnerven krank-

Digitized by Google

haft afficirt seien, beide Pupillen stets gleich gefunden werden, wie er auf das Constanteste und Wiederholteste beobachtet. Aber nach Angaben, auf welche Zöllner's Abhandlung verweist, verhält es sich freilich bei gesunden Augen anders, und Beobachtungen an Staarkranken dürften in sofern nicht hinreichend massgebend sein, als die Gewöhnung an den ungleichen Lichtreiz allmälig eine Ausgleichung der Pupillenweiten herbeigeführt haben könnte, die desshalb nicht nothwendig bei ungewöhnten gesunden Augen statt finden müsste. Also ist die Frage näher zu prüfen.

Zöllner bezieht sich auf Budge (über die Bewegungen der Iris S. 172) und die von demselben angeführte Literatur. Budge sagt nämlich in directem Widerspruch mit Müller und Ruete: »Die Pupille des einen Auges verengt sich, wenn das andere Auge vom Licht getroffen wird; eine Erfahrung, welche schon Galen kannte. Jedoch erhält niemals das nicht beleuchtete Auge eine gleiche Ausdehnung.« Zwar führt Budge keine eignen Beobachtungen an, beruft sich aber seinerseits auf Plempii ophthalmographia I. c. 2*) und Porterfield on the eye I. p. 112**). Ich bin auch dieser Literatur nachgegangen, und finde wirklich hier folgende positiven Angaben, die ich nützlich halte, wörtlich anzuführen, da sie eine an sich interessante und wie man sieht bis jetzt noch nicht entschiedene physiologische Frage betreffen. Plempius: »A varietate autem lucis variare quoque pupillae formam, cuivis patere potest: nam si hominis latus unum luci obvertas ita, ut uno oculo lucem excipiat, altero ob tuber nasi eandem non admittat, conspici potest clare, pupillam luci obversam altera esse strictiorem, jucundo omnibus naturalis scientiae cultoribus spectaculo.« Porterfield: »Tho' our pupils sympathize with each other in their motions, yet they are not thereby made to contract or dilate equally.« .... »Let a Person, sitting with his face towards the light, shut one of his Eyes, the Pupil of the other Eye, tho' it dilates considerably, yet it will not dilate altogether so much as the Pupil of the shut Eye; for, upon opening the shut Eye, you can see, that its Pupil, immediately after the Eye is opened, is sensibly larger than the Pupil of the other Eye.« .... »The same thing may also be

*) Die betreffende Stelle steht vielmehr I. c. 11. p. 17.
**) Die betreffende Stelle steht vielmehr T. II. p. 113.

Digitized by Google

proved, by making a Man to sit with his Side to the Window in a good light, so as the Light may freely shine upon one of his Eyes, while, at the same time, the other Eye is shaded from the Light by the Projection of the Nose; for, in the Eye that is shaded, the Pupil may be seen more dilated than the Pupil of the other Eye, upon which the Light shines without any Impediment. ..... To render this Experiment still more sensible, it may be proper to place a small Dale–board, or thin Book, betwixt the Eyes, so as the Shade that falls upon the Eye may thereby be made stronger.«

Nach Einsicht dieser Angaben bat ich Prof. Ruete, die Untersuchung, ob sich eine merkliche Verschiedenheit der Pupillenweite bei seitlichem Fensterstande unter den Umständen, unter denen von mir der seitliche Fensterversuch angestellt wurde, zeige, direct vorzunehmen Er that diess bei gutem Tageslichte mit 6 seiner Zuhörer, konnte aber weder selbst etwas davon bemerken, noch vermochten es seine Zuhörer.

Diese Beobachtungen wurden Anfangs März an einem nach Süden gelegenen Fenster um Mittag zwar ohne direct in das Zimmer fallendes Sonnenlicht, aber bei übrigens hellem Tageslichte mit solcher Stellung der beobachteten Subjecte, dass eine gute Beleuchtung des Auges *N* und nur so viel Beleuchtung des Auges *E* statt fand, um das Verhältniss der Pupillenweiten sicher beurtheilen zu können, angestellt. Ruete hat dieser Wiedergabe seiner Resultate und der Umstände, unter denen sie erhalten wurden, mündlich zugestimmt.

Ich will nun hiermit die Frage nicht im Allgemeinen für entschieden ansehen; sondern überlasse eine vollständige Entscheidung den Physiologen von Fach. Es wäre ja wohl möglich, und ist wohl selbst wahrscheinlich, dass bei stärkeren Beleuchtungsunterschieden als von Ruete angewendet wurden oder bei ganz scharfen Massmitteln oder bei manchen Individuen ein Unterschied der Pupillenweite spürbar wird; denn ich halte es nicht für wahrscheinlich, dass die so positiven Angaben der früheren Beobachter ganz falsch seien. Jedenfalls aber dürften die Autorität Joh. Müller's und die Beobachtungen Ruete's genügen, zu beweisen, worauf es hier wesentlich ankommt, dass der Unterschied der Pupillenweite unter den Umständen des seitlichen Fensterversuches, wenn überhaupt vorhanden, nur ge–

Digitized by Google

ring, und bei fehlendem Sonnenscheine ohne Scheidewand zwischen beiden Augen nach blossem Augenscheine bei den meisten Individuen nicht sicher zu constatiren ist. Nun wird aber der Helligkeitsunterschied beim seitlichen Fensterversuche von allen Personen sehr deutlich gefunden, und ich selbst habe an ein paar Tagen mit ganz grauem Himmel, wie S. 513 meiner Abhandlung angeführt ist, ohne Scheidewand zwischen den Augen mittelst eines geeigneten Verfahrens einen Unterschied der Helligkeit der Bilder im Auge *N* und *E* gefunden, welcher äquivalent war einem objectiven Unterschiede der Helligkeit von 1000 zu 744, was eine gar nicht zu verkennende Differenz der Pupillenweite erfordern würde. Ich glaube daher, meine frühere Erklärung im Wesentlichen aufrecht halten zu können.

Indess ist zu gestehen, dass die grosse, wahrhaft frappante, Helligkeit, welche bei Anstellung des Versuches als seitlichen Kerzenversuch mit einem schwarzen Felde auf weissem Grunde das schwarze Bild im Auge *N* gegen das im Auge *E* annehmen kann, Schwierigkeiten macht. Denn warum sollte es sich nicht auch durch Contrast mit der hellen Flamme vielmehr verdunklen, als erhellen? Es scheint angenommen werden zu müssen, dass, da das Weiss des Grundes, auf dem das schwarze Feld liegt, durch den Contrast mit der hellen Flamme im Auge *N* sich verdunkelt, hierdurch eine secundär erhellende Contrastwirkung auf das vom Weiss umschlossene Schwarz hervorgeht; wie man sich denn von der grössern Dunkelheit des Weiss im Auge *N* als *E* leicht durch abwechselnden Schluss des einen und andern Auges während des seitlichen Kerzenversuches überzeugen kann. Nur ist nicht recht klar, warum dieses Ueberwiegen der secundären Contrastwirkung des Grundes über die directe der Flamme dann nicht eben so gut bei weissem Felde auf schwarzem Grunde eintreten sollte, da nach entsprechenden Versuchen auch der schwarze Grund im Auge *N* durch den Contrast mit der Flamme dunkler als im Auge *E* ist, ja der Unterschied bei abwechselndem Schluss beider Augen hier eher noch deutlicher erscheint. Es müsste also noch angenommen werden, dass bei weissem Grunde eine solche secundäre Wirkung leichter die directe überwiegt, als bei schwarzem; wofür in der That Versuche zu sprechen scheinen, die ich in meiner Abhandlung über die Contrastempfindung (diese Berichte 1860. S. 105 f.) ohne Rücksicht auf unsern jetzigen Versuch an-

Digitized by Google

stellte; aber auf's Reine gebracht ist doch der Gegenstand noch nicht.

Unstreitig trägt zu dem grossen Helligkeitsunterschiede der zwei Bilder des schwarzen Feldes auf weissem Grunde im Auge *N* und *E* der Umstand wesentlich bei, dass das Bild im Auge *E* sich binocular mit dem weissen Grunde im Auge *N* deckt, welcher durch Contrast mit der Flamme verdunkelt ist, das Bild im Auge *N* aber mit dem weissen Grunde im Auge *E*, welcher nicht so stark oder bei Anbringung einer Scheidewand zwischen den Augen gar nicht dadurch verdunkelt ist. Schliesst man das Auge *E*, ehe man das Licht an die Seite des Auges *N* bringt, so sieht man in diesem nur ein tief schwarzes Bild, indem dann zugleich der Contrast mit dem dunklen Bilde im andern Auge, und die binoculare Deckung mit einem weissen Grunde im andern Auge fehlt. Aber sollten die Verhältnisse der binocularen Deckung allein in Betracht gezogen werden, so würde sich die grössere Dunkelheit des Bildes im Auge *N* gegen das im Auge *E* bei weissem Felde auf schwarzem Grunde nicht erklären.

Man kann noch folgende Erklärung versuchen: Das durch Sklerotica und Choroidea durchscheinende, im ganzen Augengrund zerstreute Licht, auf dessen Berücksichtigung sich die später anzuführende Erklärung der Farbenerscheinung durch Brücke stützt, wird bei schwarzem Felde auf weissem Grunde der Erhellung des schwarzen Bildes im Auge *N* zu Statten kommen, und zwar mehr zu Statten kommen müssen, als der Erhellung des weissen Grundes ringsum, weil nach einem bekannten Gesetze derselbe Lichtzuwachs auf Schwarz überhaupt leichter gespürt wird, als auf Weiss. Im Auge *E* aber findet keine erhebliche Erhellung des Schwarz der Art statt. Also erscheint das schwarze Bild im Auge *N* relativ erhellt gegen das im Auge *E*. Bei weissem Felde auf schwarzem Grunde anderseits gewinnt der schwarze Grund im Auge *N* vermöge des durchscheinenden Lichtes das Uebergewicht der Helligkeit gegen den schwarzen Grund im Auge *E*, daher erscheint jetzt das weisse Feld im Auge *N* durch den Contrast damit dunkler als im Auge *E*. Aber auch diese Erklärung kann nicht allein acceptirt werden; weil, wie schon oben bemerkt, wenn man bei Anstellung des Kerzenversuches mit weissem Felde auf schwarzem Grunde abwechselnd das eine und andere Auge schliesst, der schwarze Grund sehr beträchtlich sich erhellt, wenn das Auge *N* geschlossen wird, verdun-

Digitized by Google

kelt, wenn E geschlossen wird, was beweist, dass trotz des durch die Augenhäute durchscheinenden Lichtes der schwarze Grund im Auge N nicht heller, sondern dunkler als im Auge E ist.

Der ganze Erfolg scheint ein complicirter, und nach der Weise, wie sich mir der Kerzenversuch bei nahe an den äussern Augenwinkel von N gehaltenem Lichte darstellt, möchte ich, allgemein gesprochen, vermuthen, dass bei schwarzem Felde auf weissem Grunde sich mehrere Umstände zur Erzeugung des Helligkeitsunterschiedes der Bilder unterstützen, von denen bei weissem Felde auf schwarzem Grunde nur das Uebergewicht des einen über den andern den Erfolg bestimmt; obwohl ich auch hier den Helligkeitsunterschied oft bedeutend genug gefunden habe, und auf ein blosses Aperçu, wie es mir betreffs des Vergleiches beider Fälle nur zu Gebote steht, nichts Sicheres zu bauen ist.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung des Farbenunterschiedes der Bilder beim seitlichen Fenster- und Kerzenversuche über. Dieser wird von Zöllner ebenfalls wesentlich von der supponirten verschiedenen Pupillenweite beim seitlichen Fensterversuche abhängig gemacht, indem er unter Zuziehung von Versuchen mit künstlicher Erweiterung der Pupille durch Narkotica das Resultat seiner ganzen Untersuchung so ausspricht: »Die Abhängigkeit der Farbenempfindung von der Wellenlänge des Lichtes verändert sich im normalen Zustande der Augen mit der Oeffnungsweite der Pupille, so zwar, dass bei abnehmender Oeffnung die den stärker brechbaren, bei zunehmender Oeffnung die den weniger brechbaren Stralen zugehörigen Farbenempfindungen überwiegen.«

Diess wäre gewiss eine sehr merkwürdige Beziehung; aber abgesehen, dass es misslich ist, die, wenn nicht ganz fehlende, jedenfalls nur gering anzuschlagende, und unstreitig sehr schnell vollständig zu Stande gekommene, Differenz der Pupillenweiten für die oft sehr auffälligen und im Allgemeinen mit Fortsetzung der Versuche an Intensität zunehmenden Farbenphänomene bei dem seitlichen Fensterversuche in Anschlag zu bringen, widersprechen auch folgende Umstände dieser Erklärung.

Natürlich müsste die stärkste Differenz der Pupillenweite erwartet werden, wenn ein Auge ganz geschlossen wird, und mithin das Bild in dem offenen Auge sich blau oder grün auch

Digitized by Google

bei Vorderstellung gegen das Fenster färben. Diess ist nicht der Fall. Man kann einwenden, und dieser Einwand ist nicht ohne Gewicht, dass dann der begünstigende Contrast mit dem andern Bilde wegfalle. Aber diesem Einwande lässt sich begegnen. Nehme ich bei Vorderstellung gegen das Fenster eine Combination aus meinen farblosesten grauen Gläsern vor ein Auge, welche nur 0,17 Licht durchlässt, und schiebe das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde aus einander, so erscheint das eine Bild rein grau, das andere rein weiss. Hier aber sollte sich das weisse Bild, da es dem hell beleuchteten Auge angehört, blau oder grün, das andere dunkle röthlich färben. Ausserdem bemerkt Zöllner S. 484 seiner Abhandlung selbst: »wird die Pupille des einen Auges durch Anwendung von Atropin erweitert, so ist es trotz des hierdurch bewirkten, sehr bedeutenden Unterschiedes der Oeffnungen möglich, durch Beleuchtung dieses Auges auf demselben Blau zu sehen.« Diess scheint mir, wie ich offen gestehe, in directem Widerspruche mit der Zöllner'schen Erklärung. Endlich wird sich im Folgenden zeigen, dass eine ungleiche Erleuchtung beider Augen gar nicht einmal wesentlich ist, um die dem Auge *N* eigenthümliche Färbungserscheinung hervorzubringen, sondern dass dieselbe unter günstigen Umständen auch bei gleich gehaltener Beleuchtung beider Augen durch den ungleichen Lichteinfluss auf die verschiedenen Stellen der Netzhaut in jedem Auge für sich, in beiden zugleich, entstehen kann. Hiernach glaube ich, dass die Zöllner'sche Erklärung überhaupt zu verlassen ist; wie denn Zöllner selbst in seiner zweiten Notiz nach Kenntnissnahme von der Brücke'schen Erklärung geneigt ist, diese wenigstens m i t gelten zu lassen.

Wenden wir uns nun zu dieser und der Brewster'schen Erklärung, welche der Brücke'schen noch vorangegangen ist.

Brewster schliesst seine Erklärung dahin ab: »aus diesen Resultaten ist klar, dass, wenn die Netzhaut durch starkes Licht gereizt wird, der von dem Lichte nicht getroffene Theil dieser Membran theilweis für alle Farben, im stärksten Grade für die rothe, unempfindlich gemacht wird. Hieraus folgt, dass ein weisser Papierstreif eine bläulichgrüne, nämlich die complementäre Farbe des rothen Lichtes annimmt. Die rothe Farbe, welche der Papierstreif bei Betrachtung mit dem geschützten

Auge zeigt, ist die natürliche Farbe der Lichtflamme, erhöht durch den Contrast des grünen Streifes.«

Brücke stellt seine Erklärung dahin: »dass der Schein des Grünen (im Auge *N*) veranlasst werde durch das rothe Licht, welches durch Sklerotica und Choroidea auf die Retina fällt, und sie relativ unempfindlich macht gegen die rothen Stralen des durch die Pupille einfallenden Lichtes.«

Beide Erklärungen stimmen dahin überein, dass die grüne Farbe des weissen Bildes im Auge *N* als inducirt (in Brücke's Sinne) durch eine nachbarliche Lichteinwirkung in diesem Auge angesehen wird, weichen aber darin von einander ab, dass Brewster für das inducirende Licht das durch die Cornea in das Auge fallende begrenzte Bild der Flamme, Brücke das durch die Sklerotica und Choroidea roth durchscheinende über der ganzen Netzhaut zerstreute Licht der Flamme ansieht; jener die Induction von der Stärke, dieser von der Farbe des inducirenden Lichtes abhängig macht.

Als eine gemeinsame Schwierigkeit beider Erklärungen erscheint nun von vorn herein der Umstand, dass kein Princip darin enthalten ist, warum nicht ein von einer Kerze beleuchteter und mit der Kerze zugleich erblickter weisser Streifen auf schwarzem Grunde unter allen Umständen danach grün erscheinen sollte, warum es einer einseitigen Lichtstellung und des Doppelbildes dazu bedarf, wie es doch bei den bisher bekannten Anstellungsweisen und Erfolgen des Versuches der Fall ist.

In der That kann man sich leicht von der Erfolglosigkeit sämmtlicher folgender Versuchsweisen überzeugen:

Man stelle a) das Licht oder die Lampe wie beim gewöhnlichen Lesen oder Schreiben vor sich hin, und betrachte einen davon erleuchteten weissen Streifen auf schwarzem Grunde, den man vor sich hat, einfach oder als Doppelbild, oder stelle b) zwei Lichter zu beiden Seiten von den Augen in entsprechender Entfernung auf, und verfahre eben so; oder man schliesse c) das Auge *E*, ehe man das Licht zur Seite des Auges *N* stellt und sehe unter Forterhaltung jenes Schlusses einen weissen Streifen auf schwarzem Grunde mit *N* an*); oder man behalte d) zwar

*) Der Versuch, wo man das Auge *E* eher verdeckt, ehe man das Licht an *N* bringt, ist wohl von einem solchen zu unterscheiden, wo man

beide Augen offen, wende aber vor Anbringung des Lichtes an N die Hand in der Art als Schirm zwischen beiden Augen an, dass das Auge E das weisse Feld nicht sehen kann und dass mithin trotz der Verschiebung der Sehaxen blos ein Bild erscheint; oder endlich man fixire e) das weisse Feld in gewöhnlicher Weise mit beiden Augen, so dass es einfach erscheint, während das Licht seitlich von N steht.

In keinem dieser Fälle wird man entschiedene Färbungsphänomene wahrnehmen.

Nun kann man allerdings die Unwirksamkeit des letzten Falles daraus erklären, dass die im Sehfelde beider Augen coincidirenden Complementärfarben im Eindrucke sich neutralisiren, sollte dagegen in allen übrigen Fällen Grün am Bilde im Auge N oder den beiden zugleich als N angewandten Augen erwarten. Diese Schwierigkeit vermindert sich indess für beide Erklärungsweisen gemeinsam zunächst durch die Bemerkung, dass nach bestimmten Thatsachen, die ich in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen mitgetheilt habe (S. 569 no. 9), die Haltbarkeit und mithin auch unstreitig das Erscheinen einer subjectiven Nach- oder Nachbarfarbe in einem Auge sehr dadurch begünstigt werden kann, dass man der complementären subjectiven Farbe zugleich Anlass oder doch die Möglichkeit giebt, im andern Auge mit zu erscheinen (was man unter den allgemeinen Begriff der Contrastphänomene subsumiren kann), wogegen die Intensität oder Nachhaltigkeit der subjectiven Erscheinung in jedem Auge für sich sehr dadurch beschränkt wird, dass im andern Auge ein Anlass zum Erscheinen derselben subjectiven Farbe gegeben ist, wobei mit in Rücksicht kommt, dass nach Thatsachen in eben jener Abhandlung jede im einen Auge entstehende Farbe die complementäre im anderen inducirt, welche jedoch im Allgemeinen schwächer als die inducirende ist. In allen jenen unwirksamen Fällen nun wird das Erscheinen der complementären Farbe im Auge E zum Grün des Bildes im Auge N entweder dadurch unmöglich gemacht, dass man das Auge E ganz schliesst und hiermit das weisse Licht beseitigt, welches die Complementärfarbe herzugeben hätte, oder dass man beide Augen als N anwendet, indem man beide

es später nach Erzeugung der beiden complementären Bilder verdeckt. Hier macht sich die bekannte Persistenz geltend.

von beiden Seiten oder von vorn gleich beleuchtet. Wirklich erscheint sofort das Grün im Auge *N*, zugleich mit dem Rothgelb in *E*, wenn man bei Versuch c) das Auge *E* endlich öffnet, so dass ein Doppelbild erscheint, oder bei Versuch d) durch Wegziehen der Hand dasselbe sichtbar macht.

Subjective Farben erscheinen überhaupt nicht unter allen Umständen gleich leicht, und man kann z. B. daraus, dass unter den meisten Umständen beim gewöhnlichen Sehen mit zwei Augen in der Nachbarschaft einer gegebenen Farbe keine Complementärfarbe erscheint, nicht schliessen, dass sie nicht wirklich inducirt werde, sondern nur, dass sie zu schwach sei, um unter den Umständen des Versuches bemerklich zu werden. Sie kann aber zu schwach werden, wenn entweder der Grund, auf dem sie inducirt werden soll, zu wenig weisses Licht hergiebt, um die Complementärfarbe durch Neutralisirung der Gleichfarbe darin in merklichem Grade zu erzeugen, oder wenn er zu viel weisses Licht enthält, wodurch die erzeugte Complementärfarbe zu sehr verdünnt wird, Principien und Erfahrungen zufolge, die ich in meinen Abhandlungen über farbige Schatten dargelegt habe.

Hiernach kann man jene unwirksamen Fälle so deuten, dass die Erzeugung des subjectiven Grün im Auge *N* oder beiden zugleich als *N* angewendeten Augen unter den angegebenen Versuchsumständen nicht wirksam genug von Statten gehe, um nicht der Mitwirkung des Contrastes gegen eine sichtbare Complementärfarbe im andern Auge zum Deutlichwerden zu bedürfen.

Doch würde diese Erklärung, welche sich blos auf die zu grosse Schwäche, nicht das Fehlen der inducirenden Wirkung in den angegebenen Versuchsfällen beruft, precär bleiben, wenn solche nicht durch angemessene Verstärkung bemerklich gemacht werden könnte. Diess nun aber ist auch wirklich der Fall. In den angeführten unwirksamen Fällen war immer vorausgesetzt, dass das Licht oder die Lampe oder die beiden Lichter ungefähr eben so weit vom Auge oder den Augen als beim gewöhnlichen Lesen oder Schreiben stehen, was bei gewöhnlicher Anstellung des Versuches mit einseitiger Stellung des Lichtes unter Offenhaltung beider Augen hinreicht, den Farbenunterschied deutlich zu geben. Nun aber war ich sehr überrascht, als ich zwei brennende Wachsstockstücke ganz nahe an beide

Digitized by Google

äussere Augenwinkel brachte, indess ich ein weisses Feld auf schwarzem Grunde vor mir zum Doppelbilde aus einander geschoben hielt, zu sehen, dass das Grün an beiden Bildern nicht nur merklich, sondern, namentlich bei einiger Verlängerung des Versuches, intensiv, ja leuchtend schön ward. Diesen Versuch habe ich, ohne ihn gar zu anstrengend für die Augen zu finden, an verschiedenen Tagen immer mit gleichem Erfolge wiederholt. Dasselbe Resultat erhielt ich wiederholt, wenn ich eine einzige Kerze so nahe vor beide Augen hielt, als ich es vertragen konnte, und das Doppelbild eines weissen Feldes unmittelbar vor den Augen betrachtete (Versuch a, S. 38). Auch bedurfte es bei beiden Versuchsweisen nicht des Auseinanderschiebens eines Doppelbildes, sondern die grüne Farbe entstand auch am einfach mit beiden Augen fixirten Bilde; doch bemerkte ich, wenn ich abwechselnd das Doppelbild zusammen- und auseinanderschob, dass letzternfalls unter schwacher Verdunkelung der Bilder die Grünfärbung noch etwas stärker ward, als ersternfalls. Nicht minder entwickelte sich allmälich Grün an dem einfachen weissen Bilde, wenn ich (nach Vers. c) das Auge *E* schloss, oder (nach d) das Bild vom Auge *E* mit der Hand abblendete, ehe ich ein Licht einseitig an *N* anbrachte, wenn es nur hinreichend nahe geschahe. Aber die Farbe entwickelte sich langsamer, ward nicht so intensiv als bei zweiseitiger naher Beleuchtung und wuchs bei Versuch c) an Intensität, wenn ich nach Oeffnung des Auges *E* ein Licht zu diesem hinzubrachte, so dass die Beleuchtung zweiseitig ward. Hingegen konnte ich selbst bei ganz nahem einseitigen Lichte am Auge *N* keine oder nur eine gelbe Färbung am weissen Felde erhalten, so lange ich es (nach Vers. e) einfach mit beiden Augen fixirte, wogegen die grüne Farbe sogleich oder nach einigem Verweilen sichtbar ward, wenn ich dann das Auge *E* verdeckte oder wenn ich durch Näherung eines zweiten Lichtes dann die Beleuchtung zweiseitig machte. Unstreitig ist diese gleiche Wirkung eines gerade entgegengesetzten Verfahrens sehr merkwürdig, aber doch leicht erklärlich, sofern beidesfalls die Compensation der grünen Farbe im Auge *N* durch eine complementäre im Auge *E* beseitigt ward.

Als ich das Doppelbild eines schwarzen Feldes auf weissem Grunde bei seitlich von beiden Augen, ganz nahe daran, gehaltenem Lichte auseinanderschob, notirte ich bei einem ersten

Digitized by Google

Versuche, dass beide Bilder schwarz geblieben seien. Bei genauerer Aufmerksamkeit in späteren Versuchen jedoch konnte ich mir wohl einer röthlichen Nüance des Schwarz bewusst werden, und im Allgemeinen war dieselbe vorwiegend bei einem Bilde, unstreitig in dem Auge, welches zufällig stärker als das andere vom Licht betroffen wurde. Immer aber entwickelte sich um die schwarzen Bilder über der ganzen Ausdehnung des weissen Grundes, wozu ein weisser Foliobogen diente, eine deutlich grünliche Färbung.

Ruete erhielt bei diesen Versuchen, so weit er sie wiederholte, ganz dieselben Resultate. Intensives Grün bei zweiseitiger Beleuchtung der Augen sowohl am ungleich fixirten als zum Doppelbilde auseinandergeschobenen weissen Felde auf schwarzem Grunde, auch bei einseitiger Beleuchtung von *N* unter Schluss von *E*, nicht aber bei Offenhaltung von *E*, wenn das Bild ungleich mit beiden Augen fixirt wurde.

Dabei muss ich freilich ausdrücklich bemerken, dass weder Volkmann, noch Hankel, noch dessen Amanuensis bei Wiederholung des Versuches mit zweiseitigem Lichte ganz nahe an den Augen oder einem Lichte ganz nahe vor den Augen die Grünfärbung des weissen Doppelbildes erhalten konnten, die sie doch bei einseitiger Beleuchtung erhielten. Aber diese negativen Resultate können die von Ruete und mir erhaltenen positiven nicht aufheben, sondern beweisen blos dasselbe, was ich unter anderer Form selbst finde, dass bei nicht hinreichend kräftiger Wirkung der Erfolg nicht entsteht; unstreitig aber wird zum leichten Eintreten des Erfolgs wie bei allen subjectiven Phänomenen auch eine leichte Empfänglichkeit, gewöhnlich mit sog. Schwäche der Augen verbunden, vorausgesetzt. Volkmanns und Hankels Augen sind aber viel kräftiger als meine.

Als eine ganz wesentliche Vorsicht bei diesen und überhaupt allen Abänderungen des seitlichen Fenster- und Kerzenversuches ist hervorzuheben, dass vor Anstellung jedes neuen Versuches die Nachwirkung des früheren erloschen oder durch Anstellung eines Versuches in entgegengesetztem Sinne compensirt sein muss; sonst kann man Farbenphänomene, die der Nachwirkung des früheren angehören, fälschlich dem neuen zuschreiben. Auch möchte ich empfehlen, bei vergleichender Anstellung einer Mehrzahl von Versuchen hinter einander, um die relative Stärke des Erfolges verschiedener Versuchsweisen zu

Digitized by Google

prüfen, nicht ohne Weiteres die später angestellten mit den früher angestellten für vergleichbar zu halten, da die Empfindlichkeit durch die Fortsetzung der Versuche selbst abgeändert wird; sondern die Regel des abwechselnden Verfahrens zu befolgen.

Durch den Erfolg vorstehender Versuche wird nun jede Erklärung des seitlichen Fenster- und Kerzenversuches überhaupt ausgeschlossen, welche die Färbung des Bildes im Auge *N* von der Verschiedenheit seiner Helligkeit gegen das Bild im Auge *E* secundär abhängig machen möchte oder, wie es bei der Zöllner'schen der Fall ist, eine ungleiche Wirkung des Lichtes auf beide Augen fordert. Ruete machte mich darauf aufmerksam, dass, wenn man im finstern Zimmer durch zwei Kerzen zwei Schatten von ungleicher Helligkeit neben einander erzeugt, der dunklere gegen den andern bläulich erscheine, was sich wohl daraus erklären lässt, dass die inducirende Wirkung des helleren, rothgelb erleuchteten, Schattens auf den dunkleren Nachbarschatten dessen directe Wirkung überwiegt. Es liess sich also etwa denken — und bei den Zweifeln, die nach Folgendem sowohl gegen Brewster's als Brücke's Erklärung noch übrig bleiben, sind anderweite Möglichkeiten zu berücksichtigen — dass auch beim seitlichen Kerzenversuche das helle rothgelbe Bild im Auge *E* die Complementärfarbe auf dem dunklern Bilde im Auge *N* inducire. Aber abgesehen, dass diese dann blau nicht grün sein müsste, und dass sich auf diese Weise die Färbung des Bildes im Auge *N* beim seitlichen Fensterversuche unter Einwirkung farblosen Tageslichts nicht erklären würde, so beweisen auch die vorigen Versuche evident, dass die Entstehung der grünen Farbe selbstständig im Auge *N*, nicht durch Induction Seitens *E* erfolgt, und dass sie keiner ungleichen Helligkeit der Bilder, ja keines Doppelbildes überhaupt bedarf.

Fassen wir nun nach Beseitigung der angegebenen Schwierigkeit die Brewster'sche und Brücke'sche Erklärung näher ins Auge, so erhebt sich gegen die erstere von vorn herein der Einwand, dass es ein neues, bisher durch positive oder zuverlässige Thatsachen noch nicht begründetes, Princip wäre, dass ein helles Licht abgesehen von aller Färbung (die wenigstens bei dem seitlichen Fensterversuche, wenn der Himmel trübe ist, nicht in Betracht kommen kann) vorzugsweise für die minder brechbaren Stralen, Roth oder Rothgelb, in seiner Nachbarschaft

unempfindlich machen und daher Grün oder Blau induciren soll. Indessen ist diese Erklärung doch nicht ohne Weiteres zu verwerfen; es wäre an sich sehr möglich, und könnte selbst durch Analogien unterstützt werden, dass, indem der Contrast zwischen Licht und Dunkel das Helligkeitsverhältniss abändert, er diess nicht für alle Farbenstralen in gleicher Weise thäte, und also hiermit einen Farbenunterschied hervorriefe, der aber aus entsprechenden Gründen als andere subjective Phänomene (s. oben S. 40) nur unter günstigen Umständen bemerklich würde. Soll sich doch nach Nardo*) wirklich jede nachbarliche Ungleichheit der Intensität des Lichtes unter günstigen Umständen von selbst mit einer Färbungserscheinung associiren und das schwächere Licht bläulich erscheinen. Freilich lassen seine Versuche Einwände zu, und Oppel konnte unter Anwendung wirklich farblosen Lichtes keine Bestätigung der Nardo'schen Angaben erhalten, daher sich nicht darauf fussen lässt. Indess kann die Sache ohne sehr abgeänderte Versuche, die ich andern Augen überlassen muss, doch noch nicht für abgemacht angesehen werden.

Was freilich von vorn herein gar nicht zu Brewster's Erklärung zu passen scheint, indess es der Brücke'schen zur Stütze gereicht, ist die rothe Färbung, welche ein schwarzes Feld auf weissem Grunde beim seitlichen Kerzen- wie Fensterversuche im Auge *N* zeigt. Denn, kann man fragen, wie ist es mit Brewster's Princip in Uebereinstimmung zu bringen, dass eine Flamme in benachbartem Weiss Grün, in benachbartem Schwarz Roth oder Rothgelb inducirt. Hingegen kann nach Brücke's Princip das Roth des schwarzen Feldes einfach als die Farbe des vom roth durchscheinenden Lichte erhellten Augengrundes selbst angesehen werden. Aber durchschlagend ist diess doch auch nicht gegen Brewster; indem hierbei ähnliche Gesichtspunkte, als bezüglich der Helligkeit in Frage kommen. Einmal wäre denkbar, dass das Grün, was die Flamme im Auge *N* in dem weissen Grunde inducirt, und was bei Schluss des Auges *E*

*) »Nota sulle ombre colorate, ottenute col solo concorso di luci bianche, del Dott. Nardo, in den Atti dell' I. R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti Vol. IV. Ser. III.« — Ich kenne diese Abhandlung nur aus dem kritischen Berichte von Oppel darüber in dem Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt. 1859. S. 65.

Digitized by Google

sofort deutlich wird*), dann secundär Roth in dem von ihm umschlossenen Schwarz inducirte; zweitens deckt sich das Schwarz des Bildes im Auge *N* binocular mit dem gelb oder rothgelb beleuchteten weissen Grunde im Auge *E*, dessen Einfluss dadurch bewiesen wird, dass das Roth im schwarzen Bilde des Auges *N* nicht oder nicht deutlich erscheint**), wenn man die Flamme an das Auge *N* bringt, nachdem das Auge *E* zuvor geschlossen war. Dass aber das Bild vielmehr roth als rothgelb erscheint, wäre immer noch durch seinen Contrast mit dem umgebenden Grün erklärlich. Nur dass freilich die Möglichkeit jener secundären Induction noch nicht erwiesen ist, und dass nach den im 7. Capitel meiner Abhandlung über das binoculare Sehen zusammengestellten Thatsachen ein begrenztes Bild in einem Auge bei binocularer Deckung mit einem ausgedehnten Grunde im andern Auge zwar gewiss, aber doch nur wenig durch die Beschaffenheit dieses Grundes modificirt erscheint.

Sollte nun hingegen die Brücke'sche Erklärung überhaupt zweifelsfrei sein, so wäre es natürlich unnöthig, die aus mehreren Gesichtspuncten unwahrscheinlichere Brewster'sche weiter zu beachten. So sinnreich aber und durch so gut gewählte Versuche unterstützt die von Brücke aufgestellte Erklärung ist, bleiben freilich auch bei ihr manche nicht unerhebliche erst noch zu erledigende Schwierigkeiten, die ich unten hervorhebe, nachdem ich zuvor hervorgehoben, was ausser dem eben bemerkten Umstande zu ihren Gunsten spricht, und schliesslich doch nöthigen könnte, bei ihr stehen zu bleiben.

Unter den mannichfachen Thatsachen, welche der Urheber derselben für sie anführt, erscheint wohl am schlagendsten die, dass seitliches Zwischeneinschieben eines rothen Glases zwischen Auge *N* und Kerze den Farbenunterschied der Bilder bestehen lässt, Zwischeneinschieben eines grünen ihn hebt; so wie, dass er bei monochromatisch gelbem Lichte nicht eintritt. Den ersten Versuch habe ich mit gleichem Erfolge wiederholt. Indess könnte man gegen die Beweiskraft desselben einwenden,

---

*) Desshalb, weil es sich dann nicht mehr binocular mit dem Rothgelb des Grundes im Auge *E* deckt, was von der directen Beleuchtung abhängt.

**) Ich habe nicht genug Versuche angestellt, um behaupten zu können, dass es hierbei gar nicht erscheinen könne; aber der Unterschied von den Fällen, wo das Auge *E* offen gehalten wird, ist zweifellos.

dass, da bei diesen Versuchen farbiges, respectiv grünes oder monochromatisch gelbes, Licht von der Seite her nicht blos durch Sklerotica und Choroidea, sondern auch direct durch die Pupille eindringt, und das Flammenbild selbst diese Farbe damit annimmt, eine Neutralisation oder jedenfalls wesentliche Abänderung der inducirenden Wirkung der Flamme entstehen müsse, falls man diese im Sinne irgend einer Modification der Brewster'schen Ansicht in Anspruch nehmen wolle.

Eine bestimmtere Entscheidung schien mir auf eine solche Versuchsweise zu begründen, dass man das Kerzenlicht zum Auge *N* ohne Anwendung von Farbengläsern nur durch die Pupille, aber nicht die Sklerotica und Choroidea, gelangen lässt, indem man es zugleich vom Auge *E* durch einen Schirm zwischen den Augen abhält. Nach Brewster's Erklärung sollte diess keinen Unterschied zwischen der gewöhnlichen Anstellungsweise begründen, nach Brücke's Erklärung sollte der Farbenunterschied der Bilder dann aufhören. Der Erfolg scheint mir mehr für Brücke als Brewster zu sprechen; aber doch nicht so rein, dass ich allein darauf fussen möchte.

Der Versuch ward von mir in folgender Weise angestellt. In ein Blatt schwarzes Russpapier ward ein kleines Loch geschnitten, das Blatt möglichst hart an das Auge *N* so angelegt, dass es frei durch das Loch durchblicken konnte, Sklerotica und Choroidea aber verdeckt waren, und das Blatt übrigens so umgebogen, dass der umgebogene Theil als Schirm zwischen Auge *E* und Licht trat. Dabei ist wesentlich, Acht zu haben, dass das Licht noch wirklich vom Auge *N* gesehen wird, und dass es nicht zugleich vom Auge *E* gesehen wird, was man durch abwechselnden Schluss des einen und andern Auges verificirt. Als Object diente ein kleines weisses Feld auf einer dem Auge gerade gegenüberstehenden verticalen schwarzen Fläche. Unter diesen Umständen entstand bei einem Loche von 3 par. Linien Durchmesser, also ungefähr von der Grösse der Cornea, am Bilde im Auge *N* eine graugrüne Färbung, und zwar ward der grüne Schein bei einiger Fortsetzung des Versuches sehr entschieden; wie ich zweimal an verschiedenen Tagen beobachtete. Nahm ich das Loch nur von 1½ Lin. Durchmesser, also wenig grösser als der Pupillendurchmesser, so erschien das Bild im Auge *N* anfangs n u r graulich, nahm aber doch allmälig eine sehr schwache, aber von mir für unzweideutig gehaltene grünliche

Digitized by Google

Nüance an, was ich ebenfalls an zwei verschiedenen Tagen beobachtet habe, jedoch nicht vorgleichungsweise mit dem vorigen Versuche, da ich solche Versuche überhaupt nicht in Mehrzahl hinter einander anstellen darf. Nahm ich endlich, wieder an ein paar andern Tagen, das Loch nur von Stecknadelkopfgrösse, so schien mir das Grau des Bildes im Auge *N* immer noch mit einer sehr schwachen Farbennüance behaftet, die ich aber nicht recht festzuhalten, und unzweideutig zu bestimmen vermochte, da sie bei kleinen Aenderungen der Lage des Auges *N* schwankte. Ich möchte sagen, dass es zwischen Grünlich und Violet war; ohne darauf Gewicht legen zu wollen.

Ruete wiederholte den Versuch mit einem am Auge *N* angebrachten Augenhütchen von Caoutchouc, in welchem eine kleine kaum pupillengrosse Oeffnung zum Durchblicken enthalten war, und konnte auch keine Grünfärbung mehr am Bilde in diesem Auge entdecken.

Unstreitig nun stimmt die Abnahme des Grün fast bis zum Verschwinden mit Verkleinerung der Oeffnung bei meinen eigenen Versuche und der fehlende Erfolg bei Ruete's Versuch vielmehr zu Brücke's als Brewster's Erklärung; indess man von anderer Seite die noch übrige grünliche Färbung bei meinen Versuchen in entgegengesetztem Sinne geltend machen könnte. Aber dieser Rest grünlichen Scheins lässt wohl noch eine, mit Brücke's Erklärung verträgliche, Deutung zu. Warum sollte nicht das durch die uvea der (bei mir blaugrauen) Iris durchscheinende Licht gleichen Erfolg haben können, als das durch die Choroidea durchscheinende; bei der corneagrossen Oeffnung musste es aber noch voll durch die Iris durchscheinen, und selbst bei der kleineren Oeffnung, namentlich wenn sie nicht gerade central die Pupille deckte, noch etwas hindurchfallen; indess bei der kleinsten der grünliche Schein überhaupt nicht mehr unzweideutig, und auch bei der etwas grösseren nicht viel über dem Problematischen war. Da ferner der grünliche Schimmer mit der Dauer der Betrachtung zunahm oder sich erst entwickelte, so könnte ja wohl die auf sein Sehen gerichtete Intention etwas zu seiner subjectiven Erzeugung mitgewirkt oder sie verschuldet haben. Beide Möglichkeiten sind anzuerkennen, wenn schon ich der letzteren aus verschiedenen Gründen keine Wahrscheinlichkeit beilege. Inzwischen würde doch noch eine abändernde Wiederholung des Versuches nöthig sein, um ihn

Digitized by Google

für ganz entscheidend ansehen zu können (wovon ich selbst abstrahiren muss, weil ich diese Modificationen des Versuches überhaupt zu anstrengend für mich finde), indem noch folgende Punkte dabei in Rücksicht kommen.

Das Licht muss bei diesen Versuchen, wo das Auge *N* durch eine enge Oeffnung sieht, in sehr kleinem Winkelabstande vom weissen Felde stehen, um noch mit ihm zugleich vom Auge *N* durch die Oeffnung hindurch gesehen werden zu können. Es hat mir aber bei einigen Versuchen, die ich doch bei Weitem nicht hinreichend habe vervielfältigen und vergleichbar halten können, um sie für entscheidend anzusehen, geschienen, dass diese Stellung, auch bei Versuchen mit freiem Auge, überhaupt ungünstiger für die Entstehung der Grünfärbung ist, als wenn man das Licht mehr seitlich vom weissen Felde und von der Pupille anbringt, und es wären also, unter Wahrung der S. 42 angegebenen Vorsichten, Versuche darauf zu richten, ob nicht der schwache Erfolg bei den Versuchen mit enger Oeffnung wesentlich nur von diesem Verhältnisse abhängt, womit allerdings die Beweiskraft für Brücke wegfallen würde.

Ferner ist gewiss, dass, wenn man ein Doppelbild erzeugt, während man mit einem Auge durch eine sehr enge Oeffnung sieht, Färbungserscheinungen eintreten können, welche bisher nach keinem, auch nach Brücke's Princip nicht, hinreichend erklärbar sind, und durch eine Complication, die sie mitführen, die Erscheinung der Grünfärbung noch auf einem andern Wege als durch Abhaltung des Lichtes von Sklerotica und Choroidea beschränken könnten, in welcher Beziehung zu prüfen wäre, ob das Auge *N* beim Hindurchsehen durch eine enge Oeffnung in einem schmalen Streifen, der den grössten Theil der Sklerotica noch unbedeckt liesse, nicht eine eben solche Beschränkung der Grünfärbung wahrnehmen würde, als bei Bedeckung der ganzen Sklerotica.

In meiner Abhandlung über das binoculare Sehen (S. 465) habe ich nämlich folgender Erscheinung gedacht, die ich auch bei neueren Versuchen bestätigt finde. Wenn man bei Vorderstellung gegen das Fenster bei blauem oder bedecktem Himmel das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinanderschiebt, indess man mit einem Auge durch ein Nadelloch in einem Kartenblatte sieht, so hat das mit diesem Auge gesehene dunkle Bild oftmals eine violete oder lila Nüance,

Digitized by Google

wie auch Ruete und Grabau fanden. Freilich kann ich sie nicht an jedem Tage gleich deutlich finden, und manchmal möchte ich nur Grau anerkennen. Dagegen erhalte ich sie sicher und intensiv, wenn ich denselben Versuch Abends bei Kerzenlicht anstelle; das dunkle Bild erscheint entschieden lila oder violet; das helle gelblich weiss. Unstreitig kann man in diesem Falle die violete Färbung des dunklen Bildes im einen Auge von einer inducirenden Wirkung Seitens des gelben Bildes im andern Auge abhängig machen; die aber dann auch als Complication bei den obigen Versuchen, welche zur Prüfung der Brücke'schen Erklärung angestellt wurden, anzuerkennen sein würde, und die ich sogar allein in Anschlag bringen würde, wenn der, obschon minder auffällige und sichere, Erfolg bei Tageslichte dieselbe Erklärung zuliesse. Denn aus Versuchen in meiner Abhandlung über das binoculare Sehen (Abschn. XIV) geht hervor, dass in der That eine solche Induction von einem Auge zum andern herüber statt hat, um so leichter, je mehr verdunkelt das Weiss ist, in dem die Farbe zu induciren ist, und folgende einschaltungsweise Versuche, die an sich einiges Interesse darbieten, stehen damit in Beziehung.

Wenn ich die Lampe wie beim gewöhnlichen Lesen oder Schreiben gerade vor mir habe und ein weisses Feld auf schwarzem Grunde als Doppelbild betrachte, so kann ich bei dieser Entfernung der Lichtquelle keine deutliche Färbung des Bildes erhalten. Nehme ich aber eine recht dunkle graue Glascombination vor ein Auge, so färbt sich das Bild in diesem Auge unter Verdunkelung sogleich blau- oder rothviolet, indess das andere lichte gelblichweiss ist. Mit der Dauer der Betrachtung habe ich an einem Tage das Violet in wiederholten Versuchen immer röther werden und manchmal aus anfangs fast Blau, zuletzt in fast Roth übergehen sehen, wobei das Gelb des andern Bildes zugleich deutlicher ward. An einem andern Tage konnte ich einen solchen Wandel nicht deutlich bemerken. Bei schwarzem Felde auf weissem Grunde ward das Bild im hellen Auge braunroth, im andern tief schwarz, wie es mir schien mit einem Stich ins Blaue. Dieser Erfolg rührte nicht von einer schwachen Färbung her, welche die grauen Gläser noch haben, denn er tritt selbst bei meinen farblosesten grauen Gläsern ein, und selbst dann noch in wesentlich gleicher Weise, wenn ich unter meinen Gläsern die wähle, die einen schwach grünlichen Schein haben. Nur muss jedenfalls die Verdunkelung stark genug sein. Ich habe Verdunkelungen angewandt, wodurch das Licht auf $^1/_6$ oder selbst $^1/_{20}$ reducirt wurde.

Ein entsprechender Erfolg lässt sich sehr schön in Nachfarben ohne graue Gläser erhalten. Ich schliesse ein Auge etwa $^1/_4$ Minute und blicke mit dem andern während dessen auf den hellen Milchglasschirm meiner vor mir stehenden Studierlampe. Dann öffne ich jenes Auge und schiebe

Digitized by Google

das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwarzem Grunde auseinander. Das im ausgeruhten Auge erscheint lichthell und intensiv gelb, das im andern, ermüdeten und dunkler sehenden, ganz dunkel violet.

Stelle ich den Versuch mit den grauen Gläsern bei Tageslicht unter Vorderstellung gegen das Fenster an, so kann ich unter Anwendung einer Combination meiner farblosesten Gläser, welche nur 0,17 Licht durchlässt, keine Färbung erhalten; mit dunkleren Combinationen aber wegen der nicht ganz fehlenden Färbung derselben nichts Sicheres constatiren.

Unter Anerkennung, dass nach der Gesammtheit der vorigen Thatsachen die Brücke'sche Erklärung sich im Ganzen als die wahrscheinlichere darstellt, gedenke ich schliesslich noch der theoretischen Schwierigkeiten, die doch erst noch zu erledigen wären, um Alles dabei aufs Reine gebracht zu finden, ohne damit etwas Bindendes gegen diese Erklärung aufgestellt haben zu wollen, da ich vielmehr selbst versuchen will, den Schwierigkeiten zu begegnen, soweit ich es vermag.

Erstens. Das durch die Augenhäute roth durchscheinende Licht muss sich über die ganze Netzhaut zerstreuen, mithin auch über das Bild des auf schwarzem Grunde liegenden weissen Feldes im Auge *N* mit verbreiten; und es wird bei Brücke's Erklärung gefordert, dass die Wirkung dieses objectiven Roth auf dem Weiss durch die inducirende Wirkung des nachbarlichen Roth, was sich über den benachbarten schwarzen Grund verbreitet, nicht nur compensirt, sondern auch überboten werde, da man doch eine Compensation als Maximum erwarten sollte, um nicht die Wirkung grösser als die Ursache erscheinen zu lassen.

Indess kann man bemerken, dass das durch die Augenhäute durchscheinende Roth, was sich über das Bild des weissen Feldes im Auge *N* mit verbreitet, hier durch das Weiss dieses Bildes stark verdünnt ist, in der Umgebung hingegen unverdünnt wirkt, und diess könnte das Uebergewicht der inducirenden Wirkung Seitens des letztern Roth begründen, wozu frühere Versuche von mir (in Pogg. Ann. L. 473) eine gute Erläuterung geben; wogegen freilich anderseits zu bemerken ist, dass auch die inducirte Farbe durch das Weiss verdünnt und dadurch schwerer sichtbar wird; daher bei Versuchen mit farbigen Schatten im finstern Zimmer, wo ein Doppelschatten durch zwei Oeffnungen im Laden erzeugt wird, wovon eine frei, die andere mit einem Farbenglase versetzt ist, die Farbenintensität des Complementärschattens zwar bis zu gewissen Grenzen mit der Grösse der tageshellen Oeffnung wächst, über gewisse

Digitized by Google

Grenzen hinaus aber wieder abnimmt. Ist hiernach der Einwand noch nicht ganz erledigt, so wird er doch auch nicht als durchschlagend anzusehen sein. Wichtiger ercheint folgender Einwand:

Zweitens. Bei Anstellung des seitlichen Kerzenversuches mit dem weissen Felde auf schwarzem Grunde nimmt man um die beiden Bilder des weissen Feldes weder als Randschein noch in gleichförmiger Verbreitung das Geringste von Roth wahr; während das Feld im Auge *N* deutlich, ja unter Umständen intensiv grün, im andern röthlichgelb, erscheint. Auch wo ich nach der Versuchsweise S. 41 die Bilder in beiden Augen grün sehe, erscheint kein Roth darum. Kann aber wohl, darf man sich fragen, ein nicht sichtbares Roth ein intensives Grün in der Nachbarschaft induciren? Diess wäre unstreitig sehr merkwürdig, und dürfte, wenn es der Fall sein sollte, schlagend gegen die wesentliche Abhängigkeit inducirter Nachbarfarben von einer Täuschung des Urtheils sprechen; aber von vorn herein wahrscheinlich ist es nicht.

Allerdings lässt sich daraus, dass bei Anstellung des seitlichen Kerzenversuches mit einem schwarzen Felde auf weissem Grunde das Bild im Auge *N* roth erscheint, schliessen, dass wirklich objectiv oder subjectiv Roth auf dem scwarzen Grunde vorhanden ist, welches nur bei begrenztem Felde leichter sichtbar ist, als bei ausgedehntem; aber die Schwierigkeit, dass bei weissem Felde auf schwarzem Grunde ein nicht sichtbares Roth ein sichtbares Grün inducirt, wird dadurch nicht gehoben.

Nun liesse sich allerdings als möglich ansehen, dass die Verbreitung des unsichtbaren Roth über den ganzen Grund des Auges *N* die Schwäche dieses Roth in der Weise compensirt, dass trotz seiner subjectiven Unwahrnehmbarkeit doch eine wahrnehmbare Induction von Grün Seitens desselben in dem von ihm umschlossenen begrenzten Weiss statt findet; aber der Nachweis dieser Möglichkeit würde um so mehr erst directer Versuche bedürfen, als sie eine physiologische oder physische Induction bei den Simultan-Contrasterscheinungen voraussetzt, welche ich zwar meinerseits statuire, die aber von der vorzüglichsten Autorität im Gebiete der physiologischen Optik bestritten ist*).

---

*) Vergleiche über diesen Gegenstand diese Berichte 1860. S. 131.

Digitized by Google

Noch kann man folgende schon oben gelegentlich geltend gemachte Erfahrung von Brücke zur Erklärung zuziehen. Wenn man bei Anstellung des seitlichen Kerzenversuches mit schwarzem Felde auf weissem Grunde rasch hinter einander wechselnd das Auge *N* und *E* schliesst, so wird der weisse Grund im ersten Falle roth oder rothgelb, im zweiten grün, was ich bestätigt finde. Unstreitig sind Roth und Grün auch vorhanden, während *N* und *E* beide offen sind, compensiren sich aber im gemeinsamen Eindrucke. Also, kann man sagen, wird auch bei der umgekehrten Anordnung des Versuches, wo man ein weisses Feld auf schwarzem Grunde betrachtet, das Roth auf dem schwarzen Grunde im Auge *N* zwar vorhanden sein, und würde für sich merklich genug sein; wird aber durch ein inducirtes Grün auf dem Grunde im Auge *E* seinen Eindruck nicht in der Resultante geltend machen können, ohne dass diess hindert, dass es eine seiner Intensität gemässe (immerhin dann doch als physisch zu statuirende) inducirende Wirkung im Auge *N* für sich äussere. Nur verliert diese Erklärung dadurch an Gewicht, dass ich in wiederholten Versuchen mit dem weissen Felde auf schwarzem Grunde oder blossem schwarzen Grunde durch abwechselndes Verdecken des Auges *N* und *E* nicht eben so wie oben auf dem weissen Grunde einen Farbenwechsel auf dem schwarzen erzeugen konnte; der Grund blieb beidesfalls schwarz. Eben so fand es Volkmann, ungeachtet er bei weissem Grunde auch beide Farben erhielt.

Allerdings, wenn man die Oeffnung im Laden eines finstern Zimmers mit einem rothen Glase verschliesst, und eine schwarze Scheibe davor hält, erscheint sie grün (Brücke, Pogg. LXXXIV. S. 424). Aber hier findet die Induction Seitens eines sichtbaren intensiven Roth in dem schwarzen, d. i. durch das innere Augenlicht schwach erhellten, Augengrunde statt. Bei dem seitlichen Kerzenversuche aber ist es ein, wegen seiner Schwäche oder Uebertäubung durch die Induction Seitens des direct einfallenden Kerzedlichtes nicht sichtbares Roth, welches im hellen, und mit demselben Roth vermischten, Weiss sichtbares Grün induciren soll, was wesentlich andere Verhältnisse sind.

D r i t t e n s. Es lässt sich voraussetzen, dass das direct in das Auge *N* fallende, eine begrenzte Stelle erleuchtende, Lichtbild in der Umgebung Contrastwirkungen induciren muss, welche sich über das weisse Feld mit erstrecken, und wogegen man

Digitized by Google

meinen sollte, dass die des schwachen rothen Lichtes, was sich über den Augengrund verbreitet, verschwinden müsste, was der Brewster'chen Erklärung gegen die Brücke'sche zu Statten käme. Der oben bemerkte Versuch, wo man abwechselnd das eine und andere Auge verdeckt, indess ganz nahe an *N* ein Licht ist, und ein schwarzer Grund betrachtet wird, ist sehr geeignet, die Macht dieser Contrastwirkung zu beweisen. In der That, so wie man das erleuchtete Auge *N* schliesst oder verdeckt, erhellt sich der schwarze Grund augenfällig; so wie man das schattigere *E* schliesst, hüllt er sich in tiefere Nacht.

Viertens. Sowohl beim seitlichen Fenster- als Kerzenversuche bemerkt man im Allgemeinen, wenn schon es nicht immer gleich entschieden sich geltend macht, dass der Färbungsunterschied bis zu gewissen Grenzen mit der Verlängerung und Vervielfältigung des Versuches zunimmt. Diess ist aber der Natur der directen Contrastwirkungen, wozu nach Brücke das Phänomen gehören würde, gerade entgegen. Subjective Complementärschatten erscheinen im ersten Momente mit voller Stärke und allgemein schwächen sich die durch Contrast erzeugten Gegensätze mit der Dauer der Betrachtung durch eine Folgewirkung ab und können unter Umständen sogar in den Gegensatz übergehen, worüber man das dahin Gehörige in meiner Abhandlung über Contrastempfindungen in diesen Berichten (1860. S. 91 ff.) vergleichen kann.

Auch dieser Umstand schiene eher mit der Brewster'schen Ansicht zum stimmen. Denn nach früher von mir mitgetheilten Versuchen *) färbt sich ein weisser Fleck auf schwarzem Grunde selbst bei directer Betrachtung allmälig und ist also auch ein allmäliger Eintritt einer farbigen Induction oder einer allmäligen Abänderung derselben Seitens eines an sich weissen Lichtes in der Nachbarschaft zu erwarten, womit jenes Wachsthum der Farbenphänomene in Beziehung stehen könnte.

Fünftens. Da nach Brücke das durch die Augenhäute im Auge *N* roth durchscheinende, den schwarzen Augengrund erhellende, Licht das primäre ist, wovon das Grün erst in Weiss inducirt wird, und da das primäre Roth unverdünnt durch weisses Licht ist, indess das im Weiss inducirte Grün durch dieses Weiss verdünnt wird, so sollte man meinen, dass das Roth überhaupt

*) Pogg. Ann. L. 206.

Digitized by Google

unter vergleichbaren Umständen leichter zur Erscheinung kommen müsste, als das Grün, wovon aber eher das Gegentheil statt zu finden scheint.

Unter denselben Versuchsumständen (S. 38), wo wegen fehlenden Contrastes mit dem andern Auge das Grün im weissen Felde auf schwarzem Grunde nicht erscheint, erscheint auch das Roth bei schwarzem Felde auf weissem Grunde nicht. Bei ganz nahe an beide äussere Augenwinkel gehaltenen Lichtern aber erhalte ich das Grün im weissen Doppelbilde bei schwarzem Grunde deutlicher als das Roth im schwarzen bei weissem Grunde, und ersternfalls keine deutliche Rothfärbung des schwarzen Grundes um das weisse Doppelbild, hingegen letzternfalls eine deutliche Grünfärbung des weissen Grundes um das schwarze Doppelbild, was auch mit den Erfolgen übereinstimmt, die man bei einseitigem Lichte mit abwechselnder Verdeckung beider Augen erhält (vergl. S. 52).

Dieser Einwand könnte seine Erledigung dadurch finden (freilich nur unter Verstärkung des Einwandes unter 3), dass schwache Farbeneindrücke durch nachbarliche stärkere Farbeneindrücke*) und unstreitig durch nachbarliches intensives Licht überhaupt ausgelöscht werden, wonach wohl denkbar ist, dass das durch die Augenhäute durchscheinende schwache Roth in dem Schwarz nicht so leicht zum Vorschein kommt, wenn dieses Schwarz von Weiss oder überhaupt von grösserer Helligkeit umgeben ist.

Nach allem Vorstehenden scheinen die Erfolge des seitlichen Fenster- und Kerzenversuches an complicirten Bedingungen zu hängen, und die bisherigen Experimente noch so wenig zur vollständigen Analyse derselben auszureichen, dass in der That eine neue Vornahme und Untersuchung der Puncte, die dabei noch zu erledigen sind, mit Augen, die der Aufgabe gewachsen sind, erwünscht sein muss, wozu man die Anregung und den unvollständigen Beitrag durch das Vorige gestatten möge, nachdem ich den Versuch doch einmal früher behandelt habe, und eine Erledigung desselben künftig einmal wird statt finden müssen.

---

*) Vergl. meine Abhandlung über Contrastempfindungen in diesen Berichten 1860. S. 111.

Digitized by Google

Recapitulation.

Erzeugt man das Doppelbild eines weissen Feldes auf schwärzem Grunde bei ungleicher Beleuchtung beider Augen, so erscheint das Bild in dem stärker erleuchteten Auge *N* dunkler, in dem minder erleuchteten *E* heller, als das andere; jenes bläulich oder blau (bei hellem Tageslichte), grünlich oder grün (bei Lampenlicht), dieses roth, röthlich oder röthlich gelb. Der Helligkeitsunterschied der beiden Bilder lässt sich in der Hauptsache, ohne dass doch Alles dabei schon ins Klare gebracht ist, als eine Contrasterscheinung erklären (S. 31. 34), und die von Zöllner als Hauptgrund angenommene Differenz der Pupillenweite wegen ungleicher Erleuchtung der Augen ist als wesentlich einflusslos anzusehen und selbst nach ihrer Thatsache noch problematisch (S. 34 ff.). Für den Farbenunterschied sind drei verschiedene Erklärungen aufgestellt worden. Nach Zöllner hängt er ebenfalls von einem Unterschiede der Pupillenweite ab, indem nach ihm überhaupt bei abnehmender Pupillenweite die Empfindung der brechbareren Farben relativ zu überwiegen anfängt. Nach Brewster hängt er davon ab, dass das durch die Pupille des Auges *N* direct gesehene Licht für die Empfindung der minder brechbaren Stralen in seiner Nachbarschaft unempfindlich macht, demgemäss Grün, respectiv Blau, inducirt; nach Brücke davon, dass das durch die Sklerotica und Choroidea des Auges *N* roth durchscheinende Licht eine solche inducirende Wirkung auf das durch die Pupille einfallende Weiss äussert. Von diesen drei Erklärungen muss die Zöllners'che schon aus dem Grunde verworfen werden, dass der Farbenunterschied nicht eintritt, wenn man bei Auseinanderschiebung eines Doppelbildes unter Vorderstellung gegen das Fenster ein Auge mit einem grauen Glase verdunkelt (S. 37); jede anderweit versuchte Erklärung aber (etwa mit Rücksicht auf Nardo's Behauptungen), dass der Farbenunterschied der Bilder von dem Helligkeitsunterschiede der Bilder secundär abhänge (S. 43) oder überhaupt eine ungleiche Wirkung des Lichtes bei dem seitlichen Kerzenversuche wesentlich sei, um die Grünfärbung im Auge *N* hervorzubringen, wird dadurch ausgeschlossen, dass bei hinreichend starker gleicher zweiseitiger Einwirkung des Lichtes auf beide Augen und hinreichender Empfindlichkeit die Grünfärbung an beiden Bildern entsteht (S. 40 f). Die ungleiche

Digitized by Google

Beleuchtung wirkt nur dadurch günstig, dass sie das Erscheinen der Farbe im einen Auge durch den Contrast mit der complementären im andern erleichtert (S. 39). Hiermit wird zugleich eine Schwierigkeit sowohl der Brewster'schen als Brücke'schen Erklärung gehoben, als welche kein Princip enthalten, warum die ungleiche Erleuchtung beider Augen gefordert sein sollte. Die Brewster'sche Erklärung ist aber precär, weil zwar behauptet, aber nicht constatirt ist, dass helles Licht abgesehen von seiner Färbung vorzugsweise für die minder brechbaren Stralen in seiner Nachbarschaft unempfindlich macht, so dass nach Allem die Brücke'sche Erklärung als die wahrscheinlichste übrig zu bleiben scheint, zumal sich auch positive Thatsachen dafür anführen lassen (S. 45 ff.). Jedoch leidet auch sie noch an einigen Schwierigkeiten (S. 50 ff.), welche erst künftig zu erledigen sind, und von denen die wichtigste die ist, dass bei dieser Erklärung angenommen werden muss, dass ein nicht sichtbares Roth (im Grunde des Auges *N*) ein sehr deutlich sichtbares Grün in dem von ihm umschlossenen Weiss (dem weissen Bilde im Auge *N*) zu induciren vermag (vgl. S. 51). Eine volle Aufklärung des Versuches, sowohl in Betreff des Helligkeits- als Farbenunterschiedes der Bilder, ist erst von künftigen Versuchen zu erwarten.

Digitized by Google

G. Th. Fechner, *über die Correctionen bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen, der Bestimmung der Schwankungen meteorologischer Einzelwerthe um ihren Mittelwerth, und der psychophysischen Massbestimmungen nach der Methode der mittleren Fehler.*

Das Folgende macht nicht den Anspruch, dem, was Seitens der berühmtesten Mathematiker bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen theoretisch festgestellt und seitdem im allgemeinen Gebrauch ist, etwas Wichtiges zuzufügen; diess hätte ich, insofern es überhaupt noch möglich sein sollte, Mathematikern von Fach zu überlassen; dagegen soll gezeigt werden, dass eine darauf bezügliche Correction noch eine weitere nützliche Anwendung bezüglich anderer Zwecke erfahren kann, welche die Ueberschrift andeutet; die dabei erforder-derliche Modification der Correction soll hergeleitet, die Bedingungen ihrer Anwendung ins Licht gestellt, und der bisher überhaupt nur theoretisch festgestellten Correction eine experimentale Bewährung zugefügt werden, woran es seither noch ganz gefehlt hat. Endlich sollen noch zwei andere Correctionen betrachtet und entwickelt werden, welche mit der vorigen in dem einen Felde ihrer Anwendung (der Psychophysik) Platz finden können.

Zwar habe ich diesen Gegenstand bis zu gewissen Gränzen schon in meinen Elementen der Psychophysik behandelt, aber auf noch unvollkommenen Unterlagen und nach theilweise zu berichtigenden Voraussetzungen; wonach das Folgende theils eine Erweiterung, theils vollständigere Begründung, theils Berichtigung des dort vorgreiflich Vorgetragenen enthalten wird.

Um aber zu alle dem überzugehen, ist es nöthig, vom Bekannten auszugehen.

Digitized by Google

Die Genauigkeit der Beobachtungen und ihrer Resultate wird in bekannter Weise aus der Grösse und Zahl der, folgends mit Δ zu bezeichnenden, Beobachtungsfehler, wofür die Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerthe vom Mittel derselben gelten, bestimmt. Diese Genauigkeitsbestimmung kann natürlich selbst nur genau ausfallen nach Massgabe, als man die Fehler genau bestimmt hat. Es gibt aber einen Grund, wesshalb sie als Abweichungen vom Mittel aus einer endlichen Zahl Beobachtungswerthe bestimmt ungenau werden und eine Correction erfordern, um auf die genauen Werthe zurückgeführt zu werden. Dieser Grund liegt darin, dass das Mittel aus einer, künftig immer mit m zu bezeichnenden, endlichen Zahl von Beobachtungswerthen nicht den genauen Werth der zu beobachtenden Grösse geben kann, welcher aus einer unendlichen Zahl fliessen würde, dass es vielmehr nach Wahrscheinlichkeit um so mehr davon abweicht, je geringer die Zahl der Beobachtungen, je kleiner das m ist. Indem aber die Fehler als Abweichungen von einem falschen Werthe gerechnet werden, werden sie selbst falsch. Hiermit wird auch die Summe der Fehler $\Sigma\Delta$ und Summe der Fehlerquadrate $\Sigma\Delta^2$, so wie der daraus abzuleitende einfache Mittelfehler $\varepsilon=\frac{\Sigma\Delta}{m}$ und quadratische Mittelfehler $q=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ falsch, und bedürfen einer Correction, um auf die richtigen zurückgeführt zu werden, wenn wir hier, wie in der Folge, unter Fehlersumme $\Sigma\Delta$ stets die Summe der Fehler nach absolutem Werthe verstehen, wobei die negativen Fehler den positiven gleich gerechnet werden, und die Ausdrücke einfacher Mittelfehler ε und quadratischer Mittelfehler q im Sinne der beigefügten Ausdrücke nehmen.*) Die wegen die-

*) Bei den Astronomen wird unter Mittelfehler schlechthin der quadratische $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ verstanden, oder der corrigirte $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m-1}}$ und uncorrigirte $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ als mittler Fehler und mittlere Abweichung unterschieden, da sie überhaupt keinen Gebrauch vom einfachen Mittelfehler $\frac{\Sigma\Delta}{m}$ machen, der aber für die psychophysische Massmethode der mittleren Fehler und als mittlere Schwankung meteorologischer Einzelwerthe um Mittelwerthe wichtig wird, daher die obige Unterscheidung hier nöthig wird.

Digitized by Google

ses Umstandes anzubringende Correction nenne ich die Correction wegen des endlichen m, und unterscheide von den noch uncorrigirten Werthen

$$\Sigma\Delta,\ \Sigma\Delta^2,\ \varepsilon,\ q$$

die corrigirten, welche ihnen entsprechen, durch

$$S\Delta,\ S\Delta^2,\ \varepsilon_1,\ q_1$$

welche Unterscheidung auch bei den weiterhin zu besprechenden Correctionen, die aus noch andern Gesichtspuncten erforderlich sein können, wird beibehalten werden.

Die Correction wegen des endlichen m ist bezüglich der Summe der Fehlerquadrate $\Sigma\Delta^2$ und des daraus abzuleitenden quadratischen Mittelfehlers q durch Gauss in s. Abhandl. »*Theoria combinationum observationum erroribus minimis obnoxiae*« in Comment. Soc. Gott. rec. Vol. V. p. 82 sequ. entwickelt worden*) und wird seitdem allgemein von den Astronomen und Physikern angewandt. Da man aber bei der physikalischen und astronomischen Genauigkeitsbestimmung von der einfachen Fehlersumme und dem einfachen Mittelfehler seither keinen Gebrauch zu machen pflegt, ist auch hierfür die Correction seither nicht hergeleitet worden, obwohl ihre Kenntniss auch hier nützlich sein kann, da man bei grossem m mit nur wenig geringerer Sicherheit und viel grösserer Bequemlichkeit den einfachen Mittelfehler eben so gut als den quadratischen zur Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers, der gewöhnlich zur Genauigkeitsbestimmung angewandt wird, benutzen kann.**)

Die Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen ist aber nicht das einzige Feld der Anwendung der Correction wegen des endlichen m. Eine zweite Anwendung kann sie in der Meteorologie erfahren bezüglich der Schwankungen meteorologischer Werthe, die durch eine Reihe von Jahren beobachtet sind, um ihre Mittelwerthe. Die Temperatur, der Barometer-

*) Spätere Ableitungen dieser Correction kann man u. a. finden in einer Abh. von Encke im astron. Jahrb. f. 1834 S. 282 ff. und einer Abh. von Hauser in Baumg. und Ettingsh. Zeitschr. 1830. VII. S. 312.

**) Man hat nämlich unter Voraussetzung des bekannten Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Fehler gleichgeltend, wenn r der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung ist

$$r = 0{,}674489\ q_1$$
$$= 0{,}845347\ \varepsilon_1.$$

Vergl. Encke im astronom. Jahrb. f. 1834. S. 293.

Digitized by Google

stand, der Hygrometerstand, die Regenmenge eines gegebenen Tages, Monates, Jahres*) sind nämlich wie bekannt nicht in jedem Jahre dieselben, sondern schwanken von einem Jahre zum andern um einen allgemeinen aus vieljährigen Beobachtungen zu gewinnenden Mittelwerth, und es hat ein Interesse, die Grösse dieser Schwankungen z. B. für verschiedene Tage oder Monate an denselben Beobachtungsorten oder für dieselben Tage, Monate an verschiedenen Beobachtungsorten zu vergleichen, wo man grosse Verschiedenheiten findet. Hierzu kann man nun entweder die absolute Schwankung als Abweichung zwischen den Extremen oder die mittlere Schwankung**) benutzen, welche man erhält, wenn man die Abweichungen der einzelnen meteorologischen Werthe vom Mittelwerthe nach absolutem Werthe addirt, und mit der Zahl derselben m dividirt, wo sie dem Werthe ε entspricht. Unstreitig zwar könnte man sich auch hier des Werthes q bedienen; schwerlich aber dürfte der mathematische Vorzug, den seine Anwendung in gewissem Sinne hat, einen Ersatz dafür gewähren, dass sich mit ε unmittelbar ein leichter fasslicher Begriff in der Meteorologie verbinden lässt, als mit q.***) Gleichviel aber, ob man ε oder q anwenden will, inso-

*) Wenn von dem meteorologischen Werthe eines Monates oder Jahres die Rede ist, ist dieser natürlich als Mittelwerth aus den einzelnen Tagen bestimmt anzusehen.

**) Die Ausdrücke absolute Schwankung und mittlere Schwankung sind hier nach der obigen Definition zu verstehen. Sonst versteht man auch unter mittler Schwankung oder Variation ein Mittel aus absoluten Schwankungen im obigen Sinne.

***) Ich habe mich übrigens zur Genüge überzeugt, dass das aus der Fehlertheorie bekannte für grosses m geltende Verhältniss $\frac{\varepsilon_1}{q_1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, auf das ich noch weiterhin Gelegenheit haben werde zurückzukommen, für meteorologische Abweichungen von Mittelwerthen so gut gültig ist, als für psychophysische und astronomische, sofern sich das bei grossem m gültige Verhältniss

$$\frac{2m\Sigma\Delta^2}{(\Sigma\Delta)^2}=\pi,$$

auf das ich anderwärts aufmerksam gemacht habe, an denselben meteorologischen Abweichungswerthen, die folgends zur Prüfung der Correction dienen werden, sehr gut (natürlich mit von Zufälligkeiten abhängigen kleinen Abweichungen bald in Plus, bald in Minus) bestätigt, woraus nach der Beziehung von q und ε zu $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta$ (S. 58) zunächst das Verhältniss $\frac{q}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ von selbst folgt, wie es umgekehrt aus diesem gefolgert werden

Digitized by Google

fern die Zahl der Jahre eine endliche ist, wird man auch wieder nicht erwarten dürfen, den richtigen Mittelwerth zu erhalten, mithin werden auch die davon gerechneten Abweichungen und daraus abgeleiteten Werthe ε, q unrichtige werden, und das Bedürfniss der Correction wird sich wieder geltend machen. Da nun die Abweichungen meteorologischer Werthe von ihrem Mittelwerthe eben so den allgemeinen Gesetzen des Zufalls unterliegen, als die Abweichungen der Beobachtungswerthe von ihrem Mittelwerthe, wird auch voraussetzlich dieselbe Correction darauf anwendbar sein, und dass diess wirklich der Fall ist, wird durch das Folgende selbst dargethan, indem die meteorologischen Abweichungen uns die Hauptbewährungen für eben jene Correction liefern werden, die ursprünglich hauptsächlich mit Bezug auf die Beobachtungsfehler theoretisch festgestellt ward.

Zur specielleren und weiteren Erläuterung lege ich ein bestimmtes Beispiel aus folgendem Werke Dove's unter, das uns überhaupt alle Unterlagen zur folgenden Untersuchung bezüglich der Meteorologie liefern wird.

»Bericht über die in den Jahren 1848 und 1849 auf den Stationen des meteorologischen Instituts im Preussischen Staate angestellten Beobachtungen. Berlin 1851.«

In diesem Werke sind für viele Oerter die Abweichungen verzeichnet, welche die Temperatur jedes Monats durch eine Reihe Jahre von der Mitteltemperatur dieses Monats zeigt, die aus der Gesammtheit dieser Jahre fliesst. Nehmen wir die Beobachtungen für den ersten Beobachtungsort, Tilsit (Dove S. XX), und greifen aus den 12 Monaten beispielsweise den Mai heraus. In den 30 Jahren 1820 bis 1849 (inclus.) zeigte die Temperatur dieses Monats folgende Abweichungen in plus und minus vom allgemeinen 30jährigen Mittel desselben Monats, welches (nach Dove S. 84) $9^0{,}28$ oder abgerundet $9^0{,}3$ R. war.

---

kann; bei grossem m aber stimmt $\frac{q}{\varepsilon}$ mit $\frac{q_1}{\varepsilon_1}$ merklich überein. An den Werthen von $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta$, welche in den später folgenden Tabellen über die Prüfung der Correction angeführt sind, darf man aber obiges Verhältniss desshalb nicht beweisen wollen, weil diese Summen aus mehreren einzelnen Summen $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta$ zusammengesetzt sind, für die es nur insbesondere gilt. Auf die ausführlichere Constatirung und Besprechung jenes bemerkenswerthen Verhältnisses im Bereiche zufälliger Abweichungen komme ich anderwärts zurück.

Digitized by Google

Einzel-Abweichungen der Temperatur des Mai in 30 Jahren vom allgemeinen 30jährigen Mittel des Mai in Tilsit in Graden R. (Dove S. XX).

1820	+2,0	1830	−0,8	1840	−2,0
1821	+1,1	1831	+0,2	1841	+2,2
1822	+1,1	1832	−1,8	1842	+1,2
1823	−0,9	1833	+0,9	1843	−2,7
1824	−4,5	1834	+1,6	1844	+1,2
1825	−0,2	1835	−1,0	1845	−0,6
1826	+1,3	1836	−2,2	1846	−1,7
1827	+2,1	1837	+0,1	1847	−0,2
1828	+0,2	1838	−0,6	1848	−0,3
1829	+0,1	1839	+2,9	1849	+0,9

Die Totalsumme dieser Abweichungen nach absolutem Werthe oder der Werth $\Sigma\Delta$ ist $38^0,7$ R., mithin die aus 30 Jahren berechnete mittlere Schwankung der Temperatur des Mai zu Tilsit im Sinne obiger Definition oder der Werth

$$\varepsilon = \frac{38^0,7}{30} = 1^0,29 \text{ R.},$$

indess die absolute Schwankung, wie oben verstanden, als die Differenz zwischen den Extremen −4,5 im J. 1824 und +2,9 im J. 1839 durch

$$7^0,4$$

gegeben wird.

So weit mir die meteorologische Literatur bekannt ist, finde ich überall seither nur die absolute Schwankung und Mittelwerthe aus absoluten Schwankungen berücksichtigt, wovon ich die Zweckmässigkeit bei täglichen Variationen um so weniger bestreite, als die Data zur Berechnung der mittleren jedes Tages, welche sehr nahe liegende Beobachtungen jedes Tages erfodern würde, selten vorliegen. Da aber allgemein gesprochen der Eintritt des Maximum und Minimum in nicht abgegränzten Zeitläufen, wie es eine fortlaufende Reihe von Jahren ist, durch ungewöhnliche Ursachen oder ein ungewöhnliches Zusammentreffen von Ursachen in demselben Sinne bedingt sein kann, was vorzugsweise an Zufälligkeiten hängt, so scheint mir hier die mittlere Schwankung in obigem und durch voriges Beispiel erläuterten Sinne der absoluten Schwankung in obigem Sinne als die sichrere vorzuziehen, wenn es darauf ankommt, von Zufälligkeiten möglichst unabhängige Bestimmungen zu erhalten;

Digitized by Google

doch würde natürlich durch die vorzugsweise Berücksichtigung der mittleren Schwankung, wo sie stattfinden kann, die Mitberücksichtigung der absoluten nicht ausgeschlossen.

Das Grössenverhältniss der absoluten zur mittlern Schwankung der Monatstemperatur scheint, wenn es aus einer bestimmten Zahl Jahre abgeleitet wird, ein sehr constantes für verschiedene Orte, Monate und Zeitepochen zu sein, fand sich nämlich bei einer beiläufig desshalb angestellten Untersuchung =5,401 für Tilsit, =5,461 für Danzig, =5,738 für Berlin, in Tilsit durch die 30 Jahre von 1820 bis 1849, in Danzig durch die 32 Jahre von 1807 bis 1838 und in Berlin durch die 28 Jahre von 1822 bis 1849, wobei in Tilsit blos die 8, in Danzig und Berlin blos die 6 Monate zur Bestimmung zugezogen sind, die auch zur unten folgenden Prüfung der Correction gedient haben (s. darüber die unten folgenden Tabellen), und welche nicht allgemein an den verschiedenen Orten zusammenfallen. Für Tilsit in den 4 Monaten besonders bestimmt, welche unter den untersuchten die kleinste und welche die grösste mittlere Schwankung zeigen, fand sich das Verhältniss zwischen absoluter und mittler Schwankung in erstern 5,589, in letztern 5,295, also auch nahe übereinstimmend. Eben so war es, wenn man für Danzig und Berlin eine entsprechende Rechnung für die drei geprüften Minimal- und Maximal-Monate anstellte, und das Resultat für beide Orte zusammenlegte, indess an jedem dieser Orte für sich genommen die Resultate in entgegengesetzter Richtung mehr von der Gleichheit abwichen, als in Tilsit, was bei so wenigen zugezogenen Monaten nicht befremden kann. Hingegen bleibt das Verhältniss zwischen absoluter und mittler Schwankung sich keineswegs durchschnittlich gleich, je nachdem man es aus einer kleineren oder grösseren Zahl Jahre ableitet; daher es nicht etwa möglich ist, dieselbe Correction wegen des endlichen m auf die absolute als mittlere Schwankung anzuwenden. Diese hier blos an den von mir zur Prüfung der Correction angewandten Orten und Monaten beiläufig mit untersuchten Verhältnisse verdienten eine allgemeinere Prüfung bezüglich der verschiedenen meteorologischen Elemente und Beobachtungsorte, wozu Dove's tabellarische Werke ein reiches Material bieten, die ich aber gern Meteorologen von Fach überlasse. Wahrscheinlich wird sich das obige Verhältniss bei Orten, die unter mehr verschiedenen Breitegraden liegen, als Tilsit, Danzig und Berlin doch auch verschiedener gestalten.

Für die mittlere Schwankung nun lässt sich das Bedürfniss der Correction wegen des endlichen m leicht unmittelbar an obigem Beispiele für Tilsit erweisen. Wir fanden für die gesammten 30 Jahre als Summe der Schwankungen $38^0,7$, als mittlere Schwankung $1^0,29$. Nun können wir aber die ganze Reihe von 30 Jahren in Fractionen mit kleinerem m theilen und für diese die Summe der Schwankungen und daraus mittlere Schwankung besonders suchen, indem wir die Abweichungen in jeder Fraction von dem, dieser Fraction besonders zukom-

Digitized by Google

menden, Mittelwerthe rechnen, womit sie andere werden, als die in der Tabelle verzeichneten, welche vom Totalmittel gerechnet sind, also eine andere Summe von Abweichungen oder Schwankungen und mithin andere mittlere Schwankungen geben. Anstatt die mittleren Schwankungen der Fractionen einzeln mit der mittleren Schwankung, die aus der Totalität folgt, zu vergleichen, ist es jedoch am einfachsten und führt am directesten zum Zweck unsers Vergleiches, die Schwankungssummen der Fractionen zusammenzurechnen und mit der Schwankungssumme, die aus der Totalität folgt, zu vergleichen, wo sich sogleich zeigt, ob die Schwankung durchschnittlich für die Fractionen mit kleinem m grösser oder kleiner ausfällt, als für die Totalität mit grossem m. So werde ich daher im Allgemeinen folgends verfahren.

Theilen wir nun die obige Reihe für den Mai in Tilsit zuerst in 3 Fractionen $\grave{a}\, m=10$, wie solches schon im Druck geschehen ist, so kommt das zur Anstellung des vorigen Vergleiches einzuschlagende Verfahren principiell darauf zurück, dass man zuvörderst die 10 ursprünglichen Beobachtungswerthe jeder Fraction durch additive und subtractive Zufügung der oben verzeichneten Abweichungen zum allgemeinen Mittel $9^0,3$ restituirt, und die Summe derselben mit 10 dividirt, wodurch man den mittleren Beobachtungswerth dieser Fraction hat (giebt respective 9,53; 8,60; 9,09 für die drei Fractionen), wonach die Abweichungen der einzelnen restituirten Beobachtungswerthe von dem Mittel jeder Fraction die zu summirenden neuen Abweichungen jeder Fraction geben (giebt respective die Summen 12,90; 10,64; 12,70 als $\Sigma\Delta$ für die einzelnen Fractionen $\grave{a}\, m=10$), wonach wir diese Summen vereinigt (36,24) mit der aus der Gesammtheit $\grave{a}\, m=30$ in Bezug zum Gesammtmittel bestimmten Summe (38,7) zu vergleichen haben. In der Ausführung jedoch kann man sich die Restitution der ursprünglichen Beobachtungswerthe ersparen, indem man die neuen Abweichungen jeder Fraction von dem Mittel der (in diesem Falle nicht nach absolutem Werthe, sondern algebraisch addirten) vorgegebenen Abweichungswerthe rechnet, und überhaupt ein abkürzendes Verfahren einschlagen, welches ich in folgender Einschaltung angebe.

Die gegen das allgemeine Mittel gerechneten Abweichungen seien wie in obiger Tabelle für die ganze Reihe gegeben, und sollen kurz die gegebenen heissen. Hieraus soll die Summe der Abweichungen in einer

besondern Fraction von dem dieser Fraction besonders zukommenden Mittel berechnet werden. Diese Abweichungen und deren Summen sollen die gesuchten heissen. Um die gesuchte Abweichungssumme $\Sigma\Delta$ zu finden, bediene man sich folgender Gleichung:

$$\Sigma\Delta = 2(T - tc),$$

wo die Buchstaben T, t, c folgende Bedeutung haben:

Der Werth c wird erhalten, wenn man die positiven und negativen gegebenen Abweichungen der betreffenden Fraction jede für sich addirt, und die Differenz ihrer Summen, P, N, solche nach absolutem Werthe verstanden, mit dem m der Fraction dividirt, so dass

$$c = \frac{P - N}{m}.$$

Nach dieser Gleichung kann c ein positives oder negatives Vorzeichen erhalten, ist aber stets nach seinem absoluten Werthe, also als positiv in der obigen Formel zu verwenden. Diesseitige Fehler sollen solche heissen, welche mit c oder $P-N$ gleiches Vorzeichen haben. Hiernach wird mit t die Zahl, mit T die, wieder nach absolutem Werthe in obiger Formel einzuführende, Summe der diesseitigen gegebenen Abweichungen der Fraction verstanden, welche c in absolutem Werthe übersteigen. Ein Fehler, der mit c selbst zusammenfällt, kann beliebig zu t mit gezählt und zu T mit gerechnet werden, oder auch nicht, nur dass es für t und T zugleich in derselben Weise geschieht.

Im vorigen Beispiele ist für die erste Fraction $m=10$; $P=7{,}9$; $N=5{,}6$, mithin $c=0{,}23$; $T=7{,}6$; $t=5$, hienach die gesuchte Summe $12{,}90$, woraus als mittlere Schwankung der Fraction durch Division mit m folgt $1{,}290$, wie oben angegeben.

Gilt es, statt der Summe der Abweichungen oder Fehler die Summe ihrer Quadrate im angegebenen Sinne zu suchen, so findet man sie aus der Summe der gegebenen Quadrate dieser Fraction, indem man einfach mc^2 davon abzieht, wobei c die obige Bedeutung behält.

Ich halte es für unnöthig, den leicht zu findenden, und bezüglich der Quadrate schon anderwärts von Andern gegebenen Beweis dieser Regeln hier beizufügen, dazumal man dieselben leicht durch beliebige Proben bewähren, d. h. sich überzeugen kann, dass sie gleichen Erfolg geben, als das nach dem obigen Princip ausgeführte Verfahren.

Die drei Fractionssummen à $m=10$ zusammen haben nach diesem Verfahren die zusammengesetzte Totalsumme 36,24 gegeben, indess die gegen das Totalmittel bestimmte Summe à $m=30$ den Werth 38,7 hatte, was in nicht zu vernachlässigender Weise abweicht. Die Fractionirung auf kleines m führt also in diesem Beispiele auf eine kleinere Gesammtsumme, als die Berechnung nach der Totalität mit grossem m. Dieselbe Berechnung, die hier für den Mai in Tilsit ausgeführt wurde, habe ich überhaupt für 8 Monate in Tilsit durchgeführt, und als ad-

Digitized by Google

dirtes Resultat für alle*) 280,51 bei Fractionirung auf $m=10$, 289,13 bei $m=30$ erhalten. Für 6 Monate in Danzig ausgeführt gab sie 175,64 bei Fractionirung auf $m=10$, und 186,89 bei $m=30$, und für 6 Monate in Berlin 252,78 bei $m=10$ und 258,04 bei $m=30$, überall also ein kleineres Resultat bei $m=10$ als bei $m=30$. Nicht minder zeigte sich die aus denselben Beobachtungen berechnete Summe der Quadrate der Abweichungen überall kleiner bei Fractionirung auf kleines m als bei dem grössern Total-m, wie man aus der unten folgenden tabellarischen Zusammenstellung sehen kann.

Um so mehr bleibt die Schwankung bei kleinem m hinter der bei grossem m zurück, wenn man mit der Verkleinerung des m noch weiter herabgeht. Ich bin bis zur Gränze, d. i. bis zu $m=3$ und 2 gegangen; und wenn man schon zur Berechnung der mittleren Schwankung in der Meteorologie nie so weit herabgehen wird, weil den einzelnen Resultaten der Art eine zu geringe Sicherheit zukommt, so hat es doch ein Interesse, zu sehen, wie weit durchschnittlich auf diesem Wege die Verkleinerung der mittleren Schwankung geht, wie viel sie überhaupt im Maximum betragen kann.

Um diess wieder an obigem Beispiele zu erläutern, so beträgt die aus 15 Fractionen à $m=2$ zusammengesetzte Schwankungssumme des Mai in Tilsit, wie man nachrechnen kann, nur noch 32,50, wenn man bei der Fractionirung, vom ersten Jahre 1820 beginnend, folgweise 1820 mit 1821, 1822 mit 1823 u. s. f. combinirt, und gar nur 24,70,**) wenn man mit dem zweiten Jahre 1822 beginnend, successive 1821 mit 1822, 1822 mit 1823 u. s. f. und zuletzt rückgreifend 1849 mit 1820 zusammensetzt, welche doppelte Berechnungsweise ich als Berechnung mit doppelter Abtheilungsweise bezeichne. Das Mittel beider Resultate giebt als durchschnittliche zusammengesetzte Totalsumme für $m=2$ den Werth 28,60, indess wir für $m=30$ den Werth 38,7 gefunden hatten. Auch hierbei, so wie bezüglich $m=3$, habe ich die Berechnung für 8 Monate in Tilsit, 6 in Danzig und 6 in Berlin erstreckt und auf die Quadrate mit aus-

*) Im Mittel einer doppelten Abtheilungsweise bei $m=10$, wie ich unten noch genauer erläutere.

**) Eine so starke Verschiedenheit je nach der verschiedenen Abtheilungsweise ist im Ganzen selten, und oft stimmen die Resultate der verschiedenen Abtheilungsweisen sehr nahe zusammen.

Digitized by Google

gedehnt, wovon die Resultate unten tabellarisch folgen. Zunächst bleibe ich bei unserm obigen einfachen Beispiele.

Natürlich muss man nach Vorstehendem erwarten, dass auch die bei $m=30$ im Ganzen gefundene Schwankungssumme $38^0,7$ und demnach die daraus berechnete mittlere Schwankung 1,29 des Mai, so wie die entsprechenden Werthe der andern Monate noch zu klein seien, da 30 noch ein endliches *m* ist. Und wenn schon die Abweichung vom Richtigen voraussetzlich hier nur noch gering sein kann und nach der weiter folgenden Correctionsformel es wirklich ist, ist es doch nützlich zu wissen, wie viel sie nach Wahrscheinlichkeit beträgt, und welche Correction deshalb anzubringen ist, um so mehr, wo nur ein kleineres *m* als 30 zu Gebote steht, wie diess oft bei meteorologischen Werthen der Fall.

Eine dritte wichtige Anwendung kann die Correction wegen des endlichen *m* bei einer Methode zur Messung der Schärfe der Sinne erfahren, die ich in meinen Elementen der Psychophysik unter dem Namen der Methode der mittleren Fehler beschrieben habe, und hauptsächlich das Interesse dieser Methode ist es, was mich veranlasst, hier näher auf diese und einige andere Correctionen einzugehen, deren Bedürfniss sich hier noch ausser der vorigen geltend macht.

Um an den Sinn der Methode kurz zu erinnern, so kann beispielsweise die Schärfe des Augenmasses dadurch geprüft werden, dass man der gemessenen Spannweite eines Zirkels, die ich die Normaldistanz nenne, die eines daneben gehaltenen gleichen Zirkels nach dem Augenmasse gleich zu machen sucht — die gleichgeschätzte Distanz nenne ich Fehldistanz — und dass man die durch Nachmessen gefundenen Fehler, die man dabei begeht, notirt. In ähnlicher Weise kann die Schärfe des Tastmasses durch zwei vergleichungsweise auf die Haut applicirte Zirkel geprüft werden. Je geringer die durchschnittliche Fehlergrösse, desto grösser die Schärfe des Augenmasses oder Tastmasses.

In meinen Elementen der Psychophysik habe ich gezeigt, dass die als Abweichungen der Fehldistanzen von der Normaldistanz gerechneten Fehler, sog. rohen Fehler, im Allgemeinen noch zusammengesetzt sind aus einem, selten fehlenden, constanten Fehler, d. i. einer oft erheblichen Abweichung, welche das Mittel aller Fehldistanzen von der Normaldistanz zeigt,

Digitized by Google

und aus den Abweichungen der einzelnen Fehldistanzen von ihrem Mittelwerthe, welche Abweichungen ich reine variable Fehler oder reine Fehler schlechthin nenne. Beide Elemente der rohen Fehler sind zu berücksichtigen; hier aber handelt es sich nur um die reinen Fehler, als auf welche unsere Correctionen Anwendung zu finden haben. Die mittlere Fehldistanz nämlich, gegen welche die reinen Fehler gerechnet werden, kann aus einer endlichen Zahl Beobachtungen eben so wenig ganz richtig, d. h. so bestimmt werden, wie sie aus einer unendlichen Zahl Beobachtungen hervorgehen würde, als der mittlere Beobachtungswerth bei physikalischen und astronomischen Beobachtungen; sie giebt, insofern sie wegen des endlichen m unrichtig bestimmt ist, auch unrichtige reine Fehler, und sofern diese zum Masse der Sinnesschärfe benutzt werden sollen, ein unrichtiges Mass.

Zum psychophysichen Masse kann nun wiederum eben sowohl der aus den reinen Fehlern gewonnene einfache Mittelfehler ε_1 als quadratische Mittelfehler q_1 benutzt werden, sofern nach der mathematischen Fehlertheorie beide das constante Normalverhältniss

$$\frac{q_1}{\varepsilon_1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,2533\ldots$$

zu einander haben (wo π die Ludolf'sche Zahl), ein Verhältniss, das ich durch Untersuchung vieler nach der Methode der mittleren Fehler gewonnenen Fehlerreihen in der Weise bestätigt fand, dass das bei grossem m wirklich gefundene Verhältniss nur in kleinen zufälligen Abweichungen um diesen Normalwerth schwankt. Ungeachtet nun der quadratische Mittelfehler nach der Wahrscheinlichkeitstheorie bei gegebenem m etwas sicherer bestimmt ist, als der einfache, ist der Unterschied doch nicht gross genug, um nicht bei etwas grossem m, wo die übrig bleibende Unsicherheit überhaupt nur gering ist, den viel einfacher zu bestimmenden einfachen Mittelfehler zu bevorzugen, oder, was auf dasselbe herauskommt, die einfache Fehlersumme $S\Delta$ bei gegebenem m statt desselben anzuwenden.

Mag man nun aber q_1, ε_1 oder $S\Delta$ zum Masse verwenden wollen, so hat man zunächst wieder nur q, ε, $\Sigma\Delta$, d. i. die falschen statt der richtigen Fehlerfunctionen, und die Anwendung der Correction, um letztre aus erstern abzuleiten, macht sich also auch hier nöthig.

Digitized by Google

Liegt zwar allen Mittelfehlern oder Summen ein gleiches m unter, und kommt es, wie nicht selten, blos auf einen Vergleich derselben an, so kann man sich die Correction wegen des endlichen m ersparen, indem sie alle Werthe in gleichem Verhältnisse betrifft, also sich doch beim Vergleiche wieder eliminiren würde; sollen aber Summen oder Mittelfehler, die bei verschiedenem m gewonnen sind oder durch Zusammenlegung aus Fractionen mit verschiedenem m unter jedesmaliger besonderer Berechnung der Fehler gegen die mittlere Fehldistanz der Fraction entstanden sind, mit einander verglichen werden, oder verlangt man die Grösse der psychophysischen Masswerthe nach einem absoluten, von der Grösse des m unabhängigen, Massstabe zu wissen, so wird die Ausdehnung der Correction wegen des endlichen m auf dieselben unerlässlich, wofern nicht wegen sehr beträchtlicher Grösse des angewandten m die Correction überhaupt zu geringfügig wird, um Berücksichtigung zu verdienen. Nun ist es aber aus einem weiterhin zu betrachtenden Grunde zweckmässiger, grosse Fehlersummen $\Sigma\Delta$ aus fractionsweise bei kleinem m gewonnenen Summen zusammenzulegen, deren jede gegen die mittlere Fehldistanz der Fraction besonders bestimmt ist, als sie aus den, gegen das allgemeine Mittel der Fehldistanzen einer längern Reihe bestimmten Fehlern zu summiren; und natürlich wird für eine solche aus Partialsummen von kleinem m zusammengelegte Totalsumme dieselbe Correction erforderlich, als für jede Fraction insbesondere nach der Grösse ihres m erforderlich gewesen sein würde.

Ausser der Correction wegen des endlichen m können sich noch zwei andere Correctionen bei der Methode der mittleren Fehler nöthig machen.

Bei den Genauigkeitsbestimmungen der Beobachtungen ist es gleichgültig, welchen Quell die zufälligen Fehler haben, die man begeht, und wenn schon sie aus sehr verschiedenen Quellen ihren Ursprung nehmen, bedarf ihr zusammengesetztes Resultat doch keiner Analyse und die Anbringung der Correction wegen des endlichen m an das zusammengesetzte Resultat genügt. Anders bei der Methode der mittleren Fehler. Hier sind die Fehler, welche wegen mangelnder Schärfe der Sinne im Vergleich der Normalgrösse und Fehlgrösse begangen werden, wohl von denen zu unterscheiden, die von unrichtiger Bestimmung der Fehlgrösse am Massstabe begangen werden. Beide Fehler setzen sich

zusammen; natürlich aber können principiell nur die ersten Fehler zum Masse der Schärfe der Sinne dienen, und sofern doch unmittelbar nur das zusammengesetzte Resultat beider erhalten und verzeichnet wird, ist eine Correction desselben nöthig, um es auf den Fall der blos von mangelnder Schärfe der Sinne beim Vergleich abhängigen Fehler zurückzuführen, insofern solche nicht durch ihre Geringfügigkeit entbehrlich wird.

Diess ist nun wohl in vielen Fällen der Fall, aber doch nicht allgemein. Denn ein geübtes Augenmass oder Tastmass ist so scharf, dass die Durchschnittsgrösse der Fehler, die man damit begeht, mit den Abtheilungen des Massstabes, die man bei Aufzeichnung der Fehler unterscheidet, und den Schätzungsfehlern am Massstabe leicht von vergleichbarer Grösse werden kann, wie Beispiele in meinen Elementen der Psychophysik (II. S. 318) beweisen, wozu ich noch mehrere fügen könnte und; hier würde eine Vernachlässigung der Correction eine nicht unerhebliche Ungenauigkeit in das Mass bringen.

Des Näheren giebt es hierbei zwei Correctionen zu unterscheiden, welche sich auf zwei verschiedene Complicationen der Fehler beziehen.

Streng genommen sind beim Vergleich der Normalgrösse mit der Fehlgrösse bis zu einem nicht angebbaren Maximum Fehler von allen Grössen, die durch unmerkliche Uebergänge variiren, möglich, und hat jeder Fehler von ganz bestimmter Grösse nur eine unendlich geringe Wahrscheinlichkeit. Einmal da gewesen, wird ein Fehler von bestimmter Grösse nicht wiederkehren. Aber bei den wirklichen Beobachtungen kann man nicht Fehler bis ins kleinste unterscheiden, sondern nur bis zu einer gewissen Gränze damit herabgehen, und so bleibt man nach Umständen bei Zehntheilen, Hunderttheilen, Tausendtheilen von Linien, Graden u. s. w. stehen, wie sie die Skala oder Schätzung hergiebt. Was dazwischen fällt, wird auf die Gränzen der unterschiedenen Intervalle verlegt. Insofern man nun hierdurch den Fehler durchschnittlich eben so oft zu gross als zu klein macht, scheint es, dass sich diess bei einer grossen Zahl Beobachtungen compensiren müsste. Aber diess ist nicht genau der Fall, weil die Wahrscheinlichkeit oder Zahl der Fehler gegebener Grösse in rascherem Verhältnisse abnimmt, als ihre Grösse zunimmt. Vielmehr wird die Summe der Fehler wie Fehlerquadrate dadurch in gewissem Sinne abgeändert, in um so

Digitized by Google

stärkerem Verhältnisse, je grösser die unterschiedenen Intervalle im Verhältniss zur durchschnittlichen Fehlergrösse sind.

Die desshalb anzubringende Correction nenne ich die Correction wegen der Grösse der Intervalle.

In dem Falle, wo man zwischen den Abtheilungen des Massstabes oder der Skala, woran man die Fehler bestimmt, noch Zwischenwerthe schätzt, treten zu den vorigen Fehlern noch die zufälligen Abweichungen hinzu, welche bei der Schätzung in Plus oder Minus vom Richtigen gemacht werden; da man aber auch bei dieser Schätzung nur Werthe bis zu gewissen Gränzen unterscheidet, so bleibt der Irrthum wegen der Grösse der Intervalle dabei immer mit bestehen, und complicirt sich mit dem von der Schätzung abhängigen, ohne damit verwechselt werden zu dürfen.

Die wegen des zweiten Umstandes anzubringende Correction nenne ich die Correction wegen der Schätzung der Eintheilung.

Eine Kenntniss der Correction wegen der Grösse der Intervalle kann noch aus folgendem Gesichtspuncte nüzlich sein.

Wenn man die Folgerungen, welche aus dem theoretischen Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehler hervorgehen, erläutern oder bewähren will, so kann man u. a. dazu den Weg einschlagen, dass man eine grosse Anzahl Loose mit den Fehlergrössen in der verhältnissmässigen Zahl bezeichnet, in der sie nach dem Wahrscheinlichkeitsgesetze vorkommen, diese Loose mischt und zieht, oder dass man die wirklich gezogenen Lotterieloose nach den veröffentlichten Listen derselben im Sinne vorigen Princips in Fehler übersetzt, wie ich Behufs gewisser Zwecke gethan habe, wodurch man künstliche Fehlerreihen in zufälliger Ordnung der Fehler erhält, die sich zu manchen Untersuchungen wohl eignen. Da man aber auch hierbei den Fehlergrössen gewisse Intervalle geben muss, indess das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler solche von allen möglichen Grössen voraussetzt, so ist nöthig zu wissen, von welcher Ordnung die hieraus hervorgehenden Abweichungen von den theoretischen Resultaten sind, um die Intervalle gewiss klein genug nehmen zu können, dass diese Abweichungen zu vernachlässigen sind.

Hiernach wende ich mich zur besondern Aufstellung der betreffenden Correctionen. Der Correction wegen der Grösse

Digitized by Google

des endlichen m, welche die wichtigste ist, sind Erfahrungsbelege beigefügt.

Correction wegen des endlichen m.

Die Summe von Fehlerquadraten $\Sigma\Delta^2$ und der quadratische Mittelfehler q, gewonnen aus m Abweichungen, Fehlern, Schwankungen bezüglich einer und derselben mittlern Beobachtungsgrösse, werden, sofern sie noch der Correction wegen des endlichen m bedürfen, nach Gauss auf die richtigen $S\Delta^2$, q_1 zurückgeführt, corrigirt, durch folgende Formeln:

$$S\Delta^2=\frac{m}{m-1}\Sigma\Delta^2$$

$$q_1=q\sqrt{\frac{m}{m-1}}=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m-1}}.$$

Insofern diese Bestimmung nur eine Sache der Wahrscheinlichkeit ist, kann man wünschen, den wahrscheinlichen oder mittlern Fehler derselben zu wissen. Aus der allgemeinen Formel, welche Gauss in dieser Hinsicht S. 89 seiner Abhandlung giebt, so wie der Hauberschen Ableitung (Baumg. Zeitschr. VII. S. 314) folgt, dass der quadratische Mittelfehler (gewissermassen ein Mittelfehler zweiter Ordnung), der bei Schätzung von $q_1^2=\frac{\Sigma\Delta^2}{m-1}$ oder $S\Delta^2=\frac{m\Sigma\Delta^2}{m-1}$ zu besorgen ist, respective

$$q_1^2\sqrt{\frac{2}{m-1}} \text{ oder } S\Delta^2\sqrt{\frac{2}{m-1}}$$

beträgt, für den Fall, dass die Fehler das durch das bekannte Integral ausgedrückte Fehlergesetz befolgen, wogegen die obige Correction von q und $\Sigma\Delta^2$ nur die Erfüllung allgemeinerer Bedingungen der Fehlerwahrscheinlichkeit voraussetzt.

Die seither noch nicht gegebene Correction für die einfache Fehlersumme $\Sigma\Delta$ und den einfachen Mittelfehler ε wegen des endlichen m, lässt sich aus der vorstehenden Correction von $\Sigma\Delta^2$ in der alsbald folgenden einfachen Weise ableiten, und wird hiernach durch

$$S\Delta=\sqrt{\frac{m}{m-1}}.\Sigma\Delta$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon\sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

gegeben; wonach die Fehlersumme $\Sigma\Delta$ und der einfache Mittelfehler ε durch denselben Factor corrigirt werden, als der quadratische Mittelfehler q; das Quadrat der Fehlersumme $(\Sigma\Delta)^2$ aber durch denselben Factor als die Summe der Fehlerquadrate $\Sigma\Delta^2$ zu corrigiren sein würde.

Digitized by Google

Wenn m nur einigermassen erheblich wird, stimmt der Correctionsfactor $\sqrt{\frac{m}{m-1}}$ merklich mit $\frac{2m}{2m-1}$ überein, wie folgende Zusammenstellung einer aufsteigenden Skala der Werthe m zeigt.

m	$\sqrt{\frac{m}{m-1}}$	$\frac{2m}{2m-1}$
2	1,4142	1,3333
3	1,2247	1,2000
4	1,1547	1,1429
5	1,1180	1,1111
10	1,0541	1,0526
20	1,0260	1,0256
30	1,0171	1,0169
40	1,0127	1,0127
50	1,0102	1,0101
100	1,0050	1,0050

Schon bei $m=10$, um so mehr bei grösserm m, ist der Unterschied zwischen beiden Correctionsfactoren, mindestens bei psychophysischen Beobachtungen, die keine astronomische Genauigkeit gestatten, so sehr zu vernachlässigen, dass selbst der geringe Vorzug der Bequemlichkeit der approximativen Correction vor der scharfen den Ausschlag zu Gunsten der ersten geben kann, wo man Correctionen öfter bei verschiedenem m anzuwenden hat.

Uebrigens ist nur wenig ungenauer als $\frac{2m}{2m-1}$ der Werth $\frac{2m+1}{2m}$, wofür eine untriftige Ableitung in meinen Elementen zu $\frac{3m+1}{3m}$ geführt hatte.

Die Ableitung der Correction von $\Sigma\varDelta$ aus der von $\Sigma\varDelta^2$ ist diese:

Die falsche Quadratsumme $\Sigma\varDelta^2$ wird nach Obigem auf die richtige $S\varDelta^2$ durch Multiplication mit dem Factor $\frac{m}{m-1}$, der kurz a heisse, zurückgeführt. Lösen wir $\Sigma\varDelta^2$ in die Summe der einzelnen falschen Quadrate auf:

$$\varDelta^2+\varDelta_,^2+\varDelta_{,,}^2\ldots,$$

so erhalten wir daraus durch Multiplication mit a die richtige Summe der Quadrate:

$$a\Delta^2 + a\Delta_{,}^2 + a\Delta_{,,}^2 \ldots$$

Indem aber die richtige Summe der Quadrate mit einer Summe richtiger Quadrate identificirt werden kann, zeigt sich, dass man jedes einzelne falsche Quadrat mit a zu multipliciren hat, um richtige Quadrate zu erhalten, also jeden einzelnen falschen Fehler mit $\sqrt{a}$, um richtige Fehler zu erhalten, mithin auch die ganze Summe der falschen Fehler mit $\sqrt{a}$, um eine Summe richtiger Fehler zu erhalten. Aus der Correction von $\Sigma\Delta$ folgt natürlich von selbst die für ε.

Da die Correction von $\Sigma\Delta^2$ und q bekannt, und ihre theoretische Herleitung durch Mathematiker wie Gauss, Encke, Hauber (vergl. S. 59) sicher gestellt ist, hatte ich nicht nöthig, darauf zurückzukommen; die vorige einfache Ableitung der Correction von $\Sigma\Delta$ und ε aus der von $\Sigma\Delta^2$ aber dürfte theoretischerseits genügen, indess die complicirtere Ableitung einer andern Correction in meinen Elementen der Psychophysik, ungeachtet von der Rechnungsseite richtig und durch einen Mathematiker von Fach in dieser Hinsicht controlirt, an einem Principfehler leidet, den ich unten anzeigen werde.

Inzwischen könnte man auch gegen die obige Correction von $\Sigma\Delta$ nach ihrer Herleitung aus der von $\Sigma\Delta^2$ folgendes Bedenken hegen.

Die falsche Fehlerquadratsumme fällt in jedem einzelnen Falle und nothwendig kleiner aus als die richtige; denn nach einem bekannten Satze ist die Fehlerquadratsumme überhaupt die kleinstmögliche, wenn die Fehler vom arithmetischen Mittel der Beobachtungswerthe gerechnet werden, wie es bei den falschen Fehlern der Fall ist, und um mc^2 grösser, als die kleinstmögliche, wenn sie von irgend welchem, um c vom Mittel verschiedenen, Werthe gerechnet werden, mag dieses der wahre Werth sein oder nicht; jedenfalls aber gehört der wahre Werth zu denen, die vom Mittel irgendwie abweichen. Daher giebt denn auch die Correctionsformel für $S\Delta^2$ einen grössern Werth als für $\Sigma\Delta^2$.

Von der einfachen Fehlersumme aber lässt sich nicht mehr allgemein behaupten, dass sie die kleinstmögliche wird, wenn die Fehler vom arithmetischen Mittel der Beobachtungswerthe gerechnet werden, und es können daher Fälle vorkommen, wo die falsche Fehlersumme $\Sigma\Delta$, die von diesem Mittel gerechnet

ist, grösser wird als die von dem wahren Werthe gerechnete, der von jenem Mittel irgendwie abweicht, wie sich theoretisch zeigen und durch Beispiele belegen lässt, worüber ich auf folgende Einschaltung verweise, die zugleich den Irrthum meiner frühern Ableitungsweise darlegt.

Sei allgemein die, vom arithmetischen Mittel der Beobachtungswerthe an gerechnete, Summe der Fehler oder Abweichungen $\Sigma\Delta$; die, welche von irgend einem um c von jenem Mittel verschiedenen Werthe gerechnet wird, $S\Delta$, ohne Rücksicht noch, ob es der wahre Werth ist, oder nicht; so findet, wie ich in meinen Elementen der Psychophysik (II. S. 368) gezeigt, und wie sich an willkührlich fabricirten Zahlenbeispielen bewähren lässt, zwischen $\Sigma\Delta$ und $S\Delta$ folgende Beziehung statt

$$S\Delta = \Sigma\Delta + (m - 2t)c - 2z = \Sigma\Delta + mc - (2tc + z),$$

wo c nach absolutem Werthe einzuführen ist, t die Zahl der vom Mittel gerechneten Fehler bedeutet, welche absolut grösser als c, aber von gleichem Vorzeichen damit sind, z die Summe der so gerechneten Fehler, welche zwischen 0 und c enthalten, und von gleichem Vorzeichen mit c sind, ebenfalls nach absolutem Werthe Damit nun $S\Delta < \Sigma\Delta$ werde, reicht hin, dass

$$mc < 2(tc + z)$$

werde, was mitunter eintreten kann und wirklich eintritt.

Zur Erläuterung stelle ich folgende Reihe vom arithmetischen Mittel gerechneter, also durch Gleichheit der positiven und negativen Summe charakterisirter, Fehler auf, deren Summe $\Sigma\Delta = 40$ ist. $+10$; $+5$; $+3$; $+2$; 0; -5; -15.

Nimmt man nun $c = +2{,}1$; d. h. rechnet die Fehler voriger Reihe von einem um $+2{,}1$ vom Mittel verschiedenen Werthe, so hat man $m = 7$, $t = 3$, $z = 2$, woraus $S\Delta = 38{,}4$ folgt, welcher Werth kleiner als $\Sigma\Delta = 40$ ist.

Soll $\Sigma\Delta$ und $S\Delta$ als falsche und wahre Summe gelten, so muss c so bestimmt werden, dass die Abweichung des Mittelwerthes der Beobachtungen vom wahren Werthe dadurch repräsentirt wird. Diess kann nach Wahrscheinlichkeit geschehen, und könnte man eben so t und z für ein gegebenes m bestimmen, so würde hiermit die verlangte Correction oder Herleitung von $S\Delta$ aus $\Sigma\Delta$ in einer andern Weise als oben gegeben sein. Hierauf habe ich in meinen Elementen der Psychophysik die Correction von $\Sigma\Delta$ zu stützen gesucht, indem ich eine normale Vertheilung der vom wahren Werthe gerechneten Fehler dabei voraussetzte, für die sich allein die Berechnung führen lässt. Indess ist diese Voraussetzung nicht triftig genug, um zu einer richtigen Correction zu führen, sofern die normale Fehlervertheilung eine gleiche Summe positiver und negativer Fehler voraussetzt, welche aber für die richtigen Fehler nicht stattfinden kann, weil sie für die vom Beobachtungsmittel gerechneten falschen stattfindet. Die Erfahrung selbst hat mich in der alsbald anzugebenden Weise von der Unzulänglichkeit der so hergeleiteten Correction überzeugt, und dadurch veranlasst, einen andern Weg zur Herleitung derselben einzuschlagen, den ich oben mitgetheilt.

Digitized by Google

Da nun die einfache Fehlersumme sich in dieser Hinsicht wesentlich anders verhält, als die Summe der Fehlerquadrate, die Correction der einfachen Summe aber eben so wie die der Quadratsumme allgemein für S einen grössern Werth als für Σ giebt, ohne doch in dieser Hinsicht eben so allgemein zutreffen zu können, könnte man meinen, die vorige Ableitung der Correction von $\Sigma\Delta$ aus der von $\Sigma\Delta^2$ sei überhaupt illusorisch und $\Sigma\Delta$ und $\Sigma\Delta^2$ überhaupt gar nicht aus dem Gesichtspuncte vergleichbar, auf den es bei der Ableitung ankommt.

Indess abgesehen davon, dass sich diess irgendwie in der mathematischen Beziehung der Grössen geltend machen müsste, was nicht der Fall ist, ist auch dagegen zu bemerken, dass, wenn schon die falsche Fehlersumme in einzelnen Fällen grösser als die richtige sein kann, sie doch durchschnittlich gerade eben so gut kleiner und zwar bei gegebenem m in bestimmtem Verhältnisse kleiner, als die richtige ist, wie das Entsprechende bei der Fehlerquadratsumme der Fall ist. Nur für den Durchschnitt gilt aber überhaupt die Correction. Denn auch die falsche Fehlerquadratsumme ist, wenn schon in jedem einzelnen Falle kleiner, doch nur durchschnittlich in bestimmtem Verhältnisse kleiner als die richtige, und das bestimmte Verhältniss, was in dieser Hinsicht für die eine Summe gilt und worauf sich die Correction zu beziehen hat, steht in der mathematischen Verknüpfung, welche sich durch die obige Ableitung herausstellt, mit dem, was für die andere gilt.

Sollte in dieser Hinsicht noch ein theoretisches Bedenken übrig bleiben, so würde doch die nachfolgende experimentale Bewährung des gemeinsamen Zutreffens beider Correctionen geeignet sein, diess Bedenken zu heben. Unstreitig war diese Bewährung aus dem eben angegebenen Gesichtspuncte noch dringender für die von mir abgeleitete Correction der Fehlersumme, als für die keinem mathematischen Zweifel überhaupt unterliegende und längst acceptirte Correction der Fehlerquadratsumme, aber auch für diese möchte ich sie nicht überflüssig nennen, da die bisherige allgemeine Anwendung der Correction von $\Sigma\Delta^2$ bei den Genauigkeitsbestimmungen der Beobachtungen doch noch keinesweges mit einer Bewährung zu verwechseln ist, und da die abstracten Voraussetzungen der Theorie oft in Wirklichkeit nicht hinreichend bestehen, um das Zutreffen des theoretisch Gefolgerten verbürgen zu können. Auch dürfte es überhaupt

Digitized by Google

als allgemeine Regel gelten, das was sich experimental von theoretisch gefolgerten Resultaten bewähren lässt, wirklich zu bewähren, zumal, wenn wieder Anwendungen davon im Experimentalgebiete gemacht werden sollen, wie es mit dieser Correction der Fall ist. Demnach wende ich mich jetzt zu der gemeinsamen Bewährung der Correction für $\Sigma\varDelta^2$ und $\Sigma\varDelta$.

Hierbei ist Folgendes in Rücksicht zu ziehen: Nach der Herleitungsweise der Correction, sei es von $\Sigma\varDelta^2$ oder $\Sigma\varDelta$, aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und wie nur eben bemerkt wurde, kann dieselbe nicht in jedem einzelnen Falle das Richtige treffen, sondern ist nur als die durchschnittlich zutreffende anzusehen, so dass man, wenn man sie in wiederholten Fällen anwendet, im Durchschnitt am genauesten damit fährt, und auch in jedem einzelnen Falle am besten thut, sie anzuwenden, weil man in Ermangelung der Kenntniss der für den besondern Fall gerade zutreffenden sich eben nur an die durchschnittlich richtige halten kann. Man kann also auch die Bewährung der Correction nicht auf einzelne namentlich kurze Beobachtungsreihen stützen wollen, wo sie fehlschlagen kann, sondern muss eine Mehrheit von solchen untersuchen und selbst bei dem aus der Gesammtheit hervorgehenden Resultate noch eine auf Zufälligkeiten zu rechnende kleine Abweichung von der theoretischen Foderung gestatten, welche so zu sagen den Beobachtungsfehler eines mittleren Resultates vertritt.

Das obige Beispiel für Tilsit kann in dieser Hinsicht gleich erläuternd sein. Der einfache Mittelfehler oder die mittlere Schwankung ε, aus der Totalsumme $\partial m = 30$ gezogen, war 1,290; die drei einfachen Mittelfehler, aus den 3 Fractionen $\partial m = 10$ gezogen, sind 1,290; 1,064; 1,208. Nun ist selbstverständlich, dass diese drei verschiedenen Werthe nicht durch dieselbe Correction übereinstimmend unter einander und mit dem Werthe ε_1 gemacht werden können, welcher durch Correction des Werthes ε bei $m = 30$ erhalten wird.

Eine Hauptschwierigkeit, die der Prüfung entgegensteht, liegt darin, sich geeignete Fehler- oder Abweichungsreihen von grösserem Umfange, wie solcher aus vorigem Gesichtspuncte gefodert wird, zu verschaffen, um die Prüfung daran vorzunehmen. Veröffentlichte grössere astronomische oder physikalische Fehlerreihen, welche sich dazu eigneten und die ich freilich am

Digitized by Google

liebsten benutzt hätte, sind mir gar nicht bekannt, ungeachtet ich mich danach umgesehen habe.*) Von psychophysischen Fehlerreihen, gewonnen durch die Methode der mittleren Fehler, stand mir zwar schon lange ein grosses Material durch eigne und Volkmanns Beobachtungen zu Gebote; aber die Mehrzahl derselben ist wegen der selten ganz fehlenden Complication mit Variationen des constanten Fehlers, wovon ich in meinen Elementen (I. S. 91) gesprochen und worauf ich unten zurückkommen werde, nicht geeignet als Unterlage der Prüfung zu dienen, wenn man die Prüfung bis zu grösserem *m* fortführen will. Doch habe ich einige solche Reihen dazu zu benutzen vermocht, wovon das Resultat unten folgt. Am besten geeignet haben sich mir im Allgemeinen meteorologische Schwankungen, von der Art, wie ich oben ein Beispiel gab, gezeigt, und hierauf werde ich im Folgenden hauptsächlich fussen, was nebstbei den doppelten Vortheil hat, eine Controle möglich zu machen, ohne dass ich lange Fehlerreihen anführe, da Dove's Tabellen dazu jedem vorliegen, und zu beweisen, dass die meteorologischen Abweichungen, welche durch die Natur hervorgebracht werden, wirklich denselben allgemeinen Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, als die von Menschen begangenen Beobachtungsfehler, gehorchen. Ausserdem habe ich noch künstliche Fehlerreihen, nach dem S. 71 angegebenen Principe hergestellt, benutzt, das Zutreffen der Correction bei Fehlerreihen, die sich direct auf das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler stützen, zu prüfen und zu bewähren.

Das Princip der Bewährung liegt nach den schon gegebenen Andeutungen kurz darin, dass man erfahrungsmässig beweist, dass die durch Fractionirung auf verschiedenes endliches *m* aus denselben Beobachtungswerthen gewonnenen Mittel- oder Summenwerthe der Abweichungen oder Fehler durch die betreffende Correction durchschnittlich oder in Summa auf denselben Werth kommen. Hat man z. B. eine Fehlersumme bezüglich der Mittelgrösse einer Totalreihe à $m=30$ wie oben bestimmt, so ist sie durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{30}{29}}$ zu corrigiren; die aus ihren Fractionen à $m=10$ gefundenen gegen die Special-

*) Die von Bessel in s. Fundament. astron. 1818 p. 18 ff. veröffentlichten Fehlerreihen zur Prüfung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Fehler geben nicht die einzelnen Fehler, sondern blos die Zahl der Fehler in gegebenen Intervallen, und können daher hier nicht dienen.

Digitized by Google

mittelgrössen dieser Fractionen bestimmten Fehlersummen sind durch $\sqrt{\frac{10}{9}}$ zu corrigiren, und hienach muss die zusammengesetzte Summe dieser corrigirten Fractionssummen, (oder, was auf dasselbe hinauskommt, die mit $\sqrt{\frac{10}{9}}$ auf einmal corrigirte zusammengesetzte Summe der uncorrigirten Fractionssummen) $\grave{\Delta}m = 10$ mit der wie oben corrigirten Summe $\grave{\Delta}m = 30$ übereinkommen, oder doch nicht weiter davon abweichen, als man auf einen Rest unausgeglichener Zufälligkeiten zu schreiben berechtigt ist. Dasselbe muss sich, falls die Gültigkeit der Correction bis zu den kleinstmöglichen Werthen von m herabreichen sollte, noch bei Fractionirung bis zu $m=3$ und $m=2$ wiederfinden, wo die Correction durch $\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{2}$ zu bewirken ist. Insofern aber in einer einzigen Beobachtungsreihe, z. B. für blos einen Monat in Tilsit, das Resultat durch unausgeglichene Zufälligkeiten noch zu sehr gestört sein kann, combinire ich das entsprechend berechnete Resultat für mehrere Monate, wie ich schon oben zeigte; und so sind in der ersten der folgenden Tabellen (Tabelle für Tilsit) die Werthe für 8 Monate, in der zweiten (für Danzig) für 6 Monate, in der dritten (für Berlin) ebenfalls für 6 Monate addirt.

Ganz entsprechend ist bei Prüfung der Correction der Fehlerquadratsumme verfahren.

Zu noch vollständigerer Ausgleichung der Zufälligkeiten habe ich überdiess im Allgemeinen die Berechnung stets mit einer doppelten oder selbst dreifachen Abtheilungsweise in dem S. 66 angegebenen Sinne vorgenommen, und aus den dabei erhaltenen Resultaten das Mittel gezogen.

Ich erläutre und specificire diess noch etwas näher am obigen Beispiele. Die drei Partialsummen $\grave{\Delta}m = 10$ für den Mai in Tilsit, gleich 12,90; 10,64 und 12,70 wurden erhalten, indem ich die ganze Reihe der 30 Werthe in die drei Fractionen

von 1820—1829
1830—1839
1840—1849

theilte. Darauf ward dieselbe Rechnung noch einmal mit einer Abtheilungsweise in drei anders gefasste Fractionen, nämlich

von 1825—1834
1835—1844
(1845—1849) + (1820—1824)

vorgenommen, indem die Reihe der Jahre, statt mit 1820, mit 1825 begonnen ward; die ersten 5 Jahre von 1820—1824 aber als letzte in die letzte Fraction mit aufgenommen wurden, gleichsam als wenn die Reihe der Jahre in sich zurückliefe, was ich ein Rückgreifen auf die ersten 5 Jahre nennen will. Hier wurden statt der vorigen folgende 3 partiale Fehlersummen $\partial m=10$ erhalten: 8,92; 16,20; 12,92; als daraus zusammengesetzte Totalsumme also 38,04, indess vorhin 36,24. Von beiden Zahlen ist das Mittel angenommen und, mit dem eben so berechneten Mittel für die andern Monate combinirt, in der folgenden Tabelle für Tilsit bei $m=10$ aufgeführt.

Bei den Berechnungen für $m=2$ und $m=5$ (welches blos bei Danzig geprüft ist) ist ebenfalls folgends eine doppelte, bei $m=3$ sogar eine dreifache Abtheilung mit schliesslichem Rückgreifen auf die ersten Jahre eingehalten und jedesmal das Mittel der Resultate genommen worden; man findet aber auch die Einzelresultate für die verschiedenen Abtheilungsweisen an den verschiedenen Beobachtungsorten (addirt für alle Monate) unten specificirt. Bei $m=2$ fing ich für Tilsit einmal mit 1820, das andremal mit 1821 an, bei $m=3$ einmal mit 1820, das andremal mit 1821, das drittemal mit 1823. Entsprechend bezüglich der Ordnung der Jahre vom ersten ab ward bei den andern Beobachtungsorten als für Tilsit verfahren, und dieselben mehrfachen Berechnungen mit denselben Abtheilungsweisen auch für die Correction von $\Sigma\Delta^2$ eingehalten.

Hiernach theile ich das Resultat der Prüfung betreffs der meteorologischen Beobachtungen für die drei Orte, wo ich sie untersucht habe, in den folgenden Tabellen mit. Sie beziehen sich, um das Vorhergehende zu resumiren, sämmtlich auf Abweichungen der Temperatur gegebener Monate in einer Reihe Jahre vom vieljährigen Mittel derselben Monate nach Art der oben für den Mai in Tilsit verzeichneten. Die Resultate der verschiedenen Monate sind für jeden Ort addirt. Die Spalten $\Sigma\Delta$ und $\Sigma\Delta^2$ enthalten die uncorrigirten, die Spalten $S\Delta$ und $S\Delta^2$ die entsprechenden corrigirten Fehlersummen und Fehlerquadratsummen, von denen die uncorrigirten mit Ausnahme für das grösste m durch Zusammensetzung aus Partialsummen und Mittelziehung bei verschiedenen Abtheilungsweisen in angegebener Weise erwachsen, die corrigirten durch Multiplication mit dem demgemässen Corrections-Factor daraus abgeleitet sind. Einige Specialitäten bezüglich jeder Tabelle insbesondre sind in den Anmerkungen beigefügt.

Man hat nun betreffs des Resultats der Prüfung darauf zu achten: 1) wie beträchtlich die falschen Summen $\Sigma\Delta$ und $\Sigma\Delta^2$ mit abnehmendem m der Fractionen abnehmen oder mit wachsendem wachsen, 2) mit welcher Approximation die mittelst der obigen Correctionen daraus abgeleiteten richtigen Summen $S\Delta$ und $S\Delta^2$ für die verschiedensten m übereinstimmen.

Digitized by Google

Tilsit 1820—1849 (Dove S. XX).
(Abweichungen von 8 Monaten durch 30 Jahre. — Monate: alle mit Ausnahme von Januar, Februar, März und Juli.*))

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$	$\Sigma\Delta^2$	$S\Delta^2$
2	212,50	300,53	310,020	620,040
3	242,63	297,12	420,878	631,317
10	280,51	295,69	593,295	659,220
30	289,13	294,07	626,445	648,250

Danzig 1807—1836**) (Dove S. XXI).
(Abweichungen von 6 Monaten durch 30 Jahre. — Monate: Februar, April, Mai, Juni, Juli, September.***))

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$	$\Sigma\Delta^2$	$S\Delta^2$
2	128,40	181,59	158,47	316,93
3	149,88	183,56	207,07	310,60
5	161,90	181,02	»	»
10	175,64	185,14	296,83	329,81
30	186,89	190,09	323,27	334,42

*) Januar, Februar, März sind nicht zugezogen, weil die Summe der positiven und negativen Abweichungen in der Originaltabelle hier nicht genau genug stimmend gefunden ward, Juli nicht, weil die Angabe für 1849 fehlt. Insofern auch bei den hier zugezogenen Monaten noch eine kleine Abweichung zwischen positiver Summe P und negativer Summe N der Abweichungen bei $m = 30$ in den Originaltabellen bestand, sind genauigkeitshalber nicht die daselbst gegebenen Abweichungen, sondern die gegen $\pm \frac{P-N}{30}$ gerechneten Abweichungen (vgl. S. 65) zur Summe $\Sigma\Delta$ à 30 verwandt, obwohl die Summe sich dadurch sehr unbedeutend ändert.

**) Die Originaltabellen geben noch die Werthe für 1837 und 1838; um aber blos 30 Werthe wie bei den andern Tabellen zu behalten, sind diese Jahre weggelassen, das Mittel der 30 Jahre 1807—1836 genommen, und hienach $\Sigma\Delta$ und $\Sigma\Delta^2$ für $m = 30$ bestimmt, nicht aber die für das Mittel der 32 Jahre geltenden Abweichungen der Originaltabellen angewandt. Die doppelte Abtheilungsweise bei $m = 5$ (wo blos $\Sigma\Delta$ bestimmt ward) geschehe einmal von 1807, das andremal von 1809 beginnend; die anderweiten Abtheilungen entsprechend bezüglich der Ordnung der Jahre als oben (S. 79 f.) für Tilsit angegeben.

***) Die übrigen Monate wegen nicht hinreichend stimmender positiver und negativer Summe bei Seite gelassen.

Digitized by Google

Berlin 1822 bis 1849 + 2 Jahre*) (Dove S. XXIV).
(Abweichungen der ersten 6 Monate**) durch 30 Jahre.)

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$	$\Sigma\Delta^2$	$S\Delta^2$
2	185,79	262,75	394,583	789,166
3	213,75	261,79	510,080	765,120
10	252,78	266,45	681,426	757,140
30	258,04	262,45	715,718	740,398

Addirtes Resultat der drei vorstehenden Tabellen, abgeleitet aus 600 meteorologischen Abweichungen.

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$	$\Sigma\Delta^2$	$S\Delta^2$
2	526,69	744,87	863,07	1726,14
3	606,26	742,52	1138,03	1707,05
10	708,93	748,08	1571,55	1746,17
30	734,06	746,61	1665,43	1722,85

Natürlich ist das für alle Beobachtungsorte addirte Gesammtresultat der letzten Tabelle als dasjenige, in welchem sich die Zufälligkeiten am meisten ausgeglichen haben, das massgebendste, und man dürfte die approximative Uebereinstimmung der corrigirten Werthe S im Uebergange von $m=2$ zu $m=30$ bei so grosser Abweichung der uncorrigirten Σ sowohl bei den einfachen Fehlersummen als Fehlerquadratsummen sehr befriedigend finden.

Die Grösse der aus den Partialsummen zusammengesetzten Totalsumme kann sich etwas ändern, je nach der Abtheilungs-

*) Da Dove's Tabellen blos 28 Jahre von 1822 bis 1849 für denselben Mittelwerth (Dove S. XIX) geben, so mussten noch 2 Jahre zur Ergänzung von 30 Jahren zugefügt werden; hiezu ist bei $m=2$ und $=3$, so wie bei der einen Abtheilungsweise für $m=10$ auf die ersten zwei Jahre 1822, 1823, bei der andern Abtheilungsweise für $m=10$ aber auf 1827 und 1828 zurückgegriffen und diese Jahre der letzten Fraction zur Vervollständigung der 10 Jahre einverleibt worden. Auch habe ich die Rechnung für $m=30$ doppelt für beide Ergänzungsweisen geführt, und das Mittel aus den beiden Specialergebnissen (259,86 und 256,22 für $\Sigma\Delta$; 748,062 und 688,378 für $\Sigma\Delta^2$) oben aufgeführt. Im Uebrigen geschehen die Abtheilungen entsprechend bezüglich der Ordnung der Jahre als oben S. 79 f. für Tilsit angeführt worden.

**) Die letzten 6 Monate des Jahres sind nicht geprüft worden.

Digitized by Google

weise, die man bei der Fractionirung einschlägt, wie das Beispiel S. 66 für Tilsit gezeigt hat. Um übersehen zu lassen, wie sich der Spielraum solcher Aenderungen ungefähr gestaltet, füge ich hier die Resultate für die verschiedenen Abtheilungsweisen, aus denen in obigen Tabellen die Mittel gegeben sind, addirt für alle geprüften Monate, in besonders unter einander stehenden Werthen bei.

m	Tilsit.	Danzig.	Berlin.
		$\Sigma\Delta$	
2	221,50	124,79	198,48
	203,50	132,01	173,10
3	229,63	150,13	216,62
	248,81	148,43	212,09
	249,46	150,85	212,55
5	»	153,664	»
	»	170,142	»
10	283,90	179,004	253,57
	277,12	172,278	251,98
		$\Sigma\Delta^2$	
2	241,0450	148,838	398,50
	281,075	168,094	390,62
3	363,267	209,722	516,298
	448,562	200,848	520,889
	450,805	210,627	493,054
10	610,426	299,799	708,628
	576,163	293,852	654,223

So viel von den Bewährungen der Correction wegen des endlichen m im Gebiete der Meteorologie. Ich habe schon erinnert, dass Fehlerreihen, die durch psychophysische Massnahmen gewonnen sind, sich meist weniger als Grundlage zur Bewährung eignen, und erkläre mich jetzt noch etwas näher darüber.

Möge hiebei der Kürze halber die Normaldistanz A, eine einzelne Fehldistanz f, die mittlere Fehldistanz F heissen, ferner ein roher Fehler $=f-A$ mit δ, ein reiner $=f-F$ mit Δ, der constante Fehler $=F-A$ mit c bezeichnet werden.

Da die Correction wegen des endlichen m principiell nur auf Fehler geht, welche als Abweichungen der einzelnen Beob-

Digitized by Google

achtungswerthe (Fehldistanzen f) von ihrem Mittelwerthe, welcher F aber nicht A ist, anzusehen, so sind auch zur Prüfung der Correction nicht die rohen Fehler δ, d. i. Abweichungen der Fehldistanzen von der Normaldistanz A, sondern reinen Fehler Δ oder Abweichungen der Fehldistanzen von ihrem Mittel F anzuwenden, und eben so zu behandeln, wie meteorologische Abweichungen in obigem Sinne.

Hiebei aber tritt folgende Schwierigkeit ein. Die mittlere Fehldistanz F mit ihrer Abweichung c von der Normaldistanz A ist nach dem wechselnden Zustande des Beobachters von einem Tage zum andern selbst mehr oder weniger veränderlich. An einem Tage mache ich vielleicht die Fehldistanz fast immer zu gross gegen die Normaldistanz, an einem anderen unter denselben äusseren Versuchsumständen wegen innerer unberechenbarer Umstände fast immer zu klein, so dass einmal c positiv, das andremal negativ wird, oder ich finde doch den Werth c bei gleichem Vorzeichen erheblich verschieden an verschiedenen Tagen. Um nur ein kurzes ganz beiläufiges Beispiel zur Anknüpfung der Erläuterung aus meinen Beobachtungsreihen herauszugreifen, so fand ich an zwei verschiedenen Tagen in je 6 hinter einander angestellten Augenmassversuchen unter denselben äusseren Versuchsumständen bei einer Normaldistanz gleich 50 d*) folgende Fehldistanzen f.

Werthe von f am

	28. Dec.	30. Dec.
	51,1	49,2
	51,2	48,4
	50,8	50,4
	52,4	49,0
	49,1	48
	49,6	49,2
Mittel F	50,70	49,03

Am ersten Tage wichen also die hier verzeichneten Fehldistanzen f überwiegend in Plus, am andern in Minus von der Normaldistanz $A=50$ ab, und gaben daher am ersten eine zu grosse, am zweiten eine zu kleine mittlere Fehldistanz F, mithin respective ein positives und negatives c. Bei so kurzen Reihen

*) $d = \frac{1}{4}$ par. Decimallinie.

Digitized by Google

und kleinem c kann diess freilich auf Rechnung noch unausgeglichener Zufälligkeiten geschrieben werden, und nicht nur eine Veränderung des constanten Fehlers, sondern selbst das Dasein eines solchen, der diesen Namen verdient, bezweifelt werden, da ja, auch ohne allen constanten Grund einer Abweichung vorzugsweise nach einer Richtung, die aus endlichem m gewonnene mittlere Fehldistanz F durch Wirkung unregelmässiger Zufälligkeiten bald nach dieser bald nach jener Richtung etwas von der Normaldistanz A abweichen muss. Aber das Dasein eines constanten Fehlers im eigentlichen Sinne kann nicht mehr bezweifelt werden, wenn, wie es sich gemeinhin findet, der Werth von c sich in demselben Sinne durch eine längere Reihe von Werthen forterhält, und erheblich grösser ist, als der leicht aus den Fehlern selbst zu berechnende wahrscheinliche Fehler der Grösse F, der sich auf die unregelmässigen Abweichungen bezieht, die Veränderung des constanten Fehlers nicht, wenn der Werth c von einer Periode zur andern in Grösse oder selbst Richtung erheblich mehr variirt, als der ebenfalls leicht zu berechnenden wahrscheinlichen Differenz zwischen den betreffenden Theilen der Fehlerreihe, welche von Zufälligkeiten abhängt, entspricht. In dieser Beziehung steht mir ein sehr grosses Material theils von mir selbst angestellter, theils von mir veranlasster Beobachtungen durch Andere im Gebiete des Tastmasses und Augenmasses zu Gebote, welche ich vielfach solchen Wahrscheinlichkeitsberechnungen unterworfen habe. Die Mittheilung und Erörterung davon würde nur hier in Verhältniss zu gegenwärtigem Zweck zu viel Raum kosten. Es genügt hier, auf den betreffenden Umstand als auf eine Thatsache zu verweisen, deren Bewährung jeder leicht selbst finden kann, wenn er sich auf derartige Untersuchungen einlassen will.

Bemerken wir nun, dass Beobachtungsreihen bezüglich derselben Normalgrösse A mit grossem m nur durch Zusammenfassung der Versuche mehrerer Tage erhalten werden können und Summen $\Sigma\Delta$ mit grossem m nur, wenn man die Abweichungen von dem Totalmittel der Fehldistanzen nimmt, die durch mehrere Tage erhalten worden sind. Hat nun F und mithin c erheblich von einer Tagesfraction zur andern variirt, so sind die Abweichungen, die man von dem Totalmittel F nimmt, nicht mehr vergleichbar mit denen, die von den Fractions-Fs gewonnen werden; die Variation von F oder c geht dann mit in

Digitized by Google

die Fehler ein, die man von dem Totalmittel F nimmt, indess sie nicht in die eingeht, die man von den Partialmitteln F nimmt, was dann mit sich bringt, dass die Fehlersumme bei dem grossen m verhältnissmässig zu gross gegen die aus den Fractionen mit kleinem m zusammengelegte wird und dass letztere durch die Correction nicht mehr zur Uebereinstimmung mit ersterer gebracht werden kann, sondern dahinter zurückbleibt.

Ein fingirtes extremes Beispiel wird diess am besten erläutern. Seien an einem Beobachtungstage, bei der Normalgrösse $A = 100$, folgende einander gleiche Fehldistanzen f beobachtet worden 101, 101, 101, 101, 101, an einem andern 98, 98, 98, 98, 98, so ist die partiale Fehlersumme $\Sigma\Delta$ à $m = 5$ in jeder beider Tagesfractionen für sich null, weil alle Fehldistanzen f wegen ihrer Gleichheit unter einander auch mit ihrem Mittel F übereinstimmen, also keine Abweichung, keinen Fehler zeigen. Legt man dagegen alle 10 Fehldistanzen zusammen, so geben sie eine dazwischen fallende mittlere Fehldistanz $F = 99,5$, von der alle erheblich abweichen, und mithin eine unverhältnissmässig grosse Fehlersumme à $m = 10$, welche 15,0 beträgt. Wie leicht zu erachten, würde einige Verschiedenheit zwischen den Fehlern jedes Tages bei grosser Verschiedenheit zwischen beiden Tagen wesentlich ein entsprechendes Resultat geliefert haben.

Gehen wir in dieser Hinsicht auf das Beispiel der Wirklichkeit S. 84 zurück, so ist die aus der ersten Fraction (28. Dec.) à $m = 6$ abgeleitete Fehlersumme $\Sigma\Delta = 5,40$, die aus der zweiten (30. Dec.) abgeleitete 3,38, die aus beiden zusammengesetzte Totalsumme à $m = 6$ also 8,78 und durch $\sqrt{\frac{6}{5}}$ corrigirt 9,629. Die aus der Gesammtheit beider Fractionen abgeleitete Fehlersumme à $m = 12$, der das Mittel aller 12 Fehldistanzen 49,865 unterliegt, ist 3,110 und durch $\sqrt{\frac{12}{11}}$ corrigirt 13,693, wogegen 9,629 ausserordentlich zurückbleibt, da doch, wenn die Correction genügen sollte, beide Werthe approximativ übereinstimmen müssten.

Etwas Aehnliches wird man meistens finden, wenn man die Correction auf psychophysische Fehlerreihen, die aus Beobachtungsreihen durch eine Reihe von Tagen zusammengelegt sind, anwendet, wenigstens im Gebiete des Augenmasses und

Digitized by Google

Tastmasses, worauf sich meine Untersuchungen bisher beschränken; zugleich sich aber auch immer von der die wahrscheinlichen Gränzen des Zufalls überschreitenden Variation des Werthes *F* und *c*, woran dieser Fehlschlag der Correction hängt, überzeugen können. *)

Nun aber ist kein principielles Hinderniss, dass eine Correction, die für die Zusammenfassung zweier an verschiedenen Tagen gewonnenen Fractionen nicht genügt, für jede insbesondere bei Unterfractionirung derselben genüge. Zerlegen wir also in unserm Beispiele beide Fractionen à $m=6$ in Unterfractionen à $m=2$, setzen die von den Specialmittelwerthen dieser Unterfractionen gerechneten Partialsummen $\Sigma\Delta$ zusammen und vergleichen sie mit der Totalsumme à $m=6$. Führen wir diess mit doppelter Abtheilungsweise und Division mit 2 aus, so erhalten wir als zusammengesetzte Totalsumme à $m=2$ im Ganzen 6,9 und mit $\sqrt{\frac{2}{1}}$ corrigirt 9,7583, welches sich dem obigen Werthe 9,629, der durch Correction der Totalsumme à $m=6$ mittelst $\sqrt{\frac{6}{5}}$ entsteht, noch mehr nähert, als man nach der geringen Zahl Beobachtungen, die hier zugezogen sind, im Durchschnitt zu erwarten berechtigt war. Denn man würde in der That sehr irren, wenn man eine so grosse Approximation bei so wenigen Beobachtungen überall erwarten wollte. Hier galt es nur ein erläuterndes Beispiel.

Um also die psychophysischen Beobachtungen zur Prüfung der Correction anzuwenden, muss man entweder die Prüfung nur bis zu so kleinem *m* treiben, als sich durch hinter einander angestellte Beobachtungen desselben Tages unter möglichst gleichen äusseren und inneren Versuchsumständen erlangen lässt, oder man muss Beobachtungsreihen aussuchen, in denen die Variation von *F* und *c* von einem Tage zum andern nicht grösser ist, als nach Wahrscheinlichkeit auf Zufall geschrieben werden kann.

Unter den von mir in dieser Beziehung untersuchten Beobachtungsreihen finde ich nur wenige, die dieser Bedingung entsprechen; doch lassen sich solche finden. So habe ich in meinen Elementen der Psychophysik die Hauptdata einer in

*) Ein Beispiel giebt z. B. die Tastversuchsreihe V. in meinen Elem. der Psychophys. II. S. 356, wo man die hierauf bezüglichen Data findet.

Digitized by Google

Tagesfractionen à $m=10$ angestellten Tastversuchsreihe (Reihe VI. α in den Elem. II. S. 363 ff.) mitgetheilt, von der diess nach eben diesen Datis gelten kann. Nicht minder finde ich in einer in Tagesfractionen à $m=6$ angestellten mikrometrischen Augenmassversuchsreihe von Volkmann (Reihe IV. in den Elem. I. 221), so weit ich sie in dieser Hinsicht untersucht habe, die Correction anwendbar, und wahrscheinlich würden sich in dem mir vorliegenden Material noch mehrere finden lassen.

Hier folgen nun für diese beiden Fehlerreihen die Zahlenergebnisse, auf die es zuletzt hinsichtlich der Prüfung der Correction ankommt. Die Fehlerreihen selbst mitzutheilen, würde in Betracht der Umfänglichkeit derselben zu viel Raum kosten; und nachdem eine Controle der von mir erhaltenen Bewährungen hinsichtlich der meteorologischen Beobachtungen nach den Originaldatis der Dove'schen Tabellen möglich ist, für diese, in ganz analoger Weise aufgefassten und berechneten Beobachtungen nicht mehr so wichtig sein. Ueber die Versuchsumstände kann man, wenn man will, Näheres in meinen Elementen an den citirten Orten nachlesen. Die Einheit der Fehler ist hier gleichgültig. Bei $m=2$ ist eine doppelte Abtheilungsweise eingehalten, bei den andern m's nur eine einfache. Bei der zweiten der folgenden Reihen ist die Rechnung blos für die Fehlersummen nicht Fehlerquadratsummen geführt, auch ist diese Reihe eigentlich nur ein Bruchstück einer grösseren Reihe, die ich aber blos nach diesem Theile betreffs der Correctionsprüfung berechnet habe.

Tastversuchsreihe von Fechner mit 400 Fehlern.
(Reihe VI. α in den Elem. d. Psych. II. S. 363 ff.)

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$	$\Sigma\Delta^2$	$S\Delta^2$
2	53,450	75,592	11,450	22,900
5	65,020	72,695	17,116	21,395
10	70,620	74,441	19,983	22,203
50	74,816	75,578	21,802	22,043
100	75,840	76,223	22,011	22,233

Digitized by Google

Augenmassversuchsreihe von Volkmann mit 360 Fehlern.

(Reihe IV. in den Elem. I. S. 221, bei den Distanzen 1000, 1200 und 1400.)

m	$\Sigma\Delta$	$S\Delta$
2	4476,0	6330,1
6	5626,8	6163,8
30	6180,7	6286,5

Nach dem, was ich über die Variation des constanten Fehlers gesagt habe, leuchtet ein, dass die Unvergleichbarkeit, welche Fehlersummen aus grossem m und kleinem m vermöge derselben zeigen können, durch die Correction wegen des endlichen m nicht zu heben ist, und diess ist der Grund, wesshalb ich grössere psychophysische Fehlerreihen gern so weit, am liebsten nach Tagesfractionen à $m = 10$, fractionire, dass eine Variation des constanten Fehlers innerhalb der einzelnen Fractionen als fehlend angesehen werden kann, wonach dann die Correction wegen des endlichen m das Erforderliche leistet, die Fehlersummen vom kleinen m mit der vom grossen m vergleichbar zu machen.

Eine sehr ausgedehnte Bewährung der Correction wegen des endlichen m habe ich endlich noch an künstlichen Fehlerreihen gewonnen, welche nach dem oben (S. 71) kurz angedeuteten Principe durch Uebersetzung von Lotterienummern in Fehler nach dem theoretischen Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehler erhalten wurden, und wodurch am directesten bewiesen wird, dass die Correction diesem Gesetze entspricht. Indess konnte natürlich hiedurch nicht bewiesen werden, dass die in der Erfahrung gebotenen meteorologischen Abweichungen und psychophysischen Fehler der Fehlertheorie genügend entsprechen, um die Correction darauf anzuwenden, und da die Erörterung der Ausführung jenes Princips nicht ohne Umständlichkeit geschehen könnte, was ich lieber auf die Mittheilung anderweiter Untersuchungen verspare, worein sie eingreift, abstrahire ich hier davon, indem das Vorige genügen dürfte, die Anwendbarkeit der Correction in der Psychophysik bei erforderlicher Fractionirung der Beobachtungen und in der Meteorologie zu sichern.

Inzwischen ist in Betreff der letzteren Anwendung folgende

Digitized by Google

Bemerkung wesentlich. Eben so wie in der Psychophysik wird sich die Correction in der Meteorologie nur in so weit gültig erweisen können, als die Umstände, welche den Mittelwerth bestimmen, um den die Schwankungen statt finden, wirklich in der Art constant bleiben, dass die Schwankungen darum als rein zufällige Unregelmässigkeiten angesehen werden können. Sollte diess nicht der Fall sein, z. B. die Mitteltemperatur eines Monates vermöge einer Aenderung der constanten Umstände, von denen sie wesentlich abhängt, sich von einem Jahrzehnt zum andern mehr geändert haben, als noch unausgeglichenen Zufälligkeiten beigemessen werden kann, was zu beurtheilen die Wahrscheinlichkeitsrechnung Regeln an die Hand giebt, so würde auch die Correction bei einer Zusammenfassung solcher Jahrzehnte im Vergleich mit den einzelnen Jahrzehnten nicht mehr genügen können. Die obigen Beispiele, welche aus Dove's reichhaltigen Tabellen hauptsächlich nur aus dem Gesichtspuncte ausgewählt wurden, für mehrere Beobachtungsorte eine übereinstimmende, nicht zu kleine Zahl Jahre zu Grunde zu legen, beweisen im Allgemeinen durch das durchschnittliche approximative Genügen der Correction, dass die Bedingung dieses Genügens durchschnittlich an den betreffenden Beobachtungsorten erfüllt war, womit jedoch nicht behauptet werden kann, dass sie sich überall und für viel längere Zeiträume auch nothwendig erfüllt zeigen muss. Nach den Untersuchungen von Karl Fritsch in den Sitzungsber. d. Wien. Akad. IX. p. 902 scheint es z. B., dass die Lufttemperatur an einer Mehrzahl in dieser Beziehung untersuchter Beobachtungsorte einer langsamen secularen Aenderung unterworfen ist; und diess müsste nothwendig der Gültigkeit der Correction bei der Reduction der Resultate kurzer auf längere Zeiträume Abbruch thun. Innerhalb 30 Jahren jedoch kann sich diess noch nicht erheblich geltend machen.

Man übersieht leicht, dass die Rechnungen, die zu den vorigen Bewährungen nöthig waren, wenn schon an sich nicht schwierig, doch ausserordentlich ermüdend und zeitraubend waren und einen beträchtlichen Grad von Geduld erforderten. Um so mehr, als man bei den vielen Additionen, Subtractionen und Quadrirungen, die es zu machen giebt, sicher sein kann, sich wiederholt zu verrechnen, wenn man nicht überall, wo keine Controlen vorliegen, die übrigens selbst zur Vermehrung der Arbeit beitragen, sich durch eine Revision von der

Digitized by Google

Richtigkeit überzeugt, die daher auch bei allen obigen Rechnungen nie versäumt worden ist.

Die Correctionsformeln enthalten ein ganz interessantes Resultat, welches man durch die obigen Tabellen bestätigt finden kann, und welches sich so aussprechen lässt:

Wenn man eine zahlreiche Reihe Beobachtungswerthe bezüglich derselben Grösse hat, und die Fehler oder Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerthe vom Totalmittel derselben nimmt, so steht die Summe dieser Abweichungen (solche nach absolutem Werthe verrechnet) im Verhältniss von $\sqrt{2}:1$ zu der Summe der Abweichungen, welche man erhält, wenn man die ganze Reihe der Beobachtungswerthe in Fractionen à $m=2$ theilt, von jeder dieser Fractionen den Mittelwerth besonders sucht, und hiergegen die Abweichungen bestimmt; die Summe der Quadrate der ersten Abweichungen zur Summe der Quadrate der zweiten Abweichungen aber im Verhältniss von $2:1$; kurz die Quadratsumme halbirt sich gerade beim Herabgehen vom grössten zum kleinsten m.

Diess Resultat kann man für die Summe der Fehlerquadrate auch unabhängig von der allgemeinen Herleitung der Correction durch eine Combination nachfolgender 3 Sätze finden. Ist es aber für die Summe der Fehlerquadrate erwiesen, so folgt es daraus für die einfache Fehlersumme in der früher angegebenen Weise von selbst.

1) Es sei eine Reihe Fehler gegeben, welche gegen den Beobachtungsmittelwerth der ganzen Reihe bestimmt sind. Dann erhält man eine partiale Fehlersumme für eine Fraction à $m=2$ bezüglich der dieser Fraction besonders zukommenden Mittelgrösse, wenn man die zwei gegen den allgemeinen Mittelwerth gegebenen Fehler dieser Fraction algebraisch von einander subtrahirt, d. h. bei gleichem Vorzeichen nach absolutem Werthe von einander abzieht, bei ungleichem addirt. Denn sei der Mittelwerth der ganzen Beobachtungsreihe, gegen welchen alle Fehler ursprünglich bestimmt sind, F, und seien die beiden Fehler einer Fraction à $m=2$, so wie sie gegen den ursprünglichen Mittelwerth bestimmt sind, α und β, beliebig positiv oder negativ gedacht, so sind die Beobachtungswerthe dieser Fraction $F+\alpha$, $F+\beta$, das Mittel davon $F+\frac{\alpha+\beta}{2}$, und die Differenzen der beiden Beobachtungswerthe von diesem Mittel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\frac{\beta-\alpha}{2}$,

Digitized by Google

also nach absolutem Werthe gleich nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Indem sie aber nach der Definition der Fehlersumme (S. 58) so zu addiren sind, als wenn sie beide gleiches positives Vorzeichen hätten, ist das Vorzeichen der negativen Differenz, welche $\frac{\beta-\alpha}{2}$ sei, umzukehren, wonach die Fehlersumme $\alpha-\beta$ wird.

2) Das Quadrat einer einzelnen Fehlersumme *à* $m=2$ bezüglich des Mittels der betreffenden Fraction *à* $m=2$ bestimmt, ist das Doppelte der Summe der beiden Fehlerquadrate *à* $m=2$. Denn da bei $m=2$ beide Fehler Δ dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, so ist die absolute Summe der Fehler 2Δ, das Quadrat dieser Summe $4\Delta^2$, indess die Summe der gleichen Fehlerquadrate $\Delta^2+\Delta^2=2\Delta^2$ ist. Demnach wird auch eine Totalsumme, die dadurch gewonnen ist, dass man die Quadrate mehrerer partialen einzelnen Fehlersummen von Fractionen *à* $m=2$ addirt, doppelt so gross sein, als die Totalsumme der Einzelquadrate von Fehlern, die aus denselben Fractionen *à* $m=2$ gewonnen sind.

3) Wenn man zwei Fehlerreihen von gleicher oder ungleicher Präcision, die jede bezüglich einer gegebenen Mittelgrösse gewonnen sind, so wie sie der Zufall gegeben hat, neben einander stellt,

$$\begin{matrix} \Delta' & \Delta_, \\ \Delta'' & \Delta_{,,} \\ \Delta''' & \Delta_{,,,} \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

und die gegenüberstehenden Δ' und $\Delta_,$, Δ'' und $\Delta_{,,}$ u. s. f. algebraisch addirt oder subtrahirt, d. h. bei gleichem Vorzeichen dem absoluten Werthe nach addirt, bei ungleichem subtrahirt, oder umgekehrt, so erhält man eine Reihe zusammengesetzter Fehler. Und erhebt man diese zusammengesetzten Fehler zum Quadrat, so ist die Summe dieser Quadrate nach der durch die Fehlergesetze begründeten Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Fehler beider Reihen.

Diess ist als bekannt anzusehen, und übersieht sich leicht in allgemeiner Weise wie folgt: das Quadrat von $(\pm\Delta'\pm\Delta_,)$ ist bei beliebiger Combination der Zeichen $\Delta'^2+\Delta_,^2\pm2\Delta'\Delta_,$. Bedeuten nun Δ', $\Delta_,$ allgemein Fehler der einen und andern Reihe, so ist die Summe der Quadrate in der zusammengesetzten Reihe

Digitized by Google

$$\Sigma\Delta'^2 + \Sigma\Delta_{,}^2 \pm 2\Sigma\Delta'\Delta_{,}$$

Die Summe $2\Sigma\Delta'\Delta_{,}$ ist aber bei nach dem Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehler disponirten grössern Reihen null, weil jeder Fehler Δ' sowohl als $\Delta_{,}$ gleich oft mit positivem und negativem Vorzeichen vorkommt, und nach Wahrscheinlichkeit gleich oft mit gleichem als ungleichem Vorzeichen mit einem Fehler gegebener Grösse der andern Reihe zusammentrifft.

Theilt man also eine Reihe zufällig wechselnder Fehler, die bezüglich derselben Mittelgrösse gewonnen sind, in zwei Theile, stellt den 1., 3., 5. u. s. f. auf die eine, den 2., 4., 6. u. s. f. gegenüber auf die andere Seite, und combinirt beide Partialreihen algebraisch subtractiv in angegebener Weise, so erhält man eine Reihe zusammengesetzter Fehler, welche nach dem ersten Satze mit den Fehlersummen übereinstimmen, die durch Zerlegung der ganzen Reihe in Fractionen *à* $m=2$ gewonnen werden, und erhebt man diese Summen einzeln zum Quadrat, so ist nach dem 3. Satze die Totalsumme dieser Quadrate von Summen *à* $m=2$ eben so gross als die Summe der Quadrate der ursprünglichen Reihe, indess sie nach dem 2. Satze doppelt so gross ist, als die Summe der einzelnen Fehlerquadrate *à* $m=2$. Mithin ist diese Summe halb so gross, als die Summe der Quadrate der ursprünglichen Reihe.

Correction wegen der Grösse der Intervalle.

Seien die Ausdrücke

$\Sigma\Delta$, $\Sigma\Delta^2$, q, ε als falsche

$S\Delta$, $S\Delta^2$, q_1, ε_1 als richtige

Werthe fortgehends auch bezüglich der jetzigen Correction in dem Eingangs der Abhandlung angegebenen Sinne verstanden und i das Intervall der Eintheilung oder Schätzung, bis zu dem man herabgeht. Sei durch die Beobachtung der falsche Mittelfehler ε und hiernach das Verhältniss des Intervalles i zu ε gegeben, so leiten sich die richtigen Werthe aus den falschen nach der folgenden Darlegung mit genügender Approximation, wofern nicht $\frac{i}{\varepsilon}$ sehr beträchtlich die Einheit übersteigt, durch folgende Correctionsformeln ab:

$$S\Delta = \Sigma\Delta\left(1+0,02704\,\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$S\Delta^2 = \Sigma\Delta^2\left(1-0,05307\,\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\left(1+0,02704\,\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$q_1 = q\left(1-0,02654\,\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Wollte man die Formeln vielmehr als Function von $\frac{i}{q}$ als $\frac{i}{\varepsilon}$ haben, so würden sie nach dem Verhältniss $\frac{q}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ leicht aus den vorigen ableitbar sein.

Für grössere Werthe von $\frac{i}{\varepsilon}$, wo die vorigen Formeln nicht mehr ausreichen würden, kann auch kein Anlass sein, eine Correction noch zu verlangen, weil Beobachtungen, wo i den Werth von ε beträchtlich übersteigt, überhaupt zu verwerfen sein würden. Insofern es indessen doch ein theoretisches Interesse hat, einen allgemeinen Ausdruck für die Beziehung von $\Sigma\Delta$ zu $S\Delta$ und von $\Sigma\Delta^2$ zu $S\Delta^2$ auch bei grossen Werthen von $\frac{i}{\varepsilon}$ oder $\frac{i}{\varepsilon_1}$ zu haben, wird man zum Schlusse dieses Abschnitts die darauf bezüglichen Angaben finden, wonach das Verhältniss $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ allgemein durch 1 plus einer Reihe von Gliedern dargestellt wird, welche nach den geraden Potenzen von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ aufsteigt, indess das Verhältniss von $\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}$ durch eine Reihe dargestellt wird, welche Exponentialgrössen enthält.

Die vorigen Correctionen sind von mir auf folgende Weise abgeleitet worden.

Sei beispielsweise $i=1''$, so wird jeder Fehler, welcher kleiner als 0,5″ ist, gleich null, jeder, welcher zwischen 0,5″ und 1″,5 fällt, gleich 1″, jeder, welcher zwischen 1″,5 und 2″,5 fällt, gleich 2″ u. s. f. gerechnet. Es wird nun zuvörderst allgemein gefragt, in welchem Verhältnisse wird eine gegebene Fehlersumme $S\Delta$ oder ein gegebener einfacher Mittelfehler ε_1 durch die Grösse der Intervalle gefälscht, wenn i ein gegebenes Verhältniss α zu ε_1 hat, oder kurz, welches ist das Verhältniss von $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$, oder des damit identischen $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, wenn $\frac{i}{\varepsilon_1}=\alpha$ ist. Da

aber nicht ε_1 sondern ε durch die Beobachtung gegeben ist, so wird das erst als Function von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ gefundene Verhältniss $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ oder $\frac{S\Delta}{\Sigma\Delta}$ nachher in eine Function von $\frac{i}{\varepsilon}$ noch zu übersetzen sein.

Da man nach der bekannten Tabelle der Fehlerwahrscheinlichkeit, wovon unten ein Auszug folgt, bei gegebenem einfachen Mittelfehler ε_1 oder quadratischem Mittelfehler q_1, und gegebenem Verhältniss von i dazu weiss, welcher Bruchtheil der gesammten wahren Fehlerzahl m normalerweise zwischen den Fehlergränzen 0 bis $\frac{i}{2}$, $\frac{i}{2}$ bis $\frac{3i}{2}$ u. s. f. liegt, so hat man zur Beantwortung erster Frage blos nöthig, die Fehlerzahl zwischen 0 und $\frac{i}{2}$ mit 0, zwischen $\frac{i}{2}$ und $\frac{3i}{2}$ mit i, zwischen $\frac{3i}{2}$ und $\frac{5i}{2}$ mit $2i$ u. s. f. zu multipliciren, und alle diese Producte, so weit fortgeführt, dass die folgenden vernachlässigt werden können, zu addiren, um die falsche Fehlersumme $\Sigma\Delta$ zu erhalten, deren Vergleich mit der a priori gegebenen richtigen Summe $S\Delta$ dann das verlangte Verhältniss giebt. Folgende beide Tabellen, in deren erster der einfache Mittelfehler $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56418958$, in der zweiten $=1$ gesetzt ist, geben Anhalt, diese verschiedenen Werthe von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ auszuführen, und hieraus ein Gesetz für die Abhängigkeit des Werthes $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ oder α abzuleiten.

Tabellen über die Fehlerzahl Θ, welche zwischen den Fehlergränzen 0 als unterer und t oder t_1 als oberer Gränze normalerweise enthalten ist.

I. Wenn die totale Fehlerzahl $=10000000$,
der einfache Mittelfehler $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0{,}5641895 8$,
der quadratische Mittelfehler $q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071 0678$,
die totale absolute Fehlersumme $S\Delta=5641895{,}8$,
die Summe der Fehlerquadrate $S\Delta^2=5000000$
gesetzt wird.

t	Θ	t	Θ	t	Θ	t	Θ
0,0	0000000	1,2	9103140	2,4	9993115	3,6	9999996,4413
0,1	1124630	1,3	9340080	2,5	9995931	3,7	9999998,3285
0,2	2227025	1,4	9522851	2,6	9997640	3,8	9999999,2300
0,3	3286267	1,5	9661052	2,7	9998657	3,9	9999999,6521
0,4	4283922	1,6	9763484	2,8	9999250	4,0	9999999,84583
0,5	5204999	1,7	9837904	2,9	9999589	4,1	9999999,93326
0,6	6038561	1,8	9890905	3,0	9999779,09	4,2	9999999,97068
0,7	6778010	1,9	9927904	3,1	9999883,51	4,3	9999999,98807
0,8	7421010	2,0	9953223	3,2	9999939,470	4,4	9999999,99522
0,9	7969082	2,1	9970206	3,3	9999969,422		
1,0	8427008	2,2	9981371	3,4	9999984,780		
1,1	8802050	2,3	9988568	3,5	9999992,569		

II. Wenn die totale Fehlerzahl $=10000000$,
der einfache Mittelfehler $\varepsilon_1=1$,
der quadratische Mittelfehler $q_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
die totale absolute Fehlersumme $S\Delta=10000000$,
die Summe der Fehlerquadrate $S\Delta^2=5000000\pi=15707963{,}2$
gesetzt wird.

t_1	Θ	t_1	Θ	t_1	Θ	t_1	Θ
0,00	0000000	2,25	9273845	4,25	9993037	6,25	9999993,582
0,25	1581058	2,50	9539256	4,50	9996699	6,50	9999997,771
0,50	3100643	2,75	9717777	4,75	9998493	6,75	9999999,253
0,75	4504360	3,00	9833185	5,00	9999338	7,00	9999999,809
1,00	5750626	3,25	9904891	5,25	9999719	7,25	9999999,926
1,25	6814080	3,50	9947713	5,50	9999877,1	7,50	9999999,978
1,50	7686258	3,75	9972284	5,75	9999952,37	7,75	. . . . .
1,75	8373752	4,00	9985845	6,00	9999982,19	8,00	9999999,998
2,00	8894597						

Digitized by Google

Die erste dieser Tabellen ist bis zu dem Werthe $t=3,0$ ein Auszug aus bekannten Tabellen.*) Für die höheren Werthe von t, bis zu denen die mir bekannten Tabellen nicht reichen, sind die zugehörigen Werthe von mir durch Verwandlung des Wahrscheinlichkeitsintegrals der Fehler in eine unendliche Reihe gefunden. Die zweite Tabelle ist aus den Tabellen, wovon die erste ein Auszug ist, durch Interpolation unter Zuziehung der zweiten Differenzen abgeleitet, so weit diese Tabellen reichen, höher hinauf ebenfalls aus einer unendlichen Reihe. Die Werthe, welche über den Tabellen verzeichnet sind, und für welche die Tabellen gelten, ergeben sich in ihrer Beziehung zu einander und zu den Werthen der Tabellen nach der mathematischen Fehlertheorie, worüber man u. a. Encke's Abhandlung im astron. Jahrb. f. 1834 nachsehen kann.

Setzen wir nun unter Zugrundelegung der ersten Tabelle, wo der einfache Mittelfehler $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5641895\!8$ ist, beispielsweise $i=0,2$, wo dann $\frac{i}{\varepsilon_1} = 0,2 . \sqrt{\pi} = 0,3544907$ ist. Zwischen den Fehlergränzen 0 und 0,1 sind 1124630 Fehler enthalten, diese sind nach dem S. 95 angegebenen Princip mit 0 zu multipliciren. Zwischen $\frac{i}{2}$ und $\frac{3i}{2}$ d. i. 0,1 und 0,3 sind 2161637 Fehler enthalten, wie sich durch die Differenz der bei $t=0,1$ und 0,3 stehenden Zahlen ergiebt, diese sind mit 0,2 zu multipliciren, u. s. f. Addirt man sämmtliche Producte, so findet man für $\Sigma\varDelta$ den Werth 5623045,6, indess $S\varDelta$ nach der aus der Theorie folgenden Angabe über der Tabelle 5641895,8 ist. Hiernach ist das Verhältniss

$$\frac{\Sigma\varDelta}{S\varDelta} = \frac{5623045,6}{5641895,8} = 0,9966590 = 1 - 0,0033410$$

gültig für

$$\frac{i}{\varepsilon_1} = 0,2 . \sqrt{\pi} = 0,3544907$$

Nimmt man $i=0,4$ und verfährt eben so, so findet sich $\Sigma\varDelta = 5565950,0$, mithin $\frac{\Sigma\varDelta}{S\varDelta} = 0,9865315$ u. s. f., wie in der

*) Im astron. Jahrb. f. 1834 S. 305 ist die Tabelle bis $t=2,0$ gegeben; zu Ende der *Analyse des réfractions astron.* von Kramp, so wie in einer nicht mehr im Buchhandel vorkommenden lithographirten Tabelle bis $t=3,0$, woraus ich die obigen Werthe entnommen habe.

Digitized by Google

ersten Abtheilung folgender Tabelle angegeben ist. Entsprechend kann man nach der Tabelle II. verfahren, wodurch man die Werthe der zweiten Abtheilung folgender Tabelle erhält, die zwischen die der ersten sich einschieben lassen würden.

$\frac{i}{\varepsilon_1}$	$\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$	$=1-u$
$0,2.\sqrt{\pi}=0,3545$	0,9966590	$=1-0,0033410$
$0,4.\sqrt{\pi}=0,7090$	0,9865315	$=1-0,0134685$
$0,8.\sqrt{\pi}=1,4180$	0,9444537	$=1-0,0555463$
$1,6.\sqrt{\pi}=2,8359$	0,7333349	$=1-0,2666651$
$3,2.\sqrt{\pi}=5,6718$	0,1341484	$=1-0,8658516$
0,5	0,9933429	$=1-0,0066571$
1	0,9729556	$=1-0,0270444$
2	0,8830096	$=1-0,1169904$
4	0,0756851	$=1-0,9243149$

Beide Abtheilungen der Tabelle zeigen übereinstimmend, dass das Verhältniss $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ gleich 1 minus einem Gliede u ist, welches, so lange nicht $\frac{i}{\varepsilon_1}$ beträchtlich über 1 steigt, mit $\left(\frac{i}{\varepsilon_1}\right)^2$ so approximativ proportional ist, dass man eine allgemeine Correction hierauf unbedenklich gründen kann, da Beobachtungen, wo $\frac{i}{\varepsilon_1}$ beträchtlich über 1 stiege, überhaupt nicht in der Anwendung vorkommen können. Da von der andern Seite die Correction bei Werthen von $\frac{i}{\varepsilon_1}$, welche beträchtlich unter 1 fallen, vernachlässigt werden kann, so erscheint es am angemessensten, den bei $\frac{i}{\varepsilon_1}=1$ gefundenen Werth von u zur Ableitung der Correction zu Grunde zu legen. Da man jedoch durch die Beobachtung nicht das Verhältniss $\frac{i}{\varepsilon_1}$, welches schon die Kenntniss der wahren Fehlersumme voraussetzt, sondern $\frac{i}{\varepsilon}$ hat, so gilt es bemerktermassen, um den Correctionsfactor von $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ oder $\frac{S\Delta}{\Sigma\Delta}$ zu finden, die Function von $\frac{i}{\varepsilon_1}$, als welche er bisher gegeben ist, in eine solche von $\frac{i}{\varepsilon}$ zu übersetzen.

Digitized by Google

Sei nun der Werth von u für $\frac{i}{\varepsilon_1}=1$, d. i. 0,027041, kurz mit γ bezeichnet, so haben wir unter Voraussetzung des Wachsthums von u im Verhältniss von $\left(\frac{i}{\varepsilon_1}\right)^2$

$$\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}=1-\gamma\frac{i^2}{\varepsilon_1^2}$$

was zu der quadratischen Gleichung führt

$$\varepsilon_1^2-\varepsilon\varepsilon_1-\gamma i^2=0,$$

woraus

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2+4\gamma i^2}}{2}$$

Da $4\gamma i^2$ immer klein gegen ε^2, weil γ ein kleiner Bruch, so können wir vermöge Auflösung nach dem binomischen Lehrsatze und Beibehaltung der ersten beiden Glieder setzen

$$\sqrt{\varepsilon^2+4\gamma i^2}=\varepsilon+\frac{2\gamma i^2}{\varepsilon}$$

was giebt

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}=\frac{S\Delta}{\Sigma\Delta}=1+0{,}02704\,\frac{i^2}{\varepsilon^2}$$

woraus die S. 94 angegebenen Correctionen von $\Sigma\Delta$ und ε unmittelbar folgen.

In meinen Elementen der Psychophysik (II. S. 373). hatte ich die Correction auf die Voraussetzung gegründet, dass, wenn das Intervall i ist, die Fehler im Intervall von 0 bis i zur Hälfte ihrer Zahl zu Null, zur andern Hälfte zu i geschlagen werden, so dass als falsche Summe für dieses Intervall $\frac{i}{2}$, multiplicirt mit der Zahl der Fehler zwischen 0 und i anzusehen ist, eben so als falsche Summe zwischen i und $2i$ der mit der Zahl der Fehler in diesem Intervall multiplicirte Werth $\frac{3i}{2}$ u. s. f., was mit der oben S. 95 untergelegten Voraussetzung keineswegs zusammentrifft, und, wie eine nähere Ueberlegung lehrt, dem Falle der wirklichen Beobachtungen nicht entspricht. Es ist indessen nicht ohne Interesse, die frühere, auf diese Voraussetzung gestützte, Correction mit der jetzigen zu vergleichen. Der Werth von $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ fand sich, nach ganz analogem Gange bestimmt, für $\frac{i}{\varepsilon_1}=1$ wie folgt

1,05364

was zu einer merklich doppelt so grossen und im Vorzeichen entgegengesetzten Correction, als die vorstehende ist, führen würde.

Die auf die richtige Voraussetzung begründete Correction der Fehlerquadratsumme $\Sigma\Delta^2$ ist von mir auf ganz ähnliche Weise, als für die einfache Summe $S\Delta$ bestimmt worden. Ich erhielt solchergestalt nach Tabelle II. für $\frac{i}{\varepsilon_1}=1$ den Werth $\Sigma\Delta^2 = 16541404$, indess die richtige Summe $S\Delta^2$ nach der Ueberschrift der Tabelle 15707963 ist. Diess giebt das Verhältniss

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}=1+u=1,0530590.$$

Hiernach ist die S. 94 angegebene Correction unter Voraussetzung der Proportionalität von u mit $\frac{i^2}{\varepsilon_1{}^2}$ entsprechend wie vorhin für $\Sigma\Delta$ berechnet worden. Dass aber diese Voraussetzung triftig sei, so lange nicht $\frac{i}{\varepsilon_1}$ oder $\frac{i}{\varepsilon}$ beträchtlich über 1 steigt, wurde ebenfalls wie oben für $\Sigma\Delta$ direct unter Zugrundelegung der Tabelle I. bewiesen, wobei ich für folgende Werthe von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ folgende Ergebnisse fand.

$\alpha=\frac{i}{\varepsilon_1}$	$\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}=1+u$
$0,2.\sqrt{\pi}$	1,0065849
$0,4.\sqrt{\pi}$	1,0266663
$0,8.\sqrt{\pi}$	1,1066647
$1,6.\sqrt{\pi}$	1,3213242
$3,2.\sqrt{\pi}$	0,48438477

Diese Tabelle für die Fehlerquadratsumme bietet in Vergleich mit der obigen für die Fehlersumme manche interessante Verhältnisse dar. So lange $\frac{i}{\varepsilon_1}$ nicht beträchtlich wird, also in Gränzen, in denen sich das Bedürfniss einer Correction der Fehlerquadratsumme geltend machen kann, ist die falsche Fehlerquadratsumme grösser als die richtige, mithin im Ausdruck des Verhältnisses $\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}$ das Zusatzglied u zu 1 mit positivem Vorzeichen behaftet, indess die falsche Fehlersumme nach der obigen Tabelle überall kleiner als die richtige, mithin das Zusatzglied

Digitized by Google

u zu 1 im Ausdruck des Verhältnisses $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ mit negativem Vorzeichen behaftet ist (was sich bei dem Zusatzgliede der Correctionsformeln umkehrt). Auch bei der Fehlerquadratsumme wächst u merklich proportional mit $\frac{i^2}{\varepsilon_1^2}$, so lange $\frac{i}{\varepsilon_1}$ nicht beträchtlich über 1 steigt, ist aber nach absolutem Werthe merklich doppelt so gross, als für die Fehlersumme, z. B. $+0{,}0065849$ für $\frac{i}{\varepsilon_1}=0{,}2.\sqrt{\pi}$, indess der Werth für die Fehlersumme hier $-0{,}0033410$ war.*)

Bei fortgehendem Wachsthum von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ jedoch ändern sich diese Verhältnisse gänzlich. Bei der Fehlersumme wächst u continuirlich unter Beibehaltung desselben Vorzeichens mit wachsendem $\frac{i}{\varepsilon_1}$, und nur die Proportionalität mit $\frac{i^2}{\varepsilon_1^2}$ erleidet einen Abbruch; hingegen erreicht u bei der Fehlerquadratsumme mit wachsendem $\frac{i}{\varepsilon_1}$ ein Maximum, nimmt dann ab und nimmt endlich ein entgegengesetztes Vorzeichen an, welcher Punct des Umschlages nach der Tabelle zwischen $\frac{i}{\varepsilon_1}=1{,}6.\sqrt{\pi}$ und $3{,}2.\sqrt{\pi}$ fällt, da dort $1+u>1$, hier <1 ist. Also giebt es merkwürdigerweise zwischen diesen beiden Werthen einen Werth, wo $u=0$, d. i. wo die Correction verschwindet, indem $\Sigma\Delta^2=S\Delta^2$ wird.

Es lässt sich aber leicht aus allgemeinem Gesichtspuncte einsehen, dass ein solcher Umschlag nothwendig eintreten muss. Denn setzen wir übertreibend, i erlange einen Werth z. B. $=10\varepsilon_1$, so werden alle Fehler, welche bis zur Grösse von $5\varepsilon_1$ reichen, zu Null geschlagen, die Wahrscheinlichkeit und hiervon abhängige Summe von Fehlern aber, welche $5\varepsilon_1$ übersteigen, und mithin auch die Summe von deren Quadraten, ist verschwindend klein. Also kann die falsche Fehlerquadratsumme mit wachsendem $\frac{i}{\varepsilon_1}$ wenn auch anfangs, doch nicht ins Unbestimmte wachsen, sondern muss sich endlich nach Ueberschreitung eines Maximum, eben so wie die falsche Fehlersumme, ins Unbestimmte der Null nähern.

*) Bei ganz kleinem Werthe von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ ist er, wie sich aus den Schlussformeln ergeben wird, genau doppelt so gross.

Durch einiges Probiren findet man, dass das Maximum von $\Sigma\Delta^2$ zwischen folgenden Werthen liegt, wobei $S\Delta^2$=5000000

$\frac{i}{\varepsilon_1}$	$\Sigma\Delta^2$
$1,66 . \sqrt{\pi}$	6662050
$1,67 . \sqrt{\pi}$	6671763
$1,68 . \sqrt{\pi}$	6656156

wonach es merklich $=\frac{4}{3}S\Delta^2$ ist, und bei einem Werthe von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ eintritt, der ein Weniges kleiner als π ist, sofern $\sqrt{\pi}=1,77..$ Der Werth von $\frac{i}{\varepsilon_1}$ anderseits, wo u null wird und die Correction verschwindet, liegt zwischen $2,44\sqrt{\pi}$ und $2,46\sqrt{\pi}$, indem bei erstem Werthe $\Sigma\Delta^2=5029\ldots$, bei letztem $4959\ldots$ statt $S\Delta^2 = 5000\ldots$ ist.

Unstreitig muss sich für den der Correction von $\Sigma\Delta$ und $\Sigma\Delta^2$ zu Grunde liegenden Werth von u, welcher hier empirisch aus der Tabelle der Fehlerwahrscheinlichkeit abgeleitet ist, ein allgemeiner rationeller Ausdruck finden lassen, für dessen Verificirung dann das Resultat der vorigen Herleitung dienen kann, wie er umgekehrt zur Controle dieses Resultates dienen kann. Hierzu führt folgender Weg.

Werde der Kürze halber das die relative Zahl der Fehler zwischen gegebenen Gränzen a, b ausdrückende, bekannte Integral

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta$$

in welchem $h=\frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{\pi}}=\frac{1}{q_1\sqrt{2}}$ ist, durch $\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b$ ausgedrückt, so ist die falsche Fehlersumme

$$\Sigma\Delta=\frac{2mh}{\sqrt{\pi}}\left[0\int_0^{\frac{i}{2}}+i\int_{\frac{i}{2}}^{\frac{3i}{2}}+2i\int_{\frac{3i}{2}}^{\frac{5i}{2}}+\ldots \text{ in infin.}\right]$$

$$=\frac{2mhi}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{i}{2}}^{\infty}+\int_{\frac{3i}{2}}^{\infty}+\int_{\frac{5i}{2}}^{\infty}+\ldots \text{ in infin.}\right]$$

Digitized by Google

Schreibt man $h\Delta = t$, $hi = \frac{i}{\varepsilon_1 \sqrt{\pi}} = k$,

so wird $$\Sigma\Delta = \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{h}\left[\int_{\frac{k}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{3k}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{5k}{2}}^{\infty} + \dots\right].$$

wo jetzt $\int_a^b$ die Bedeutung $\int_a^b e^{-t^2}\,dt$ hat. Nach entsprechendem Gange erhält man

$$\Sigma\Delta^2 = \frac{4mk}{h^2\sqrt{\pi}}\left[\frac{k}{2}\int_{\frac{k}{2}}^{\infty} + \frac{3k}{2}\int_{\frac{3k}{2}}^{\infty} + \frac{5k}{2}\int_{\frac{5k}{2}}^{\infty} + \dots\right]$$

Es schien mir, dass diese Integralsummen sich mit Hülfe der Maclaurin'schen Summationsformel in eine zur Correctionsbestimmung dienliche Reihe verwandeln lassen müssen. Da jedoch diese Entwicklung mir bei geringer Gewandtheit in diesem Gebiete der Rechnung Schwierigkeit machte, hat Herr Prof. Scheibner auf meine Bitte die Gefälligkeit gehabt, sich derselben zu unterziehen, wodurch sich schliesslich für $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ folgende Formel ergab

$$\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta} = 1 - \frac{1}{12}k^2 - \frac{7}{1440}k^4 - \frac{31}{40320}k^6 - \text{etc.}$$

was unter Setzung von $\frac{i}{\varepsilon_1} = \alpha$ zu der Entwicklung führt

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta} = 1 &- 0{,}02652585\,\alpha^2\\ &- 0{,}00049253\,\alpha^4\\ &- 0{,}00002480\,\alpha^6\\ &- 0{,}00000202\,\alpha^8\\ &- 0{,}00000046\,\alpha^{10}\\ &- 0{,}00000003\,\alpha^{12}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Das allgemeine Glied der successiven negativen Coefficienten von der Ordnungszahl n ist

$$\frac{(2^{2n-1}-1)\,B_n}{n!\,(4n-2)\,2^{2(n-1)}\cdot\pi^n}$$

wo $n! = 1.2.3\dots n$ und B_n die $n$te Bernoulli'sche Zahl, welche Zahlen bekanntlich der Reihe nach sind:

$B_1 = \frac{1}{6}$; $B_2 = \frac{1}{30}$; $B_3 = \frac{1}{42}$; $B_4 = \frac{1}{30}$; $B_5 = \frac{5}{66}$; $B_6 = \frac{691}{2730}$; $B_7 = \frac{7}{6}$ etc.

Berechnet man hiernach den Werth von $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ für $\alpha = \frac{i}{\varepsilon_1} = 1$ zum Vergleich mit dem oben aus der Tabelle abgeleiteten, so findet man durch einfache Addition der oben unter einander gestellten negativen Glieder

$$\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta} = 1 - 0,0270457$$

wofür wir aus der Tabelle erhalten hatten

$$1 - 0,0270444.$$

Beide Werthe stimmen bis auf die 6te Decimale exclusiv überein, und verificiren sich dadurch wechselseits, indem die von der 6ten Decimale beginnende Abweichung wohl dadurch erklärt werden kann, dass die Ableitung aus der Tabelle auf Werthen von Fehlerzahlen fusst, welche in der 7ten Decimale abgerundet, also unrichtig sind, ein Fehler, der durch die mehrfache Multiplication mit den Fehlergrössen leicht auf die vorhergehende Decimale Einfluss gewinnen kann. Es ist aber hiernach der aus der rationellen Formel abgeleitete Werth als der richtigere anzusehen.

Allerdings ist die Reihe, durch welche der Werth von $\frac{\Sigma\Delta}{S\Delta}$ ausgedrückt wird, nach der Natur der in sie eingehenden Bernoulli'schen Zahlen nur eine von Anfang convergente und divergirt endlich bei Fortsetzung in spätern Gliedern; doch besteht die Convergenz für $\frac{i}{\varepsilon_1} = 1$ und kleinere Werthe jedenfalls durch die oben zugezogenen Glieder.

Was den Werth von $\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}$ anlangt, so fand er sich

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2} = 1 + \frac{1}{6\pi}\frac{i^2}{\varepsilon_1^2} \ldots\ldots$$

$$= 1 + 0,0530517\frac{i^2}{\varepsilon_1^2} \ldots\ldots$$

ohne dass sich die weiteren Glieder auf dem angezeigten Wege mittelst der Maclaurin'schen Summationsformel bestimmen liessen, indem die höheren Differentialquotienten, welche nach derselben Factoren der späteren Glieder sind, alle null werden, was anzeigt, dass sich der Rest der Reihe nicht nach den aufstei-

Digitized by Google

genden Potenzen von $\frac{i^2}{\varepsilon_1^2}$ entwickeln lässt. Prof. Scheibner hat demgemäss noch einen andern Weg der Entwicklung eingeschlagen, welcher für $\Sigma\Delta$ auf die vorige Correction zurückführt, für $\Sigma\Delta^2$ aber eine Reihe Glieder mit Exponentialgrössen einführt. Diese Entwicklung ist in dem Zusatz zum Schluss dieses Abschnittes beigefügt.

Man hat hiernach

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{S\Delta^2}=1+\frac{1}{6}k^2-4\left(1+\frac{k^2}{2\pi^2}\right)e^{-\frac{\pi^2}{k^2}}+\ldots$$

und allgemein

$$=1+\frac{1}{6}k^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{k^2}{2n^2\pi^2}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{k^2}}$$

eine Reihe, die ausnehmend rasch convergirt.

Der Werth von $\frac{i}{\varepsilon_1}$, wo die Correction verschwindet, wird hiernach approximativ durch die Gleichung

$$e^{\frac{\pi^2}{k^2}}=24\left(\frac{1}{2\pi^2}+\frac{1}{k^2}\right)$$

gegeben. Substituirt man nun für k den Werth 2,45 als Mittel zwischen den S. 102 bestimmten Gränzen, so ergiebt sich

$$5{,}177128=5{,}141872$$

was in Betracht dessen, dass weder jenes Mittel noch die Formel den ganz genauen Werth liefert, sehr wohl übereinstimmt.

Zusatz von Prof. Scheibner.

Die Anwendung der Maclaurin'schen Summationsformel ist wegen der Divergenz der nach den Bernoulli'schen Zahlen fortschreitenden Reihen häufig eigenthümlichen Schwierigkeiten unterworfen. Es lässt sich aber die Summation der Reihen von der Form

$$k\left\{f\frac{k}{2}+f\frac{3k}{2}+f\frac{5k}{2}+\ldots\right\}$$

durch folgendes strenge Verfahren erledigen.

Vermöge eines bekannten, von Cauchy herrührenden Satzes hat man

$$1)\qquad \sqrt{k}\left\{\frac{1}{2}f0+fk+f(2k)\ldots\right\}=\sqrt{l}\left\{\frac{1}{2}\varphi 0+\varphi l+\varphi(2l)\ldots\right\},$$

wo $kl=2\pi$ und $\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty fx\cos tx\,dx$ gesetzt ist.

Schreibt man $\frac{1}{2}k$ statt k und folglich $2l$ statt l, so wird

$$2)\qquad \sqrt{k}\left\{\frac{1}{2}fo+f\frac{k}{2}+fk+f\frac{3k}{2}\cdot\cdot\right\} = 2\sqrt{l}\left\{\frac{1}{2}\varphi o+\varphi(2l)+\varphi(4l)\dots\right\}$$

und durch Subtraction von 1)

$$\sqrt{k}\left\{f\frac{k}{2}+f\frac{3k}{2}+f\frac{5k}{2}\cdot\cdot\right\} = \sqrt{l}\left\{\frac{1}{2}\varphi o-\varphi l+\varphi(2l)-\varphi(3l)\pm\dots\right\}$$

Wir betrachten die beiden Fälle, in denen

$$f_1x=\int_x^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$=\int_1^\infty xe^{-x^2y^2}\,dy$$

$$f_1'x=-e^{-x^2}$$

Damit folgt

$$\varphi_1 o=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty dy\int_0^\infty xe^{-x^2y^2}\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{dy}{y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f_2x=x\int_x^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$=\int_1^\infty x^2e^{-x^2y^2}\,dy$$

$$f_2'x=\int_x^\infty e^{-y^2}\,dy-xe^{-x^2}$$

$$f_2''x=-2(1-x^2)\,e^{-x^2}$$

$$\varphi_2 o=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty dy\int_0^\infty x^2e^{-x^2y^2}\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_1^\infty\frac{dy}{y^3}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Ferner wird durch partielle Integration erhalten

$$\varphi_1 t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1x\cos tx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f_1x\frac{\sin tx}{t}\right]_0^\infty-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t}\int_0^\infty f_1'x\sin tx\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin tx\,dx$$

folglich wegen $kl=2\pi$

$$\varphi_1(nl)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{2n\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{k}x\right)dx$$

und damit

Digitized by Google

$$k\left\{f_1\frac{k}{2}+f_1\frac{3k}{2}+\ldots\right\} = \sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{k}{n\pi}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{2n\pi}{k}x\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1+2k\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{k}\,dx\right\}$$

Integrirt man hier wiederum partiell nach dem trigonometrischen Factor, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$k\left\{f_1\frac{2}{k}+f_1\frac{3k}{2}+\ldots\right\} = \frac{1}{2}\left\{1+2k^2\sum_n\frac{2(-1)^n}{(2n\pi)^2}+2k^2\int_0^{\infty} f_1''(x)\sum\frac{2(-1)^n}{(2n\pi)^2}\cos\frac{2n\pi x}{k}\,dx\right\}$$

Setzt man dieses Verfahren fort, und berücksichtigt die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n\pi)^{2m}} = \frac{1}{(2m)!}\,B_m\left(2^{1-2m}-1\right)$$

so folgt die nämliche nach den Potenzen von k^2 fortschreitende Reihe, welche die Maclaurin'sche Summationsformel liefert. Zugleich findet man aber den jedesmaligen Rest unter der Form eines bestimmten Integrals.

Im zweiten Falle erhält man

$$\varphi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_2x\cos tx\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t}\int_0^{\infty} f_2'(x)\sin tx\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t^2}\Big[f_2'(x)\cos tx\Big]_0^{\infty}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty} f_2''(x)\cos tx\,dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{t^2}f_2'(0)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{t^2}\int_0^{\infty}(1-x^2)\,e^{-x^2}\cos tx\,dx$$

Hier ist $f_2'(0)=\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos tx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\;e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

und wenn man zweimal nach t differentiirt

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\cos tx\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}t^2}\left\{1-\frac{1}{2}t^2\right\}$$

folglich

$$\varphi_2 t = -\frac{1}{t^2\sqrt{2}}\left\{1-\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)e^{-\frac{1}{4}t^2}\right\}$$

oder

$$\varphi_2(nl) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{k}{2n\pi}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{k}{2n\pi}\right)^2\right\}e^{-\frac{n^2\pi^2}{k^2}}$$

Digitized by Google

Substituirt man diess in die Gleichung

$$k\left\{f_2\frac{k}{2}+f_2\frac{3k}{2}+\ldots\right\}=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\varphi_2 0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\varphi_2(nl)\right\}$$

so folgt

$$\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{k^2}{2\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n\pi)^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{1+\frac{2k^2}{(2n\pi)^2}\right\}e^{-\frac{n^2\pi^2}{k^2}}\right]$$

oder

$$k\left\{f_2\frac{k}{2}+f_2\frac{3k}{2}+\ldots\right\}=\frac{1}{8}\sqrt{\pi}\left[1+\frac{1}{6}k^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{k^2}{2n^2\pi^2}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{k^2}}\right]$$

eine stets convergirende, für kleine Werthe von k sehr bequem zu berechnende Formel. Einen angenäherten Werth von k, für welchen der Ausdruck in der Parenthese der Einheit gleich wird, findet man durch Auflösung der Gleichung

$$e^{\frac{\pi^2}{k^2}}=24\left(\frac{1}{2\pi^2}+\frac{1}{k^2}\right)$$

Correction wegen Schätzung der Eintheilung.

Diese Correction ist keines allgemeinen Ausdrucks fähig, weil sich der Irrthum wegen der Schätzung der Eintheilung nach der absoluten Grösse der Intervalle, die man durch Schäzzung eintheilt, nach der Eintheilungsweise bei der Schätzung, nach dem Zustande der Uebung, unstreitig auch nach der Individualität des Beobachters und nach der ganzen Sachlage der Versuche ändert, so dass jeder Beobachter für jede unter besondern Umständen angestellte Versuchsreihe erst besondere Nebenversuche anstellen müsste, um die zur Herleitung der Correction erforderlichen Data zu erlangen. Am gerathensten dürfte es daher vielleicht bei der Methode der mittleren Fehler sein, in Fällen, wo Gefahr ist, dass der von Schätzung der Eintheilung abhängige Irrthum einen erheblichen Einfluss gewinne, ihn dadurch zu vermeiden, dass man die Intervalle der Eintheilung klein genug nimmt, um die Schätzung ganz zu übergehen, und alle Fehler auf die Gränzen der Intervalle zu beziehen, wonach die Correction wegen der Grösse der Intervalle genügt, um den hiervon abhängigen Irrthum zu heben. Indess ist es jedenfalls nützlich, theils zu wissen, um wie viel eine Fehlersumme oder Fehlerquadratsumme durch den Irrthum wegen der Schätzung der Eintheilung unter gegebenen Umständen gefälscht werden

Digitized by Google

kann, theils auf welches Princip die Correction zu gründen ist, falls man doch für einen besonderen Fall darauf eingehen will.

Versuche, welche in erster Beziehung einen gewissen Anhalt geben, indess sie zugleich in letzter Beziehung ein Beispiel der Anwendung des Principes zu geben gestatten, hat Volkmann angestellt, und in diesen Berichten (1858 S. 173 ff.) bekannt gemacht. Legt man sie zu Grunde, so würde man nach der unten folgenden Herleitung unter analogen Umständen folgende Correctionen anzubringen haben, um die falschen Summen Σ in die richtigen S überzuführen.

Das durch Schätzung zu theilende Intervall i ist dabei zwischen parallelen Theilstrichen vorausgesetzt, und die Theile, die man schätzt, Zehntheile von i. Dann sind bei einem Intervall $i=1$ par. Linie die Correctionsformeln diese:

$$S\Delta^2 = \Sigma\Delta^2 - 0{,}006620 \,.\, mi^2$$

$$S\Delta = \Sigma\Delta\left(1 - 0{,}00290\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

hingegen bei dem grossen Intervall $i = 100$ Millim., $= 44{,}3$ par. Lin.

$$S\Delta^2 = \Sigma\Delta^2 - 0{,}00002961 \,.\, mi^2$$

$$S\Delta = \Sigma\Delta\left(1 - 0{,}0000116\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

wobei jedoch zu erinnern ist, dass die Triftigkeit der Correction von $\Sigma\Delta$ an einer noch nicht allgemein erwiesenen Voraussetzung hängt, wovon unten.

Vergleicht man die Correction bei beiden Werthen von i, so findet man, dass bei dem grösseren i die Correction zwar verhältnissmässig zu i viel weniger beträgt, als bei dem kleinen, absolut aber erheblich grösser ist, in Betracht dessen, dass das i^2 der zweiten Correction $(44{,}3)^2$ mal, d. i. 1962,5 mal so gross als das der ersten ist. Ein Gesetz für die Abhängigkeit der Correction von der Grösse des i ist daraus noch nicht zu folgern.

Das Princip, nach welchem diese Correctionen entwickelt sind, ist folgendes:

Die Fehler, welche wegen mangelnder Schärfe der Sinne in der Gleichschätzung der Fehlgrösse mit der Normalgrösse bei der Methode der mittleren Fehler begangen werden und die Fehler, welche wegen unrichtiger Schätzung der Eintheilung begangen werden, sind von einander unabhängig, und geben die zusammengesetzten Fehler, die man aufzeichnet, und deren

Digitized by Google

Summe und Quadratsumme wir mit $\Sigma\varDelta$ und $\Sigma\varDelta^2$ bezeichnen, indess wir die Werthe, welche für die ersten und zweiten Fehler, aus denen sie sich zusammensetzen, besonders gelten, respective mit $S\varDelta$, $S\varDelta^2$ und $\mathfrak{S}\varDelta$, $\mathfrak{S}\varDelta^2$ bezeichnen. Erstere Werthe nämlich sind es, um deren Reindarstellung durch die Correction von ihrer Complication mit letztern es sich handelt.

Wenn von einander unabhängige Fehler nach Zufall zusammentreffen, so geschieht diess bald mit gleichem, bald mit ungleichem Vorzeichen, und die Summe der zusammengesetzten Fehler nach absolutem Werthe, oder nach unserem bisherigen Sprachgebrauche. Summe schlechthin, kann nicht der absoluten Summe der Componenten gleich sein, weil sich bei der Zusammensetzung blos die Fehler mit gleichem Vorzeichen nach absolutem Werthe addiren, bei ungleichem aber von einander abziehen, sie muss kleiner sein. Dagegen gilt, wenn die Wahrscheinlichkeit gleich grosser positiver und negativer Fehler gleich gross ist, und wenn die Fehler zufällig wechseln, bei hinreichend grossem m der Satz, dass die Summe der Quadrate der zusammengesetzten Fehler der Summe der Quadrate der componirenden Fehler gleich ist, so wie dass das Quadrat der Summe der zusammengesetzten Fehler der Summe der Quadrate der aus den componirenden Fehlern gebildeten Summen gleich ist, oder kurz man hat

$$(1) \qquad \Sigma\varDelta^2 = S\varDelta^2 + \mathfrak{S}\varDelta^2$$

$$(2) \qquad (\Sigma\varDelta)^2 = (S\varDelta)^2 + (\mathfrak{S}\varDelta)^2$$

Erster Satz folgt aus dem, was S. 92 aufgestellt worden ist, letzter aber ist aus ersterem ableitbar durch Bezugnahme auf das constante Verhältniss $\frac{2m}{\pi}$, was zwischen dem Quadrat der Fehlersumme und der Summe der Fehlerquadrate bei gegebenem m sowohl für die einfachen als zusammengesetzten Fehler statt findet (vgl. S. 60).

Inzwischen ist letztres Verhältniss nur gültig, insofern das durch das bekannte Integral ausgedrückte Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler besteht, was nach meinen Untersuchungen allerdings für die von mangelnder Schärfe der Sinne abhängigen reinen Fehler gültig ist, sofern ich das constante Verhältniss $\frac{(S\varDelta)^2}{S\varDelta^2}=\frac{2m}{\pi}$ daran sehr gut bestätigt gefunden habe; aber nach den unten folgenden Datis nicht eben so für die durch

Schätzung der Eintheilung begangenen Fehler gültig zu sein scheint. Sollte nun zur Gültigkeit der Gleichung (2) erforderlich sein, was ich zwar nicht für wahrscheinlich halte, dass $(S\Delta)^2$ und $(\mathfrak{S}\Delta)^2$ in gleicher Weise respectiv von $S\Delta^2$ und $\mathfrak{S}\Delta^2$ abhängen, so würde die auf die Gleichung (2) gegründete Correction von $\Sigma\Delta$ nicht mehr gültig sein und sich auf dem hier eingeschlagenen Wege überhaupt nicht finden lassen. Ich vermag aber den Beweis, welcher es entscheidet, nicht genau herzustellen, was einem geübten Mathematiker wahrscheinlich leicht sein wird.

Diess Bedenken, was nur die Correction von $\Sigma\Delta$, nicht von $\Sigma\Delta^2$ betrifft, bei Seite gesetzt, wird es nun jedenfalls darauf ankommen, die Werthe von $\mathfrak{S}\Delta^2$ und $\mathfrak{S}\Delta$ für die Umstände der Versuche, welche man anzustellen hat, besonders zu bestimmen. Diess ist für die obigen Umstände durch Volkmanns Versuche geschehen. Sie wurden so angestellt, dass eine zwischen zwei Parallellinien enthaltene Distanz einmal von 1 par. Linie, ein andres mal von 100 Millim. durch Verschiebung einer ebenfalls damit parallelen Zwischenlinie (oder eines Zwischenfadens) nach dem Augenmasse gezehntelt und die bei jeder Abtheilung begangenen, bei $i=1$ Linie mikrometrisch gemessenen, Fehler notirt wurden. Hinsichtlich des Näheren der Versuchsweise und der Versuche verweise ich auf die Originalabhandlung, indem ich mich hier beschränke, dasjenige daraus hervorzuheben, was für die Aufstellung der Correction von Belang ist.

Bei den verschiedenen Zehnteln fielen die Fehler verschieden gross aus, und liessen sich nach Art roher Fehler in einen constanten Fehler und reinen variablen Fehler im Sinne der S. 67 angegebenen Unterscheidung trennen. Die constanten Fehler können hier unberücksichtigt bleiben, theils weil sie sich je nach dem Ausgangspunct der Schätzung von links oder rechts durch gleiche Summen bei entgegengesetztem Vorzeichen im Durchschreiten durch das Intervall i im Ganzen compensirten, theils weil selbst, wenn diess nicht der Fall wäre, nur die Lage der mittleren Fehlgrösse, aber nicht die variablen Fehler, die von dieser gerechnet werden, und auf welche sich die Correction zu beziehen hat, dadurch betheiligt werden würden. Es kommt also nur darauf an, die reinen variablen Fehler zu kennen, welche bei den verschiedenen Zehnteln begangen worden sind.

Digitized by Google

Sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt*), und zwar bei $i=1$ Linie sowohl für eine auf die Verbindungslinie der Augen senkrechte als horizontale Lage der Theilstriche gegeben.

Bruchtheile von i, welche geschätzt wurden.	Bei dieser Schätzung im Mittel von je 180 Beobachtungen begangene reine variable Fehler Δ, als Bruchtheile von i ausgedrückt.		
	Bei $i = 1$ par. Linie		Bei $i = 100$ Mill.
	senkr. Theilstr.	horiz. Theilstr.	senkr. Theilstr.
0,1	0,06613	0,07208	0,003013
0,2	0,09115	0,08068	0,005655
0,3	0,09490	0,09480	0,008020
0,4	0,10988	0,07853	0,006305
0,5	0,05550	0,07980	0,002806
0,6	0,10140	0,09368	0,006676
0,7	0,08568	0,09713	0,007953
0,8	0,08338	0,09945	0,005470
0,9	0,06888	0,06985	0,002325
Summe	0,75690	0,76600	0,048223
Quadrat der Summe	0,57289	0,58675	0,002325
Summe der Quadrate	0,06618	0,06622	0,000296

Wie man sieht, stimmten die variablen Fehler bei Schätzung der complementären Brüche 0,1 und 0,9; 0,2 und 0,8 u. s. f. im Ganzen nahe überein, und machte es keinen erheblichen Unterschied, ob die Striche, zwischen denen die Distanz geschätzt wurde, parallel oder senkrecht auf der Verbindungslinie der Augen waren, ausser bei Einstellung auf die Hälfte des Intervalles, mithin Gleichheit beider Theile desselben, wo sich bei senkrechter Lage der Fehler nur ungefähr $^2/_3$ so gross findet als bei horizontaler; und da derselbe Unterschied zwischen beiden Lagen sich auch bei den früher von Volkmann angestellten mikrometrischen Versuchsreihen nach der Methode der mittleren Fehler wiederfindet, deren Resultate ich in meinen Elementen (Th. I. S. 221) mitgetheilt habe**), so kann er nicht als zufällig angesehen werden.

*) Unter Berichtigung einiger Zahlenangaben der Originalabhandlung nach den Originaldatis der Versuche.

**) Daselbst ist zu berücksichtigen, dass die horizontalen Distanzen zu einer senkrechten Lage der Fäden, die verticalen Distanzen zu einer

Digitized by Google

Indess ist dessenungeachtet keine besondere Aufstellung der Correction für beide Lagen nöthig, da sich die Abweichung bei 0,5 zwischen beiden Lagen durch eine entgegengesetzte bei 0,4 und 0,6 merklich compensirt, so dass die Summe der Fehler wie Summe der Quadrate der Fehler im Ganzen für beide Lagen so gut als gleich ist. Wir legen daher folgends das Mittel für beide Lagen, 0,76145, für die Summe und 0,06620 für die Summe der Quadrate zu Grunde.

Um nun hienach den Werth von $\mathfrak{S}\Delta$ und $\mathfrak{S}\Delta^2$ zu bestimmen, haben wir unter der natürlichen Voraussetzung, dass jedes Zehntel bei den Beobachtungen durchschnittlich gleich oft vorkommt, für je 10 Beobachtungen die Summe aller dabei vorhandenen Fehler und respectiv Fehlerquadrate als $\mathfrak{S}\Delta$ und $\mathfrak{S}\Delta^2$ zu nehmen, bei $i=1$ Lin. also $0{,}76145.i$ und $0{,}06620.i^2$, mithin durchschnittlich für 1 Beobachtung $0{,}076145.i$ und $0{,}006620.i^2$ und für m Beobachtungen $0{,}076145.mi$ und $0{,}006620.mi^2$. Diess giebt

$$S\Delta^2 = \Sigma\Delta^2 - 0{,}006620 \,.\, mi^2$$

und, wenn wir die Gleichung (2) auf S. 110 gültig halten

$$S\Delta = \sqrt{(\Sigma\Delta)^2 - (0{,}076145)^2 m^2 i^2}$$
$$= \sqrt{(\Sigma\Delta)^2 - 0{,}0057981 \,.\, m^2 i^2}$$

wovon letzter Ausdruck durch Auflösung nach dem binomischen Lehrsatze mit Vernachlässigung höherer Glieder und unter Rücksicht, dass $m^2\varepsilon^2 = (\Sigma\Delta)^2$ in

$$S = \Sigma\Delta\left(1 - 0{,}00290\frac{i^2}{\varepsilon^2}\right)$$

übergeht.

Wie schon oben bemerkt, zeigt sich übrigens nach den Schlussdatis der obigen Tabelle, dass das Verhältniss

$$\frac{(\mathfrak{S}\Delta)^2}{\mathfrak{S}\Delta^2} = \frac{2m}{\pi}$$

nicht zutrifft. Denn nach der Tabelle ist bei $i=1$ Linie für $m=10$ der Werth $(\mathfrak{S}\Delta)^2 = 0{,}57982$ und $\mathfrak{S}\Delta^2 = 0{,}06620$, was als ihr Verhältniss giebt 8,76; entsprechend findet sich das Verhältniss bei $i=100$ Millimeter 7,88, wogegen $\frac{2m}{\pi}$ für $m=10$ den von beiden erheblich abweichenden Werth 6,37 hat.

horizontalen Lage der Fäden gehören, und dass in Betracht eines Druckfehlers das $\mu=1$ über Tabelle IV. in $\mu=2$ zu verwandeln ist.

Digitized by Google

SITZUNG AM 12. DECEMBER 1861.

Feddersen, *über eine eigenthümliche Stromtheilung bei Entladung der Leidner Batterie.* Vorgelegt von Hankel.

Um die Elektricitätsbewegung, welche bei Entladung eines elektrischen Condensators stattfindet, im Einzelnen näher kennen zu lernen, habe ich ein Galvanometer und ein Dynamometer construirt, welche im Gegensatz zu den meisten der früher gebräuchlichen Instrumente selbst sehr starken Batterieentladungen bei kurzem gut leitendem Schliessungsbogen den Durchgang gestatten, ohne einen Schaden zu erleiden.*) Mit beiden Instru-

*) Das Wesentliche liegt besonders in der vollkommenen Isolirung der einzelnen Windungen von einander. Durch Umwickeln der über 1^{mm} dicken Kupferdrähte mit Kautschouk ist dies erreicht.

Ferner findet sich beim Dynamometer die wesentliche Einrichtung, dass die bifilar aufgehängte bewegliche Rolle mit der übrigen Leitung durch Spitzen in Verbindung steht, welche in Quecksilber tauchen, das mit verdünnter Schwefelsäure vom spec. Gew. 1,25 übergossen ist. Das logarithmische Dekrement lässt sich hierbei leicht unter 0,01 erhalten. Es ist jedoch veränderlich und muss daher bei Vergleichung von Versuchen unter einander häufig in Rechnung gezogen werden.

Die beiden Instrumente zeigen nach der Regel, dass bei Veränderung der elektrischen Spannung das Dynamometer quadratische Werthe vor denen des Galvanometers liefert, übereinstimmende Ablenkungen, und können dadurch die Richtigkeit ihrer Angaben bestätigen. Im folgenden Beispiel ist die Entladung von 10 Flaschen durch einen gegen 180^{m} langen Kupferdraht bewerkstelligt.

Schlagweite.	Ablenkung des Galvanom.	Ablenkung des Dynamom.
4^{mm}	85,0	520
3^{mm}	65,7	303
2^{mm}	47,0	156
1^{mm}	26,3	44

Bei den Messungen am Galvanometer tritt der Uebelstand ein, dass sich im Magneten zuweilen durch eine Entladung die magnetische Achse etwas verschiebt. Beobachtungen, nach denen eine solche Verschiebung der magnetischen Achse sich herausstellt, wie es besonders beim Beginn einer

Digitized by Google

menten habe ich bemerkenswerthe Resultate erlangt, doch möchte ich zunächst nur auf das Galvanometer und eine besondere Art der Verwendung desselben aufmerksam machen.

Es ist bekannt, dass, wenn in einer sehr kurzen Zeit eine Elektricitätsmenge durch den Leitungsdraht einer Galvanometerrolle hindurchgeht, der Bogen, um welchen der Magnet bei der ersten Elongation aus seiner Ruhelage hinausgeworfen wird, dieser Elektricitätsmenge proportional ist. Da die Entladung einer Leidner Flasche immer nur eine gegen die Schwingungsdauer eines Magneten kurze Zeit in Anspruch nimmt, so ist nach der Theorie der Bogen, um welchen der Magnet bei der ersten Elongation gedreht wird, der entladenen Elektricitätsmenge proportional.*)

Will man hiernach ein Galvanometer einfach zu Quantitätsmessungen hindurchgehender Elektricitätsmengen gebrauchen, so würde man einen mit Spiegel versehenen, an einem Coconfaden hängenden Magneten benutzen, man würde denselben mit einem starken Kupferdämpfer und dann mit einer Drahtrolle umgeben, durch welche der elektrische Strom fliessen kann, ohne von Windung zu Windung durchzubrechen. Die Construktion desjenigen Galvanometers, wodurch ich die eigenthümliche Stromtheilung beobachtet habe, ist auf solche Weise ausgeführt worden mit der einzigen Ausnahme, dass statt einer Rolle zwei gleiche Drahtrollen angebracht waren, die sich symmetrisch gegen den Magneten stellen liessen, so dass beim Durchfluss derselben Elektricitätsmenge die eine Rolle dem Magneten dasselbe Drehungsmoment gab, als die andere.

Zum Zweck der Untersuchung wurden die beiden gleichen Rollen dieses Galvanometers an einer Stelle des Schliessungsbogens so eingeschaltet, dass sie neben einander von dem elektrischen Strome durchlaufen werden mussten, indem der Strom sich zwischen beiden Rollen theilte. Jede Rolle bildete auf diese Weise einen Zweig zur andern.

Beobachtungsreihe stattfindet, müssen als unbrauchbar verworfen werden, weil es sich zeigt, dass ihre Werthe nicht in eine Reihe sonst gleicher Beobachtungswerthe hineinpassen.

*) Die Beobachtungen zeigen in der That eine Proportionalität der Ausschläge mit der entladenen elektrischen Oberfläche, sowie eine Zunahme mit zunehmender Schlagweite (vergl. die vorhergeh. Anmerk.)

Digitized by Google

Die Drahtenden der Rollen liessen sich nun auf zweierlei Weise mit der Hauptleitung verbinden:

1) Die Verbindung war so, dass der Strom beide Rollen in gleichem Sinn durchlief. Da die beiden Rollen sowohl einander an Windungszahl gleich, als auch symmetrisch gegen den Magneten gestellt waren, so kann ich den erhaltenen Ausschlag

$$A=a+b$$

setzen, wo A die ganze entladene Elektricitätsmenge, dagegen a die durch die eine Rolle gehende, b die durch die andere Rolle gehende Elektricitätsmenge bezeichnet.

2) Die Verbindung war so, dass der Strom die Rollen in entgegengesetztem Sinne durchlief, also die eine Rolle den Magneten nach der entgegengesetzten Seite zu drehen suchte, als die andere. Ich erhielt hier den Ausschlag $a-b$. Setze ich

$$a-b=B$$

so ist klar, dass $B<A$ sein musste. Hatte ich die beiden Rollen mit ihren Zuleitungsdrähten genau gleich gemacht, so gab die Beobachtung, wie nicht anders zu erwarten war, $B=0$.

Bei der letzten Anordnung unter (2), wo gar keine Ablenkung stattfand, schaltete ich nun in jeden Zweig einen kurzen luftverdünnten Raum ein, welchen die Elektricität durchbrechen musste. Die Endigungen der Drähte, oder um mich kürzer auszudrücken, die Elektroden waren an jeder dieser beiden Unterbrechungsstellen eine Fläche und ihr gegenüberstehend eine Spitze; jedoch war die Anordnung so getroffen, dass der Weg von der inneren Flaschenbelegung zur äusseren Belegung in dem einen Zweige mit der Richtung von Fläche zu Spitze, in dem andern Zweige umgekehrt mit der Richtung von Spitze zu Fläche zusammenfiel.

Durch diese Einschaltungen, sei es nun durch die entgegengesetzte Anordnung von Fläche und Spitze, sei es durch eine Verschiedenheit in der Länge der Luftstrecken, konnte die Leitungsfähigkeit der beiden Zweige eine verschiedene geworden sein. Ich hätte demnach erwarten können, dass der Ausschlag einen Werth zwischen Null und A zeigen würde.

So oft ich aber den Entladungsstrom bei diesem Arrangement durch den gut leitenden Schliessungsbogen gehen liess, erhielt ich einen Ausschlag, welcher C heissen möge, der nicht allein den Werth A erreichte, wie ich ihn erhalten haben würde,

Digitized by Google

wenn die Elektricität einfach von Fläche zu Spitze durch den einen Zweig allein abgeflossen wäre, sondern den Werth *A* sogar um ein Vielfaches übertraf.

In einem Falle, den ich als Beispiel herausnehme, erhielt ich als Mittel aus 10 Beobachtungen:

A	*C*
21,7	230

Hier beträgt der Ausschlag *C* mehr als das 10fache von *A*. Doch selbst auf das 16fache von *A* habe ich den Ausschlag durch Einschaltung jener beiden luftverdünnten Räume steigen sehen, während die gleichzeitige Controle durch das Funkenmikrometer oder durch ein anderes in der Hauptleitung aufgestelltes Galvanometer ergab, dass die Quantität der schliesslich entladenen Elektricitätsmenge bei allen Anordnungen wesentlich dieselbe war.

Statt verdünnter Luft habe ich an jeder Unterbrechungsstelle zwischen Fläche und Spitze auch Flüssigkeiten einzuschalten versucht, und bei gut leitendem Schliessungsbogen ebenfalls für *C* einen mehrfach grösseren Werth von *A* erhalten, sowie den Sinn des Ausschlags in derselben Weise gefunden, nämlich so, als wenn ein positiver Strom sich von Fläche zu Spitze bewegte. Zugleich schien der Ausschlag grösser und die Explosionserscheinung des Funkens an den Unterbrechungsstellen stärker zu werden mit abnehmendem Leitungsvermögen der Flüssigkeit.

Eine eingehendere Untersuchung dieser eigenthümlichen Ausschlagsvermehrung unter verschiedenen Umständen habe ich jedoch nur mit verdünnter Luft als unterbrechendem Medium angestellt. Die Beobachtung hat mir folgende Resultate geliefert.

1) Mit dem Grade der Luftverdünnung nahm auch die Ausschlagsvermehrung ab.

2) Eine geringe Verschiedenheit in der Länge der Unterbrechungsstellen war ohne wesentlichen Einfluss auf den Ausschlag; Ungleichheiten oder Discontinuitäten, die an anderen Stellen der Zweig- oder Hauptleitung vorkamen, schienen grösseren Einfluss üben zu können.

3) Mit Vergrösserung der elektrischen Oberfläche bei constanter Schlagweite nahm die Ausschlagsvermehrung (jedoch nicht einfach proportional, sondern langsamer) zu.

Digitized by Google

4) Auch mit Vergrösserung der Schlagweite bei constanter elektrischer Oberfläche nahm die Ausschlagsvermehrung zu.

5) Der Widerstand des Schliessungsbogens war von dem allergrössten Einfluss auf die Ausschlagsvermehrung; mit wachsendem Widerstande nahm dieselbe unter sonst gleichen Umständen ab, und bei dem Grenzwiderstande*) war der Ausschlag keine Vermehrung mehr, sondern dann fand sich

$$C < A.$$

6) Wurde der Widerstand noch weiter über den Grenzwiderstand hinaus vermehrt, so wurde nicht nur die Grösse der Ablenkung selbst sehr variabel (obschon sie immer $< A$ blieb), sondern schliesslich ward auch die Seite, nach welcher der Ausschlag erfolgte, wechselnd und unbestimmt; zugleich hatte die Licht- und Farbenerscheinung bei der Entladung im luftleeren Raume einen ganz andern Charakter angenommen.

Hier möchte man wohl die Frage aufwerfen, wie jene bedeutende Vermehrung des Ausschlages durch eine Entladung in einem gut leitenden Schliessungsbogen bei dem von mir getroffenen Arrangement zu erklären sei.

Gaugain hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass der Induktionsstrom mit verschiedener Leichtigkeit einen luftverdünnten Raum durchbricht, wenn in einem Falle die positive Elektricität von einem beschränkten Punkte zu einer ausgedehnten Oberfläche, im anderen Falle umgekehrt von einer ausgedehnten Fläche zu einem beschränkten Punkte der Leitung strömen muss.**) Wenn man nun auch bei meinen Versuchen eine ungleiche Theilung des Stromes in beiden Rollen annimmt, so ist ein einfaches ungleiches Abfliessen der Elektricität doch

*) Ueber den Grenzwiderstand, bei welchem die oscillatorische Entladung in die continuirliche übergeht, s. diese Ber. XIII S. 18.

**) Wenn das Princip von Gaugain zur Sonderung entgegengesetzter Ströme nicht nur empfohlen, sondern auch schon angewandt ist, so gehe ich vorläufig doch weder auf seine Beobachtungen, noch auf die von Riess in den Berl. Monatsber. Juni 1855 veröffentlichten Beobachtungen näher ein, weil ich keine vollständige Uebereinstimmung der beiden Beobachter, sei es in ihren Resultaten, sei es in der Deutung derselben, finde. Nur so viel will ich bemerken, dass die von Riess nach dem Gaugain'schen Princip an der Leidner Flasche gemachten Beobachtungen am Leichtesten mit meinen Beobachtungen in Einklang zu bringen sind.

Digitized by Google

nicht im Stande, den bedeutenden Ausschlag zu erklären. Denn wenn im günstigsten Falle der Theilung — den die Wahrnehmung einer Lichterscheinung an den beiden Unterbrechungsstellen sogar noch ausschliesst *) — die Elektricität durch einen Zweig allein abflösse, so könnte doch durch ein einmaliges einfaches Abfliessen nur ein Ausschlag von der Grösse *A* zu Stande kommen, während der Versuch ein Vielfaches von *A* liefert.

Ich will mich auf eine Erklärung hier nicht weiter einlassen, sondern nur bemerken, dass ich anders keine Möglichkeit der Erklärung einsehe, als wenn man die Annahme eines einfachen, sei es continuirlichen, sei es discontinuirlichen Abfliessens aufgiebt, und seine Zuflucht nimmt zu der Theorie der Oscillationen.**)

---

*) Falls sich der Strom in bestimmter Weise zwischen den beiden Zweigen theilte, müsste das Dynamometer, an die Stelle des Galvanometers gesetzt, über das Verhältniss der Theilung Aufschluss geben können. Ich liess daher unter sonst gleichen Umständen eine mit Galvanometer und Funkenmikrometer als gleich erfundene Elektricitätsmenge einmal ohne Anwesenheit der luftverdünnten Räume in den beiden Zweigen sich zwischen der Dynamometerrolle theilen, wobei ich als Mittel aus 10 Beobachtungen den Ausschlag

103

erhielt, ein andermal sich mit Anwesenheit der beiden luftverdünnten Räume in den beiden Zweigen theilen, wobei ich den Dynamometerausschlag

40

im Mittel erhielt.

Wenn die Elektricitätsbewegung in beiden Fällen genau dieselbe wäre und der Strom sich im ersten Falle in einem gleichen Verhältniss, im zweiten in einem ungleichen aber constanten Verhältniss zwischen beiden Dynamometerrollen theilte, so müsste bei dem Ausschlage 40 in jedem Momente durch den einen Zweig 11%, durch den andern 89% gegangen sein, während bei dem Ausschlage 103 durch jede Rolle 50% gehend angenommen werden. Dies Raisonnement gilt auch bei Annahme von Oscillationen, wenn überhaupt ein von der Stromstärke unabhängiges constantes Theilungsverhältniss existirt, ein Punkt, über den ich bis jetzt noch nichts Bestimmtes aussagen kann. Das unter 6) angeführte Resultat, sowie die Beobachtungen von Riess und Gaugain scheinen dagegen zu sprechen.

**) Vergl. diese Ber. XI. S. 171 u. f., sowie Pogg. Ann. 113 S. 438 u.f.

Digitized by Google

O. Schlömilch, *über eine Transformation unendlicher Reihen.*

Die bekannte, von Mac Laurin herrührende Summenformel

$$f(\xi)+f(2\xi)+f(3\xi)+\ldots+f(m\xi)$$

$$=\frac{1}{\xi}\int_0^{m\xi} f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(m\xi)-f(0)]$$

$$+\frac{B_1\xi}{1.2}[f'(m\xi)-f'(0)]-\frac{B_3\xi^3}{1.2.3.4}[f'''(m\xi)-f'''(0)]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{k-1}B_{2k-1}\xi^{2k-1}}{1.2.3\ldots(2k)}[f^{(2k-1)}(m\xi)-f^{(2k-1)}(0)]$$

$$+\frac{(-1)^k B_{2k+1}\xi^{2k+2}}{1.2\ldots.(2k+2)}S_m,$$

worin

$$S_m=f^{(2k+2)}(\vartheta_0\xi)+f^{(2k+2)}(\xi+\vartheta_1\xi)+f^{(2k+2)}(2\xi+\vartheta_2\xi)+\ldots$$

$$\ldots+f^{(2k+2)}(\overline{m-1}\,\xi+\vartheta_{m-1}\xi)$$

ist und $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{m-1}$ positive echte Brüche bedeuten, wird gewöhnlich nur zur Umwandlung einer endlichen Reihe in eine andere, meistentheils halbconvergente Reihe benutzt, sie kann aber für $m=\infty$ auch zur Transformation unendlicher Reihen dienen, falls $f(\infty)=0$ ist und

$$f(0),\quad \int_0^\infty f(x)\,dx,$$

$$f'(0),\quad f'''(0),\quad f^{\mathrm{v}}(0),\quad f^{(2k-1)}(0),$$

$$f'(\infty),\quad f'''(\infty),\quad f^{\mathrm{v}}(\infty),\quad f^{(2k-1)}(\infty)$$

endliche Werthe haben. Wenn überdiess die letztgenannten Functionen verschwinden, so wird einfacher

Digitized by Google

2) $$f(\xi)+f(2\xi)+f(3\xi)+f(4\xi)+\dots$$
$$=\frac{1}{\xi}\int_0^\infty f(x)\,dx-\frac{1}{2}f(0)-\frac{B_1 f'(0)}{1.2}\xi+\frac{B_3 f'''(0)}{1.2.3.4}\xi^3-\dots$$
$$..+(-1)^k\frac{B_{2k-1}f^{(2k-1)}(0)}{1.2.3\dots(2k)}\xi^{2k-1}+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k+1}S}{1.2\dots(2k+2)}\xi^{2k+2}.$$
$$S=f^{(2k+2)}(\varrho_0\xi)+f^{(2k+2)}(\varrho_1\xi)+f^{(2k+2)}(\varrho_2\xi)+\dots,$$
$$0<\varrho_0<1<\varrho_1<2<\varrho_2<\dots,$$
und es versteht sich dann von selbst, dass die Convergenz der ersten Reihe $f(\xi)+f(2\xi)+$etc. zugleich die Convergenz der Reihe für S bedingt.

Als erstes Beispiel nehmen wir
$$f(x)=xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\sin x\omega\,d\omega;$$
diese Function genügt allen zur Gültigkeit der Formel 2) erforderlichen Bedingungen, und zwar ist
$$f^{(2p-1)}(x)=\frac{(-1)^{p-1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega^{2p}e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\cos x\omega\,d\omega,$$
$$f^{(2p-1)}(0)=\frac{(-1)^{p-1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \omega^{2p}e^{-\frac{1}{4}\omega^2}d\omega=\frac{(-1)^{p-1}2^p}{2}.1.3.5\dots(2p-1).$$
Hiernach folgt aus No. 2)
$$\xi e^{-\xi^2}+2\xi e^{-(2\xi)^2}+3\xi e^{-(3\xi)^2}+\dots$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{\xi}-\frac{B_1}{1}\xi-\frac{B_3}{1.2}\xi^3-\frac{B_5}{1.2.3}\xi^5-\dots..$$
$$..-\frac{B_{2k-1}}{1.2\dots k}\xi^{2k-1}\Big\}+(-1)^{k+1}\frac{B_{2k+1}}{1.2\dots(2k+2)}\xi^{2k+2}$$
oder, wenn beiderseits mit ξ dividirt, $e^{-\xi^2}=x$ gesetzt und der Rest kurz mit R bezeichnet wird,

3) $$x+2x^4+3x^9+4x^{16}+\dots$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{l\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{B_1}{1}-\frac{B_3}{1.2}l\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{B_5}{1.2.3}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2-\dots$$
$$\dots-\frac{B_{2k-1}}{1.2.3\dots k}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{k-1}\Big\}+R.$$

Diese Formel gewährt einen erheblichen Vortheil, im Fall x nahe an der Einheit liegt, wobei die Reihe linker Hand zu schwach convergirt, als dass man ihre Summe direct berechnen

Digitized by Google

könnte. Lässt man x^4 an die Stelle von x treten und zieht das Doppelte der neuen Gleichung von der vorigen ab, so erhält man eine analoge Transformation der Reihe

$$x+3x^9+5x^{25}+7x^{49}+\ldots.$$

Dass sich diese und ähnliche Resultate mit der Theorie der elliptischen Functionen in Verbindung bringen lassen, bedarf kaum der Erwähnung.

Als zweites Beispiel diene die Annahme

$$f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=2.\int_0^\infty\frac{\sin x\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega,$$

welche giebt

$$f^{(2p-1)}(x)=(-1)^{p-1}2\int_0^\infty\frac{\omega^{2p-1}\cos x\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega,$$

$$f^{(2p-1)}(0)=(-1)^{p-1}2\int_0^\infty\frac{\omega^{2p-1}\,d\omega}{e^{2\pi\omega}-1}=(-1)^{p-1}\frac{B_{2p-1}}{2p}.$$

Da hier $f(\infty)$ nicht $=0$ ist, so gehen wir auf die Gleichung 1) zurück und erhalten

$$\frac{1}{e^\xi-1}+\frac{1}{e^{2\xi}-1}+\ldots+\frac{1}{e^{m\xi}-1}$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-lm\right)\frac{1}{\xi}+\frac{l(1-e^{-m\xi})-l\xi}{\xi}$$
$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{m\xi}-1}+\frac{1}{m\xi}\right)$$
$$+\frac{B_1\xi}{1.2}[f'(m\xi)-f'(0)]-\frac{B_3\xi^3}{1.2.3.4}[f'''(m\xi)-f'''(0)]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^{k-1}B_{2k-1}\xi^{2k-1}}{1.2.3\ldots(2k)}[f^{(2k-1)}(m\xi)-f^{(2k-1)}(0)]$$
$$+\frac{(-1)^k B_{2k+1}\xi^{2k+2}}{1.2\ldots(2k+2)}S.$$

Nach einer von Malmstén angegebenen Formel ist

$$(-1)^n D^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$$
$$=\frac{a_1}{e^x-1}+\frac{a_2}{(e^x-1)^2}+\ldots+\frac{a_{n+1}}{(e^x-1)^{n+1}},$$

Digitized by Google

und daraus erhellt, dass $f^{(n)}(\infty)=0$, wofern n mehr als Null beträgt. Lassen wir jetzt m in's Unendliche wachsen und beachten, dass

$$\text{Lim}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-lm\right)$$

die Constante des Integrallogarithmus ist, so gelangen wir bei gleichzeitiger Substitution der vorigen Werthe von $f'(0)$, $f'''(0)$, etc. zu folgender Transformation

$$\frac{1}{e^{\xi}-1}+\frac{1}{e^{2\xi}-1}+\frac{1}{e^{3\xi}-1}+\ldots..$$

$$=\frac{C-l\xi}{\xi}+\frac{1}{4}-\frac{(B_1)^2\xi}{1.2.2}-\frac{(B_3)^2\xi^3}{1.2.3.4.4}-\ldots.$$

$$\ldots-\frac{(B_{2k-1})^2\xi^{2k-1}}{1.2\ldots(2k)(2k)}+\frac{(-1)^k B_{2k+1}\,\xi^{2k+2}}{1.2\ldots.(2k+2)}S.$$

Für $e^{-\xi}=x$ wird hieraus

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.$$

$$=\frac{C-ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{4}-C_1\,l\left(\frac{1}{x}\right)-C_3\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\ldots.$$

$$\ldots-C_{2k-1}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2k-1}+R,$$

worin die mit C bezeichneten Coefficienten folgende Werthe haben:

$$C=0{,}57721\ 56649\ldots,$$

$$C_1=\frac{(B_1)^2}{1.2.2}=\frac{1}{144},$$

$$C_3=\frac{(B_3)^2}{1\ldots4.4}=\frac{1}{86\ 400},$$

$$C_5=\frac{(B_5)^2}{1\ldots6.6}=\frac{1}{7\ 620\ 480},$$

$$C_7=\frac{(B_7)^2}{1\ldots8.8}=\frac{1}{290\ 304\ 000},$$

$$C_9=\frac{(B_9)^2}{1\ldots10.10}=\frac{1}{6\ 322\ 821\ 120},$$

u. s. w.

Digitized by Google

Die obige Umwandlung der Lambert'schen Reihe bildet das Gegenstück zu der von Clausen in Crelle's Journal (Bd. III, S. 95) angegebenen Transformation:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.$$
$$=\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\frac{1+x^3}{1-x^3}x^9+\ldots.$$

Während nämlich die letztere bei kleinen x vortheilhaft ist, gewährt jene eine um so leichtere Rechnung, je weniger x von der Einheit differirt. So würde man z. B. für $x=0,9$ wenigstens 13 Glieder der Clausen'schen Reihe berechnen müssen, um 7 richtige Decimalen zu erhalten, dagegen liefern schon die drei Glieder

$$\frac{C-ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{4}-\frac{1}{144}l\left(\frac{1}{x}\right)$$

ein Resultat von gleicher Genauigkeit. In der Nähe von $x=\frac{1}{e}=0,36788$ verlangen beide Formeln ziemlich denselben Arbeitsaufwand; so giebt z. B. bei $x=0,4$ nach der von meinem Collegen Herrn O. Fort ausgeführten Rechnung die logarithmische Formel mit 6 Gliedern die Summe 0,96898 41590 und die Clausen'sche Formel mit 5 Gliedern 0,9689 41592.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

Seite

W. Hankel, Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte . 1

Derselbe, Notiz über phosphorisches Leuchten des Fleisches . . 5

Feddersen, Die oscillatorische elektrische Entladung und ihre Grenze. Vorgelegt von Hankel 13

M. W. Drobisch, Neue Ableitung der Grundformeln von Fechner's Psychophysik 20

G. Th. Fechner, Ueber den seitlichen Fenster- und Kerzenversuch 27

Derselbe, Ueber die Correctionen bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen, der Bestimmung der Schwankungen meteorologischer Einzelwerthe um ihren Mittelwerth, und der psychophysischen Maassbestimmungen nach der Methode der mittleren Fehler 57

Feddersen, über eine eigenthümliche Stromtheilung bei Entladung der Leidner Batterie. Vorgelegt von Hankel 114

O. Schlömilch, Ueber eine Transformation unendlicher Reihen . 120

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERZEHNTER BAND.

1862.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

Digitized by Google

Digitized by Google

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Herr Staatsminister a. D. *Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim.*
Seine Excellenz der Herr Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Johann Paul von Falkenstein.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- Professor *Hermann Brockhaus* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Hofrath *Eduard Albrecht* in Leipzig.
- Professor *Gustav Flügel* in Dresden.
- Rector *Friedrich Franke* in Meissen.
- Geheimer Regierungs- und Kammerrath *Hans Conon von der Gabelentz* in Altenburg.
- Geheimer Hofrath *Karl Göttling* in Jena.
- Doctor *Hermann Alfred von Gutschmid* in Leipzig.
- Hofrath *Gustav Hänel* in Leipzig.

Digitized by Google

Herr Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Jena.
- Hofrath *Karl Nipperdey* in Jena.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Hofrath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Kirchenrath *Friedrich Tuch* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wachsmuth* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.
- Professor *Anton Westermann* in Leipzig.
- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in Tübingen.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Moritz Haupt* in Berlin.
- —— *Otto Jahn* in Bonn.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Hofrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Ernst Heinrich Weber* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Geheimer Medicinalrath *Karl Gustav Carus* in Dresden.
- Hofrath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Otto Linné Erdmann* in Leipzig.
- —— *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Geheimer Regierungsrath *Peter Andreas Hansen* in Gotha.
- Doctor *Wilhelm Hofmeister* in Leipzig.
- Professor *Georg Mettenius* in Leipzig.

Digitized by Google

Herr Professor *August Ferdinand Möbius* in Leipzig.
- —— *Karl Friedrich Naumann* in Leipzig.
- —— *Eduard Pöppig* in Leipzig.
- Bergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- —— *Theodor Scheerer* in Freiberg.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Hofrath *Mathias Jacob Schleiden* in Jena.
- Professor *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- —— *Eduard Friedrich Weber* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich d'Arrest* in Kopenhagen.
- —— *Otto Funke* in Freiburg.
- —— *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- —— *Alfred Wilhelm Volkmann* in Halle.
- —— *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1862 eingegangenen Schriften.

Schriften von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden.

Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1861, Nov., Dec. 1862, Jan.—August.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe. Bd. XI. Wien 1861. Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. XX. Wien 1862.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe, Bd. XXXVI, 2. 3. XXXVII, 1 u. 2. 3. 4. XXXVIII, 1—3. Wien 1861. 1862. XXXIX, 1. Wien 1862. — Mathem.-naturwiss. Classe, Bd. XLII, 29. Wien 1861. Abtheil. I (naturwissenschaftliche), Bd. XLIII, 1—5. XLIV, 1—5. Wien 1861. 1862. Abtheil. II (naturgeschichtliche), Bd. XLIII, 1—5. XLIV, 1—5. Wien 1861. 1862. XLV, 1—3. Wien 1862.

Digitized by Google

Register zu den Bänden XXXI—XLII der Sitzungsberichte der mathem.-naturwiss. Classe. IV. Wien 1862.

Almanach der Kaiserl. Akademie d. Wissensch. 11. Jahrg. Wien 1861.

Fontes rerum Austriacarum. Erste Abtheilung. Scriptores. Bd. III. Th. 1. Wien 1862.

Archiv für Kunde österreichischer Geschichtsquellen. Bd. XXVI, 1. 2. XXVII, 1. 2. Wien 1861. XXVIII, 1. Wien 1862.

Jahrbuch der K. K. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. XI, 2. XII, 1. 2. Wien 1860—1862.

The Imperial and Royal geological Institute of the Austrian Empire. Vienna 1862.

Die fossilen Mollusken des Tertiärbeckens von Wien. Von Dr. M. Börnes. Bd. II. Nr. 3. 4. Bivalven. Herausg. von der K. K. geologischen Reichsanstalt.

Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. XI. Jahrg. 1861. Heft 1—4. Wien 1861.

Nachträge zu Maly's Enumeratio plantarum phanerogamarum imperii austriaci universi, von Aug. Neilreich, herausg. von der K. K. zool.-bot. Gesellschaft. Wien 1861.

Synopsis der im rothen Meere vorkommenden Crustaceen, von Dr. Cam. Heller. (Besonderer Abdruck.)

Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 5. Folge. Bd. XI. 1860 u. 1861. Prag 1861.

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrg. 1861, Jul.—Dec. Prag 1861.

Verhandlungen des Vereins für Naturkunde zu Presburg. Bd. IV. 1859. Bd. V. 1860—1861.

Abhandlungen der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Histor. Cl. Bd. IX. Abth. 1. München 1862. Philos.-philol. Cl. Bd. IX. Abth. 2. München 1861. Mathem.-physik. Cl. Bd. IX. Abth. 1. München 1861.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. 1860. Heft 4. 5. — 1861. I. Heft 5. II. Heft 1. 2. — 1862. I. Heft 4. II. Heft 1—3.

Verzeichniss der Mitglieder der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1862. München 1862.

Annalen der Königl. Sternwarte bei München. Bd. XII.

Reden, gehalten in der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften:

Christ, über die Bedeutung der Sanskritstudien für die griechische Philologie. 1860.

v. Liebig, zur Vorfeier des Stiftungstages. 1861.

v. Liebig, zur Feier des Geburtsfestes Sr. Maj. Maximilian II. 1861.

Wagner, Denkrede auf Tiedemann. 1861.

Muffat, Denkrede auf Rudhart. 1861.

Rockinger, zur Vorfeier des Stiftungsfestes. 1861.

Plath, über die Dauer des chinesischen Reiches. 1861.

v. Siebold, über Parthenogenesis. Zur Feier des 103ten Stiftungstages. 1862.

v. Martius, zum Gedächtniss an Jean Baptiste Biot. 1862.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. X. von den J. 1861 u. 1862. Göttingen 1862.

Nachrichten von der Georgs-August-Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Vom J. 1861, Nr. 1—22. Göttingen 1861.

Digitized by Google

Denkschrift der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden zur Feier des funfzigjährigen Doctor-Jubiläums des Herrn Geh. Medicinalrathes Dr. C. G. Carus. Dresden 1861.
Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrage der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 39, 1 u. 2. 40, 1. Görlitz 1862.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Herausg. von dem naturwiss. Verein für Sachsen und Thüringen. Jahrg. 1861, Oct.—Dec. 1862, Jan. Febr. Berlin 1861. 1862.
Die Fortschritte der Physik. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XV (1859). Berlin 1861.
Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. VI, Heft 2—4. Bd. VII, Heft 1. Halle 1861. 1862.
Würzburger naturwissenschaftliche Zeitschrift, herausg. von der physikal.-medicinischen Gesellschaft. Bd. II, 2. 3. III, 1. Würzburg 1861. 1862.
Würzburger medicinische Zeitschrift, herausg. von der physikal.-medicinischen Gesellschaft. Bd. II, 5. 6. III, 1—3. Würzburg 1861. 1862.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins in Heidelberg. Bd. II.
Jahresbericht des physikal. Vereins in Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1860—1861. Frankfurt 1862.
Der zoologische Garten. Organ für die zoologische Gesellschaft zu Frankfurt a. M. Jahrg. III, 1862, Nr. 1—6.
Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Philos.-histor. Abth. 1862. Heft 1. 2. — Abth. für Naturwiss. u. Medicin. 1861. Heft 3. 1862. Heft 1. Breslau 1862.
Jahresbericht (39.) der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur für d. J. 1861. Breslau 1862.
Schriften der Königl. ost-preussischen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. II. Abth. 1. 2. Königsberg 1861. 1862.
Bericht (9.) der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1862.
Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. II. Nürnberg 1861.
Verhandlungen des historischen Vereins der Oberpfalz und Regensburg. Bd. XX. Regensburg 1861.
Erster Bericht über die Sammlungen des Königl. Welfen-Museums im März 1862. Hannover 1862.
Zehnter Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft zu Hannover. Hannover 1860. — Elfter Jahresbericht u. s. w. Hannover 1862.
Academische Schriften der Universität Rostock. 1861—1862. 12 Stück.
Schriften der Universität zu Kiel aus dem Jahre 1861. Bd. 8. Kiel 1862.
Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. VI, 1—4. Zürich 1861.
Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1861. Bern 1861.
Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. III, 2. 3. Basel 1861. 1862.
Bericht über die Thätigkeit der St. Gallischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft während des Vereinjahres 1861—62. St. Gallen 1862.
Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. VII, 1860—61. Chur 1862.
Correspondenzblatt des naturforschenden Vereins zu Riga. Jahrg. XII.
Collection de Chroniques belges inédites publiées par ordre du Gouvernement. Les XIV livres sur l'histoire de la ville de Louvain. Part. 1

Digitized by Google

et 2. Bruxelles 1861. — Chronique de Jean de Stavelot, publ. par A. Borgnet. Bruxelles 1862.

Mémoires de l'académie royale des sciences &c. de Belgique. T. XXXIII. Bruxelles 1861.

Bulletin de l'académie royale . . . de Belgique. 30ème année. Sér. II. T. XI. XII. Bruxelles 1861.

Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'académie royale . . . de Belgique. T. XXX, 1858-1861. Bruxelles 1861.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale . . . en Belgique. Collection in-8°. T. XI. XII. Bruxelles 1861.

Annuaire de l'académie royale . . . de Belgique 1862. 28ème année. Bruxelles 1862.

Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam. (Natuurkunde.) Deel IX. Amsterdam 1861.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam. Natuurkunde, Deel XI. XII. Amsterdam 1861.

Jaarboek van de Kon. Akademie van Wetenschappen . . . te Amsterdam voor 1860.

Programma certaminis poetici ab Academia regia disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeuffetiano propositi ao. 1862.

Catalogue de la bibliothèque d'histoire naturelle etc. de feu G. Vrolik. Amsterdam 1860.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitgegeven door het Kon. zoologisch Genootschap te Amsterdam. Aflev. 8. Amsterdam 1859.

Verslag van het Verhandelde in de algemeene Vergadering van het Provincial Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, a) d. 25 Junij 1861, b) d. 16 Junij 1861. Utrecht 1861. (2 Bände.)

Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen van het Provincial Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, a) 1859, b) 1860, c) 1861. Utrecht 1859—1861. (3 Bände.)

Recherches sur l'évolution des araignées, par Éd. Claparède. Mémoire auquel la Société des arts et sciences d'Utrecht a décerné une médaille d'or. Utrecht 1862.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. Deel XVI. Haarlem 1862.

Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. X. Venezia 1861.

Atti dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. VI, Serie 3, Disp. 7, 8, 10. T. VII, Serie 3, Disp. 1—6. Venezia 1860—62.

Rivista periodica dei lavori della I. R. Academia di scienze, lettere ed arti di Padova. Trimestre III e IV del 1853—1856. Vol. IV—IX, 9—20. Padova 1860. 1861.

Della rottura spontanea del cuore. Memoria letta . . . dal socio ordinario Gius. Dott. Orsolato. (Aus Atti della I. R. Academia di scienze di Padova.)

Philosophical transactions of the royal society of London for the year 1861. Vol. 151, P. 1—3. London 1861.

Proceedings of the royal society of London. Vol. XI, No. 45—49. XII, No. 50. 51.

The royal society (List of members) 30th Nov. 1861.

Memoirs of the literary and philosophical society of Manchester. Ser. III, Vol. I. London 1862.

Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester. Vol. I. (p. 253—261, nebst Titel u. Index.) Vol. II. 1862.

Digitized by Google

Rules of the literary and philosophical society of Manchester instituted 1781.
Annals of the astronomical observatory of Harvard College. Vol. III. Cambridge 1862.
Transactions of the royal society of Edinburgh. Vol. XXII. P. 3. 1860. 1861.
Proceedings of the royal society of Edinburgh. Session 1860—1861.
The Journal of the royal Dublin society. No. 20 & 21. 22 & 23. Jan. & April 1862. Dublin 1862.
Journal of the geological society of Dublin. Vol. IX, P. 1. 1860—61. Dublin 1861.

Besondere Abdrücke von Abhandlungen aus diesem Journal, von Sam. Haughton: a) On the tidal currents of the Irish Sea. b) On the reflexion of polarized light. c) Some new laws of reflexion of polarized light. d) On the black mica of the granit of Leinster. e) On the use of the hygrometer in the measurements of heights. f) The tides of Dublin Bay. g) On the solar and lunar diurnal tides. h) Short account of experiments &c. to determine the azimuthal motion of the plane of vibration of a freely suspended pendulum. i) On the natural constants of the healthy urine of man. k) Catalogue of a geological and geographical collection of minerals from the arctic regions from the Cape Farewell to Baffins-Bay, by Sir Charles Giesecke.

Comptes rendus des séances et mémoires de la société de biologie. T. II, sér. 3. Année 1860. Paris 1861.
Congrès archéologique de France. XXVIIe. Session. 1860. Paris 1861. XXVIIIe. Session, 1861. Paris 1862.
Annuaire de l'institut des provinces, des sociétés savantes et des congrès scientifiques. Sér. II. 4e. Vol. (14e. Vol. de la collection). Paris 1862.
Mémoires de la société des sciences naturelles de Strasbourg. T. V, livr. 2 et 3. Strasbourg 1862.

Memorias de la real academia de ciencias de Madrid. T. III. Serie 2. Ciencias fisicas. T. I. P. 2. Madrid 1859. T. IV. Serie 3. Ciencias naturales. T. II. P. 3. T. V. 1861.

Resumen de las actas de la real academia de ciencias de Madrid. 7 Stück für die Jahre 1853—1859.
Sesiones de la sociedad de ciencias de Madrid. (Bogen 3—9 ohne Titel.)
Memorias de la real academia de San Fernando. El Arte latino-bizantino en España y las coronas Visigodas de Guarrazar: ensayo histórico-crítico, por D. José Amador de los Rios. Madrid 1861.
Nomenclátor de los pueblos de España, formado por la Comision de estadística general del Reino. Madrid 1858.
Censo de la poblacion de España, segun el recuento verificado en 21 de Majo de 1857 por la Comision de estadística general del Reino. Madrid 1858.
Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. IV. Fasc. 1. 1862.
Upsala Universitets Årsskrift 1861. Mathematik och Naturvetenskap. Philosophi, Sprakvetenskap och historiska Vetenskaper. Rätts-och Statsvetenskaper. Theologi. Medicin.
Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Sér. VII, T. IV, 1—9. St.-Pétersbourg 1861. 1862.
Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. T. IV, 3—6.

Digitized by Google

Bülletin der kaiserl. russischen archäologischen Gesellschaft. Bd. I. St.-Petersburg 1859. Bd. II. St.-Petersburg 1861.

Compte-rendu de la commission impériale archéologique pour l'année 1860. Avec un Atlas. St.-Pétersbourg 1861.

Bulletin de la société impériale des naturalistes de Moscou. Année 1861, 1—4. Moscou 1862.

Az Erdélyi Muzeum-Egylet Évkönyvei. I. Kötet. Szerkesztette Brassai Sámuel. Kolozsvártt, 1861.

Erdélyi Orsz. Muzeum Naptára az 1863-dik Közönséges Esztendöre. Kiadja az E. O. Muzeum igazgató választmánya. Kolozsvártt, 1862.

Transactions of the american philosophical society helt at Philadelphia. Vol. VII, No. 64. 1860. Vol. VIII, No. 65. 66. 1861.

Proceedings of the American philosophical society helt at Philadelphia. 1861, pag. 97—556. 1862, pag. 1—168.

Annals of the Lyceum of natural history of New York 1860. Vol. VII, 1—9. May 1860. 1861.

Memoirs of the American academy of arts and sciences. New Series. Vol. VIII. P. 1. Cambridge and Boston 1861.

Proceedings of the American academy of arts and sciences. From May 1861 to April 1862. p. 241—384.

Smithsonian miscellaneous collections. Catalogue of the publications of the Smithsonian institution corrected to June 1862. Washington 1862.

Smithsonian miscellaneous collections. Smithsonian Museum Miscellanea. Washington 1862.

Smithsonian miscellaneous collections. Washington 1862. Vol. I. Directions for meteorological observations and the registry of periodical phenomena. Washington 1860. — Vol. II. Smithsonian report on recent improvements in the chemical arts, by James C. Booth and Campbell Morfit. Washington 1852. — Vol. III. Catalogue of the described Diptera, Lepidoptera etc. 1862. — Vol. IV. Synopsis of the Neuroptera of North America etc. 1862.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution for the year 1860. Washington 1861.

Results of the meteorological observations made under the direction of the U. S. Patent office and the Smithsonian institution from the year 1854 to 1859 incl. Vol. I. Washington 1861.

Report of the Secretary of war. 34th Congress. p. 1—480. 35th Congress. p. 1—176.

Annual report of Brevet Lieut. Colonel J. D. Graham, Major of U. S. topographical engineers, for the year 1858, on the improvement of the harbors of Lakes Michigan &c. Washington 1859. p. 1—96.

Report upon the Colorado River of the West, explored in 1857 and 1858 by Lieut. J. C. Ives &c. by order of the Secretary of war. Washington 1861.

Thirteenth annual report of the regents of the university of the State of New York on the condition of the State Cabinet of natural history &c. Albany 1860.

Fünfzehnter Jahresbericht der Ohio-Staats-Ackerbaubehörde &c. für d. J. 1860. Columbus Ohio 1861.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. 18. Deel. Batavia 1842. 20. Deel. 1845. 21. Deel. 1847. 22. Deel. 1849. 26. Deel. 1854—57. 27. Deel. 1860. 28. Deel. 1860.

Vier Bücher in javanischer Sprache.

Digitized by Google

Schriften für das magnetische Observatorium.

Meteorologische Warnemingen in Nederland en zijne Besittingen en Afwijkingen van Temperatuur en Barometerstand of vele Plaatsen in Europa, uitgegeven door het Kon. Nederlandsch meteorologisch Institut. a) 1859. b) 1860. Utrecht 1860. 1861.

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von K. Kreil. Bd. VIII. Jahrg. 1856. Herausg. durch die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien 1861.

Astronomical and magnetical and meteorological observations made at the royal observatory Greenwich in the year 1860 &c. London 1862. Nebst Beilage: Errata &c.

A. T. Kupffer, Annales de l'observatoire physique central de Russie. Année 1859. No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1862.

Einzelne Schriften.

J. M. Gillies, An account of the total eclipse of the sun on July 18, 1860, as observed near Steilacoom, Wash. Terr. Washington City, 1861.

——, Physical aspects of the Comet II 1861.

Contents of the correspondence of scientific men of the seventeenth century, printed at the University press Oxford in 2 volumes 1841 &c. compiled by Aug. de Morgan. Oxford 1862.

D. D. Owen, Fourth report of the geological survey in Kentucky made during the years 1858 and 1859. Frankfort Kentucky 1861.

Albert D. Hager, Report on the geology of Vermont &c. Vol. I. II. Claremont 1861.

W. J. Rhees, Manual of public libraries, institutions and societies in the U. S. and British provinces of North-America. Philadelphia 1859. Pag. I—XXVIII, 1—687.

A. F. Ward, Universal system of semaphoric color signals. Philadelphia 1862.

12 Stück Landkarten: Chicago harbor and bar. Map G. Nr. 11, 12, 38, 43, 44, 47, 48, 52, 54, 58, under the direction of Brevet Lieut. Col. J. D. Graham, superintending engineer of lake harbor works. Hierzu 8 Octavblätter Addenda, Errata und Corrections. – Kelleys and Bass Islands &c. under the orders of Lieut. J. Kearney. 1849. — St. Clair Flats &c under the direction of Lieut. Col. J. Kearney. 1857.

Programm zu den mit den Schülern der Königl. polytechnischen Schule und der Königl. Baugewerkenschule in Dresden zu haltenden Prüfungen 1861/62.

Das Gesetz des Wachsthums des Menschen, von F. P. Liharžik. Prospectus u. s. w. Wien 1862.

Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde, in den Jahren 1857, 1858, 1859. Beschreibender Theil. Bd. III. Wien 1862.

Der Katarrh der innern weiblichen Geschlechtstheile, von Dr. C. Hennig. Leipzig 1862.

Copia dell' epistola alla Santità del Pontefice &c. del Comm^{e}. Salv. Fenicia. Napoli 1862.

Leop. Auerbach, Ueber einen Plexus mesentericus u. s. w. Vorläufige Mittheilung. Breslau 1862.

Digitized by Google

Beiträge zur Geschichte des Braunschweig-Lüneburgschen Hauses, von C. E. Malortie. Heft 3. Hannover 1862.
Klimatographische Uebersicht der Erde u. s. w. von A. Mühry. Leipzig u. Heidelberg 1862.
Vergleichende Osteologie des Rheinlachses Salmo Salar u. s. w. beschrieben und abgebildet von Dr. C. Bruch. Mit 7 Tafeln. Mainz 1861.
Carmen historicum occulti autoris saec. XIII, aufgefunden in einer Hdschr. der Prager Universitäts-Bibliothek von C. Höfler. Wien 1861.
Verzeichniss der im J. 1861 für die Herzogl. Sammlungen des Friedensteins eingegangenen Geschenke.
Von der guten alten Zeit. Landesfürstliche Verordnung gegen das Laster der Gotteslästerung und des Zutrinkens, 1513. Von Dr. Back. (Altenburg 1862.)
Steinmetzzeichen. Von Dr. Back. (Altenburg 1862.)
Aus dem Leben der Herzöge Friedrich Wilhelm, Stifters des Altenburgischen, und Johann, Stifters des Gothaischen und Weimarischen Hauses Sachsen-Ernestinischer Linie. Von Dr. Back. (Altenburg 1862.)
Tridzatoje prisujdenie utschnejdennych P. N. Demidowym Nagrad. 16 Junia 1861 goda. Sanktpeterburg 1861. (Russisch.)

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

INHALT.

A. F. Möbius, Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel . . . . S. 1

Herm. Hankel, Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche. Vorgelegt von W. Scheibner . . . . : 17

O. Schlömilch, Ueber die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung 23

K. G. Lehmann, Ueber verschiedene Untersuchungen, welche in letzter Zeit im chemischen Laboratorium zu Jena ausgeführt worden sind 35

O. Schlömilch, Ueber die Complanation gewisser Fusspunktflächen 51

W. G. Hankel, Ueber die von G. Meissner an der Oberfläche des menschlichen Körpers beobachteten elektrischen Erscheinungen 56

W. Scheibner, Ueber periodische Functionen 64

Digitized by Google

SEP 27 1907
4066

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

LIBRARY
CAMBRIDGE, MASS.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1862.

14

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1863.

Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG AM 15. MÄRZ 1862.

A. F. Möbius, *Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel.*

Herr E. E. Kummer hat im 57. Bande des Borchardt-Crelle'schen Journals eine durch die Allgemeinheit der Darstellung und durch den Reichthum ihres Inhalts gleich ausgezeichnete Abhandlung über geradlinige Strahlensysteme veröffentlicht. Im Eingange zu derselben bemerkt er, dass zur Behandlung dieses Gegenstandes die Optik den ersten Anstoss gegeben habe, dass man sich deshalb bisher fast nur auf solche Strahlensysteme beschränkt habe, wo alle Strahlen als Normalen einer Fläche auftreten, und dass zuerst Hamilton in seiner im 16. Bande der Transactions of the Royal Irish Academy erschienenen Abhandlung, obgleich noch immer von physikalischen Principien ausgehend, die allgemeineren geometrischen Eigenschaften der Strahlensysteme entwickelt habe. Diese von Hamilton gegebene Theorie habe er (Herr Kummer) in seiner Abhandlung, durch eine neue Begründung, der analytischen Geometrie des Raumes anzueignen und in mehreren wesentlichen Punkten zu vervollständigen gesucht.

Der Calcul, dessen sich Herr Kummer zu diesem Zwecke bedient, ist demjenigen nahe verwandt, welchen Gauss in der Abhandlung Disquisitiones generales circa superficies curvas angewendet hat, und dürfte hinsichtlich der analytischen Eleganz nichts zu wünschen übrig lassen. Es scheint mir aber, dass sich der in Rede stehende Gegenstand, ohne dass seiner Allgemeinheit in etwas Abbruch geschieht, um einen guten Theil einfacher und anschaulicher behandeln lasse, wenn man statt des Calculs einige geometrische Betrachtungen zu Hülfe nimmt, und insbesondere von einer rein geometrischen Definition eines unendlich dünnen

Digitized by Google

Strahlenbündels ausgeht. Die Darlegung dieser Betrachtungen und die damit zu bewerkstelligende Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel, als mit denen sich der grössere Theil der Kummer'schen Abhandlung beschäftigt, und aus welchen die Eigenschaften ganzer Strahlensysteme ohne weitere Rechnung fliessen, — dies bildet den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes, welcher daher keine neuen Resultate enthält, sondern nur die Form der Darstellung, einige rein geometrische Folgerungen, und etwa noch die Gleichungen (5) und (6) in Artikel 9 und 11 als dem Verfasser gehörig beansprucht.

1. **Soll ein Strahlensystem den ganzen Raum füllen,** und soll dieses nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehen, so muss jeder Punkt des Raumes von einem Strahle des Systems, und — im Allgemeinen wenigstens — nur von einem, getroffen werden, und es müssen alle Strahlen, welche eine beliebig im Raume gezogene stetige Linie p treffen, eine durch die Bewegung einer Geraden erzeugte stetige Fläche bilden. Wird diese Fläche von irgend einer andern Fläche in der Linie p_1 geschnitten, so wird, wenn p eine in sich zurücklaufende sich nicht schneidende Linie ist, auch die Linie p_1 ohne sich zu schneiden in sich zurückkehren, und wenn in diesem Falle alle Sehnen der Linie p unendlich klein sind, so werden es auch alle Sehnen von p_1 sein. Wir können alsdann die Linien p und p_1, wegen ihrer unendlichen Kleinheit, als in zwei Ebenen ε und ε_1 begriffen annehmen, und wenn e und e_1 die von p und p_1 umschlossenen Elementartheile dieser Ebenen bezeichnen, so wird jeder die Fläche e treffende Strahl auch die e_1 schneiden.

Indem wir daher die zwei Durchschnitte eines Strahles mit den Ebenen ε und ε_1 zwei einander entsprechende Punkte von ε und ε_1 nennen, wird jedem Punkte der Curve p ein Punkt der Curve p_1, jedem Punkte der Fläche e ein Punkt der Fläche e_1, und jeder g e r a d l i n i g e n Sehne von p eine g e r a d l i n i g e Sehne von p_1 entsprechen; Letzteres deshalb, weil wir uns diese zwei Sehnen als entsprechende Elementartheile zweier in ε und ε_1 begriffenen und einander entsprechenden Linien denken können, von denen, wenn die Krümmung der einen eine endliche ist, auch die andere im Allgemeinen eine endliche Krümmung haben wird. Von je drei in einer Geraden liegenden Punkten der Fläche e liegen daher auch die drei ihnen in e_1 entsprechenden in einer Geraden, und es entsprechen sich daher die Punkte

Digitized by Google

dieser zwei Flächenelemente nach dem Gesetze der Collineation.

Sie werden sich aber zugleich nach dem Gesetze der engeren Verwandtschaft der Affinität entsprechen, so dass, wenn P, Q, R drei in einer Geraden enthaltene Punkte des einen Flächenelements sind, die drei ihnen entsprechenden Punkte P_1, Q_1, R_1 des andern nicht nur ebenfalls in einer Geraden liegen, sondern dass sich auch $P_1Q_1 : Q_1R_1 = PQ : QR$ verhält (Baryc. Calc. § 149. c.), — weil überhaupt, wenn die Punkte einer Ebene zu denen einer andern Ebene in der Verwandtschaft der Collineation stehen, von je zwei einander entsprechenden Elementartheilen der beiden Ebenen die Punkte des einen Theils und die entsprechenden des andern immer auch zwei affine Systeme von Punkten sind.

2. Der Inbegriff aller derjenigen Strahlen des den ganzen Raum stetig ausfüllenden Systems, welche von der in sich zurücklaufenden Linie p, und damit auch von p_1, umfasst werden, dieses unendlich dünne Bündel von Strahlen ist der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen. Um uns dieselben möglichst zu erleichtern, wollen wir die zwei Ebenen ε und ε_1, in denen p und p_1 enthalten sind, einander parallel annehmen; wir wollen ferner das zwischen den Punkten innerhalb p und denen innerhalb p_1 herrschende Gesetz der Affinität auf die ganzen Ebenen ε und ε_1 ausdehnen, d. h. statt jenes unendlich dünnen Bündels soll das den ganzen Raum füllende System in Untersuchung genommen werden, welches hervorgeht, wenn man die obige Relation zwischen den Ternionen P, Q, R und P_1, Q_1, R_1 im ε und ε_1 nicht bloss in dem Falle bestehend annimmt, wenn die Punkte der einen, und ebenso die der andern Ternion einander unendlich nahe sind, sondern auch dann, wenn diese Punkte in endlichen Entfernungen von einander liegen. Denn es ist von selbst klar, dass alle Eigenschaften eines solchen Systems auch einem unendlich dünnen Bündel zukommen müssen.

Ein Strahlensystem dieser Art ist aber gegeben, wenn nächst den zwei parallelen Ebenen ε und ε_1 die Durchschnitte A, B, C und A_1, B_1, C_1 derselben mit drei Strahlen des Systems gegeben sind, vorausgesetzt, dass weder die erstern, noch die letztern drei Durchschnitte in einer Geraden liegen. Denn um für irgend einen vierten Punkt D der Ebene ε den entsprechenden D_1 in ε_1, und damit den durch D zu legenden Strahl DD_1

Digitized by Google

zu finden, bestimme man den Durchschnitt S der Geraden AD und BC und theile hierauf die Gerade B_1C_1 in S_1 in dem Verhältnisse $B_1S_1 : S_1C_1 = BS : SC$, und die Gerade A_1S_1 in D_1 in dem Verhältnisse $A_1D_1 : D_1S_1 = AD : DS$, wodurch D gefunden ist.

Es verhalten sich hiernach die Dreiecksflächen $ABC : A_1B_1C_1 = BCD : B_1C_1D_1$, und eben so $= CDE : C_1D_1E_1 = DEF : D_1E_1F_1$, wenn E und E_1, F und F_1 noch andere Paare einander entsprechender Punkte in ε und ε_1 sind; und man kann daher das zwischen den Punkten der Ebenen ε und ε_1 stattfinden sollende Gesetz der Affinität auch dadurch ausdrücken, dass je zwei in ε und ε_1 einander entsprechende Dreiecksflächen in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen (Baryc. Calcul, § 145).

3. Eine Haupteigenschaft des jetzt in Betrachtung genommenen Strahlensystems besteht darin, dass von den Strahlen eines solchen auch jede andere mit ε und ε_1 parallele Ebene ε_2 in einem Systeme von Punkten geschnitten wird, welches den Systemen von Punkten in ε und ε_1 affin ist. Es lässt sich dieses sehr leicht mit Hülfe des Satzes der Mechanik darthun, dass der Schwerpunkt zweier sich geradlinig und gleichförmig bewegender schwerer Punkte sich ebenfalls geradlinig und gleichförmig bewegt.

In der That, wenn von drei parallelen Ebenen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ zwei Gerade, die eine in A, A_1, A_2, die andere in B, B_1, B_2 geschnitten werden, so verhält sich $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$, und man kann daher A und B, A_1 und B_1, A_2 und B_2 als drei Paare gleichzeitiger Örter zweier sich geradlinig und gleichförmig bewegender Punkte betrachten. Werden nun AB, A_1B_1, A_2B_2 in C, C_1, C_2 nach gleichen Verhältnissen, $= \beta : \alpha$, getheilt, und denkt man sich die zwei sich bewegenden A und B als schwere Punkte, deren Massen sich wie α und β verhalten, so sind C, C_1, C_2 die Schwerpunkte von A und B, von A_1 und B_1, etc. und liegen zufolge jenes Satzes in einer Geraden; woraus wir weiter schliessen: Liegen A, B, C in einer Geraden der Ebene ε, und A_1, B_1, C_1 in einer Geraden einer mit ε parallelen Ebene ε_1, und verhält sich $A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC$, so liegen auch die Durchschnitte A_2, B_2, C_2 von AA_1, BB_1, CC_1 mit irgend einer andern der ε parallelen Ebene ε_2 in einer Geraden, und es verhält sich $A_2B_2 : B_2C_2 = AB : BC$.

Hieraus aber und mit Anwendung der im Artikel 1 gegebenen Definition der Affinität folgt ohne Weiteres der zu bewei-

Digitized by Google

sende Satz, *dass* nämlich, *wenn zwei der drei Systeme von Punkten, in welchen drei parallele Ebenen von Strahlen geschnitten werden, einander affin sind, diesen zweien auch das dritte affin ist.*

4. Sind a, b, c irgend drei Strahlen des Systems, deren Durchschnitte mit der Ebene ε, die hinführo die Grundebene heissen mag, nicht in einer Geraden liegen, und legt man durch einen beliebigen Punkt Q drei ihnen parallele Strahlen, welche von einer Ebene ζ von veränderlicher, aber stets mit ε paralleler Lage in F, G, H geschnitten werden, so bleibt sich für alle Lagen von ζ das Dreieck FGH ähnlich und behält einerlei Sinn, letzteres auch für je zwei ζ, welche auf entgegengesetzten Seiten von Q liegen. Sind ferner A, B, C die Durchschnitte von a, b, c mit ζ, so ist das Dreieck ABC im Allgemeinen erst für eine unendlich entfernte Lage von ζ dem Dreiecke FGH ähnlich und hat mit diesem auch einerlei Sinn, so dass, wenn wir die zwei von ε zu verschiedenen Seiten unendlich weit entfernten Lagen von ζ mit ζ_u und ζ_v bezeichnen, die zwei in ζ_u und ζ_v begriffenen Dreiecke ABC einerlei Sinnes sind. Indem wir daher die Ebene ζ parallel mit sich aus der Lage ζ_u in die Lage ζ_v fortführen, wird das Dreieck ABC entweder gar nicht, oder eine gerade Zahl mal seinen Sinn wechseln, und damit jedesmal der Werth des Inhalts von ABC durch Null in den entgegengesetzten übergehen. Es werden folglich bei dieser Bewegung von ζ die drei Punkte A, B, C entweder gar nicht, oder eine gerade Zahl mal in eine mit ε parallele Gerade zu liegen kommen. Diese gerade Zahl kann aber nur $= 2$ sein. Denn wären A, B, C bei drei Lagen von ζ in einer Geraden, so müssten sie es bei allen sein. Alle diese Geraden ABC würden nämlich die Fläche eines hyperbolischen Paraboloids bilden, und es würden dann die Durchschnitte von a, b, c mit ε selbst in einer Geraden liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Seien nun zwei Lagen von ζ, die von der besagten Art sind, in der That vorhanden, so dass, wenn wir diese Lagen mit ζ_1 und ζ_2 bezeichnen, die Durchschnitte von a, b, c mit ζ_1 (mit ζ_2) in einer Geraden f_1 (in f_2) liegen. Alsdann wird auch jeder vierte Strahl d des Systems die f_1 und f_2 treffen. Denn heissen $A_1, .., D_1$ die Durchschnitte von $a, .., d$ mit ζ_1, und $A, .. D$ die Durchschnitte derselben Strahlen mit irgend einer andern Lage von ζ, so müssen sich, in Folge der zwischen den Punkten der

Ebene ζ und den entsprechenden Punkten der ζ_1 herrschenden Affinität, die Flächen $ABC:BCD = A_1B_1C_1 : B_1C_1D_1$ verhalten. Es ist aber, der gemachten Annahme zufolge, $A_1B_1C_1 = 0$, mithin auch $B_1C_1D_1 = 0$; folglich u. s. w. Und ebenso ist der Beweis auch hinsichtlich der Geraden f_2 zu führen.

Bei dem in Artikel 2. *angenommenen Strahlensysteme giebt es* demnach *zwei mit der Grundebene* ε, *aber nicht mit einander, parallele, reelle, oder imaginäre gerade Linien, deren jede von jedem Strahle des Systemes geschnitten wird*, und die wir deshalb die zwei Brennlinien des Systems nennen wollen. *Und, umgekehrt, ist jede Gerade, welche diese zwei Linien zugleich trifft, ein Strahl des Systems*, weil durch jeden Punkt des Raumes ein Strahl geht, und weil durch einen gegebenen Punkt stets eine und nur eine Gerade gelegt werden kann, welche zwei gegebenen nicht in einer Ebene enthaltenen und den Punkt nicht treffenden Geraden zugleich begegnet.

Umgekehrt, können wir hieraus noch den an sich nicht uninteressanten Satz folgern: *Ein System von Geraden, deren jede zwei nicht in einer Ebene enthaltene Gerade trifft, schneidet je zwei Ebenen, deren jede mit den zwei Geraden zugleich parallel ist, in zwei affinen Systemen von Punkten.*

5. Mag hier noch die analytische Entwickelung der im vor. Artikel auf rein geometrischem Wege erhaltenen Resultate eine Stelle finden. — Seien O und O', A und A', M und M' die Durchschnitte dreier Strahlen des Systems mit der Ebene ε und einer ihr parallelen Ebene ε'. Man nehme OO' zur Axe der z, ε zur Ebene der x, y, und darin OA und OM zu den Axen der x und der y eines Systems paralleler Coordinaten und setze demzufolge

$$O = (0,0,0)\ ,\ O' = (0,0,c')$$
$$A = (a,0,0)\ ,\ A' = (a+a', b', c')$$
$$M = (0,n,0)\ ,\ M' = (m', n+n', c').$$

Es ergeben sich hiermit die Gleichungen des Strahles AA':

$$\frac{x-a}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'},$$

und die Gleichungen des Strahles MM':

$$\frac{x}{m'} = \frac{y-n}{n'} = \frac{z}{c'}.$$

Bezeichnen folglich O'', A'', M'' die Durchschnitte der drei Strahlen mit einer dritten Ebene ε'', deren Gleichung $z = \gamma c'$ ist,

Digitized by Google

und welche daher gleichfalls mit ε parallel liegt, so hat man
$O''=(0,0,\gamma c')$,

$$A''=(a+\gamma a',\gamma b',\gamma c'),\ M''=(\gamma m',n+\gamma n',\gamma c').$$

Hiermit findet sich, wenn man die Flächen der in $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ begriffenen Dreiecke OAM, $O'A'M'$, $O''A''M''=\frac{1}{2}\Delta,\frac{1}{2}\Delta',\frac{1}{2}\Delta''$ setzt:

$$\Delta=an,\ \Delta'=(a+a')\,(n+n')-b'm',$$
$$\Delta''=(a+\gamma a')\,(n+\gamma n')-\gamma^2 b'm'.$$

Sollen demnach von den drei durch ihre Durchschnitte mit den zwei parallelen Ebenen ε und ε' bestimmten Strahlen die Durchschnitte O'',A'',M'' mit einer andern der ε parallelen Ebene ε'' in einer Geraden liegen, so muss $\Delta''=0$, d. i.

$$an+(an'+a'n)\,\gamma+(a'n'-b'm')\,\gamma^2=0 \text{ sein.}$$

Da diese Gleichung rücksichtlich der Zahl γ, als wodurch die Lage von ε'' bestimmt wird, vom zweiten Grade ist, so giebt es immer zwei solcher Ebenen, wie ε'', die entweder beide reell, oder beide imaginär sind. Heissen nämlich γ_1 und γ_2 die zwei Wurzeln letzterer Gleichung, und macht man in der Axe der z die Abschnitte

$$OO_1=\gamma_1 c'=\gamma_1 . OO',\ \text{und}\ OO_2=\gamma_2 . OO',$$

so werden die Durchschnitte der drei Strahlen mit jeder der zwei durch O_1 und O_2 parallel mit ε zu legenden Ebenen ε_1 und ε_2 in einer Geraden enthalten sein. Es sind dies die zwei im Vorigen mit f_1 und f_2 bezeichneten Brennlinien des Strahlensystems.

6. Aus der jetzt erhaltenen quadratischen Gleichung lässt sich noch ein anderer merkwürdiger Schluss ziehen. Ihr zufolge ist nämlich, wenn man noch $a'n'-b'm'=d$ setzt:

$$\gamma_1\gamma_2=\frac{an}{d}=\frac{\Delta}{d}\ \text{und}\ \gamma_1+\gamma_2=-\frac{an'+a'n}{d}.$$

Es ist aber $an'+a'n=(a+a')(n+n')-an-a'n'$
$=\Delta'+b'm'-\Delta-a'n'=\Delta'-\Delta-d,$

folglich $\gamma_1+\gamma_2=1-\dfrac{\Delta'-\Delta}{d}=1-\dfrac{\Delta'-\Delta}{\Delta}\gamma_1\gamma_2$, d. i.

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)}{\gamma_1\gamma_2}=\frac{O'O_1 . O'O_2}{OO_1 . OO_2},$$

wenn man für γ_1 und γ_2 ihre aus dem Ende des vor. Artikels fliessenden Werthe substituirt.

Wird demnach von drei Strahlen die eine der beiden Brennlinien in O_1, A_1, M_1, die andere in O_2, A_2, M_2, und *irgend eine mit*

Digitized by Google

den zwei Brennlinien parallele Ebene ε in O, A, M geschnitten, so ist die Dreiecksfläche OAM dem Producte $OO_1 . OO_2$, also *dem Producte aus den Abständen der beiden Brennlinien von der Ebene des Dreiecks* (mithin auch dem $AA_1 . AA_2$, sowie dem $MM_1 . MM_2$) *proportional.*

Zusatz. Man kann aus diesem der Geometrie des Raumes angehörigen Satze ohne Mühe einen bemerkenswerthen planimetrischen Satz folgern. Man denke sich nämlich die eben genannten Punkte durch Parallellinien mit O_1O_2 auf eine mit ε parallele Ebene projicirt, so fallen die Projectionen von O, O_1, O_2 in einem Punkte, welcher O sei, zusammen; und wenn man die Projectionen der übrigen Punkte $A, A_1, \ldots, M_2$ mit $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{M}_2$ bezeichnet, so sind $\mathrm{OA_1M_1}$, $\mathrm{OA_2M_2}$, $\mathrm{AA_1A_2}$, $\mathrm{MM_1M_2}$ gerade Linien, es verhalten sich $\mathrm{A_1A : AA_2 = M_1M : MM_2} = A_1A : AA_2 = M_1M : MM_2$, und das Dreieck OAM ist dem Dreiecke OAM gleich und ähnlich. — Dies giebt uns den Satz:

Ist $\mathrm{A_1M_1M_2A_2}$ *ein ebenes Viereck,* O *der gegenseitige Durchschnitt seiner Gegenseiten* $\mathrm{A_1M_1}$ *und* $\mathrm{A_2M_2}$, *und werden die zwei andern Gegenseiten* $\mathrm{A_1A_2}$ *und* $\mathrm{M_1M_2}$ *in* A *und* M *nach einem und demselben beliebigen Verhältnisse getheilt, so ist die Fläche des Dreiecks* OAM *dem Producte* $\mathrm{AA_1 . AA_2}$ *(also auch dem* $\mathrm{MM_1 . MM_2}$*) proportional.*

Es ist nicht schwer diesen planimetrischen Satz für sich zu beweisen, und man sieht von selbst, wie aus ihm umgekehrt der obige stereometrische Satz abgeleitet werden kann. Man wird übrigens bei dieser planimetrischen Untersuchung noch finden, dass die Dreiecksfläche

$$\mathrm{OAM} = \frac{\mathrm{A_1A . AA_2}}{(\mathrm{A_1A_2})^2} (\mathrm{OA_1M_2 + OA_2M_1}) \text{ ist.}$$

7. Der im vor. Artikel erwiesene Satz giebt uns zugleich Aufschluss über den Grad der Dichtigkeit, in welchen die Strahlen des Systems in verschiedenen Entfernungen von den beiden Brennlinien neben einander liegen.

Unter der Annahme, dass je zwei einander nächste Strahlen einander unendlich nahe sind, und dass überdies ihre Durchschnitte mit einer den zwei Brennlinien parallelen Ebene ε gleichmässig darin vertheilt sind, dass also je zwei gleiche Flächentheile g und h dieser Ebene gleichviel Durchschnitte enthalten, werden auch in jeder anderen mit ε parallelen Ebene ε′ die Strahlendurchschnitte mit derselben gleichmässig vertheilt

Digitized by Google

sein. Denn sind g' und h' die Flächen, innerhalb welcher die Ebene ε' von den innerhalb g und h in ε fallenden Strahlen geschnitten wird, so verhält sich, zufolge der zwischen entsprechenden Figuren beider Ebenen stattfindenden Affinität, $g':h'=g:h$, und daher $g'=h'$, weil $g=h$ sein sollte.

Nächstdem ist ersichtlich, dass, bei der gleichmässigen Vertheilung der Durchschnitte in ε für sich und in ε' für sich, die Dichtigkeiten dieser Systeme von Punkten sich umgekehrt wie g und g' verhalten. Hiernach aber, und wenn wir für g die vorhin betrachtete Dreiecksfläche OAM setzen, haben wir zu schliessen, *dass bei einem Systeme einander unendlich naher Strahlen die Dichtigkeit ihrer Durchschnittspunkte mit einer den zwei Brennlinien parallelen Ebene dem Producte aus den Abständen der Brennlinien von dieser Ebene umgekehrt proportional ist.*

In den Brennlinien selbst ist demnach die Dichtigkeit unendlich gross, und unter allen Ebenen, die parallel mit beiden Brennlinien und zwischen ihnen liegen, hat die Mittelebene die kleinste Dichtigkeit. Sind die Brennlinien imaginär, so bleibt ihre Mittelebene nichtsdestoweniger reell, und es kommt ihr dann unter allen ihr parallelen Ebenen überhaupt die grösste Dichtigkeit zu.

Zusatz. Ein unendlich dünnes Strahlenbündel kann nach den verschiedenen Lagen, welche man der Grundebene ε gegen dasselbe giebt, auf unendlich viele Arten nach der in Artikel 2. bemerkten Weise zu einem den ganzen Raum füllenden Strahlensysteme erweitert werden. Wie aber auch die Ebene ε gelegt worden sein mag, so werden sich doch immer für die Örter, in denen das unendlich dünne Bündel von den mit ε parallelen Brennlinien und der damit gleichfalls parallelen Mittelebene getroffen wird, stets dieselben Stellen finden, indem an diesen Stellen die Dichtigkeit des Bündels ein Maximum oder ein Minimum ist.

---

8. Wir wollen jetzt von zwei Strahlen des wieder zu einem System erweitert gedachten unendlich dünnen Bündels ihren kleinsten gegenseitigen Abstand und die Lage dieser Abstandslinie zu bestimmen suchen. Zu dem Ende beziehen wir das System auf drei rechtwinklig coordinirte Axen der x, y, z, von denen die Axe der z der eine jener zwei Strahlen selbst sei.

Digitized by Google

Die auf z normale Ebene der x, y lassen wir die Grundebene ε sein und legen dieselbe durch den Mittelpunkt O der Punkte O_1 und O_2, in denen die Axe der z, also ein Strahl des Systems, von den zwei Brennlinien f_1 und f_2 getroffen wird. Bezeichnet man endlich die sich in O schneidenden rechtwinkligen Projectionen von f_1 und f_2 auf ε, als die Ebene der x, y, mit g_1 und g_2, so werde, nach Vorausbestimmung der positiven Richtungen von f_1 und f_2 und damit auch von den ihnen parallelen g_1 und g_2, zur Axe der x die den Winkel $g_1{}^\wedge g_2$ halbirende Gerade genommen. Die Lage von f_1 und f_2 gegen das Axensystem wird alsdann durch die Linie $OO_1 = -OO_2, = c$, und durch den Winkel $x^\wedge g_1 = x^\wedge f_1 = -x^\wedge f_2, = \vartheta$, bestimmt sein.

Sind nun L_1 und L_2 die zwei Durchschnitte irgend eines Strahls l des Systems mit f_1 und f_2, und setzt man noch $O_1L_1 = r_1$ und $O_2L_2 = r_2$, so hat man

$$L_1 = (r_1 \cos\vartheta, r_1 \sin\vartheta, c),\quad L_2 = (r_2 \cos\vartheta, -r_2 \sin\vartheta, -c),$$

und es verhält sich für jeden andern Punkt (x, y, z) von l:

$$\begin{aligned} &x - r_1 \cos\vartheta : y - r_1 \sin\vartheta : z - c \\ &= (r_1 - r_2)\cos\vartheta : (r_1 + r_2)\sin\vartheta : 2c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen von l sind folglich

$$\frac{x - r_1 \cos\vartheta}{(r_1 - r_2)\cos\vartheta} = \frac{y - r_1 \sin\vartheta}{(r_1 + r_2)\sin\vartheta} = \frac{z - c}{2c} \text{ oder}$$

$$\frac{2x - (r_1 + r_2)\cos\vartheta}{(r_1 - r_2)\cos\vartheta} = \frac{2y - (r_1 - r_2)\sin\vartheta}{(r_1 + r_2)\sin\vartheta} = \frac{z}{c}.$$

Sie gestalten sich noch einfacher, wenn man, $z = 0$ setzend, die Coordinaten des Durchschnitts von l mit der Ebene der x, y bestimmt und diese Coordinaten, welche p und q heissen, statt r_1 und r_2 in den Gleichungen einführt. Man erhält auf solche Weise

$$2p = (r_1 + r_2)\cos\vartheta,\quad 2q = (r_1 - r_2)\sin\vartheta,$$

und damit die Gleichungen für l

$$\frac{x - p}{q}\operatorname{tang}\vartheta = \frac{y - q}{p}\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{z}{c}.$$

Man bemerke hierzu noch, dass, wenn die zwei Brennlinien imaginär sind (Art. 4), es auch die zwei ihre Lage bestimmenden Grössen c und ϑ sind, dass aber, damit auch in diesem Falle die zwei Gleichungen eines Strahles ihre Realität behalten, die Werthe von $c \operatorname{tang}\vartheta$ und $c \operatorname{cotg}\vartheta$ reell sein, und folglich c sowohl, als $\operatorname{tang}\vartheta$, von der Form $m\sqrt{-1}$ sein müssen. — Die

Digitized by Google

allgemeinen Gleichungen eines Strahles lassen sich daher immer unter der Form

$$a\frac{x-p}{q}=b\frac{y-q}{p}=z$$

darstellen, worin p und q von einem Strahle zum andern eines und desselben Systems, a und b aber erst von einem Systeme zum andern ihre Werthe ändern. Dabei sind die zwei Brennlinien reell oder imaginär, jenachdem a und b ($=c\operatorname{tang}\vartheta$ und $c\cot g\vartheta$) einerlei oder verschiedene Zeichen haben.

9. Um nun den kürzesten Abstand des Strahles l von dem Hauptstrahle oder der Axe der z zu bestimmen, projicire man l rechtwinklig auf die Ebene der x, y oder die Grundebene, fälle von O auf diese Projection das Perpendikel OP, und wenn Q der Punkt ist, in welchem das in P auf der Grundebene errichtete Perpendikel den Strahl l schneidet, so mache man in der Axe der z den Abschnitt $OR=PQ$. Hiernach ist $OPQR$ ein Rechteck, R und Q sind die einander nächsten Punkte des Hauptstrahls und des l, also der kürzeste Abstand beider $=RQ=OP$, und die Entfernung dieser mit der Grundebene parallelen Abstandslinie RQ von letzterer Ebene $=PQ=OR$.

Nun ist (vor. Artikel) die Gleichung der Projection von l, $ap(x-p)=bq(y-q)$, oder wenn man zur Abkürzung

(1) .. $bq:ap=-t$ setzt, (2) .. $x-p=-t(y-q)$,

und daher die Gleichung des von O auf diese Projection gefällten Perpendikels OP:

$$(3)\;..\; y=tx.$$

Aus (2) und (3) ergeben sich aber die Coordinaten des Fusspunktes P dieses Perpendikels

$$(4)\;..\; x=\frac{p+qt}{1+t^2},\; y=\frac{t(p+qt)}{1+t^2},$$

und hieraus das Quadrat des kleinsten Abstandes des Strahles l vom Hauptstrahle, $=OP^2=x^2+y^2$

$$=(p+qt)^2:(1+t^2).$$

Die Entfernung PQ dieses kleinsten Abstandes von der Grundebene findet sich, wenn man in der Gleichung des vor. Artikels, $z=a(x-p):q$, für x seinen Werth aus (4) setzt; und es ist daher $z=$

$$PQ=at(q-pt):q(1+t^2),$$

und wenn man hieraus mittelst (1) das Verhältniss $p:q$ eliminirt:

$$PQ=(a+b)t:(1+t^2).$$

Digitized by Google

Zufolge (3) ist aber $t=$ der Tangente des Artikels, den das auf die Projection des Strahles l gefällte Perpendikel OP mit der Grundlinie, d. i. mit der Axe der x, bildet. Bezeichnet man daher diesen Winkel mit λ und setzt demnach $t=\tang\lambda$, so wird

$$(5) \,.\,.\; PQ = OR = \tfrac{1}{2}(a+b)\sin 2\lambda.$$

Wir ersehen aus dieser einfachen Formel, 1) *dass für alle Strahlen des Systems, deren Projectionen auf die Grundebene einander parallel sind, und für welche daher der Winkel λ von constanter Grösse ist, auch die Entfernungen der kürzesten Abstandslinien QR von der Grundebene einander gleich sind;* 2) *dass diese Entfernungen von der einen, sowie von der andern Seite der Grundebene die Grenze $\frac{1}{2}(a+b)$ nicht überschreiten;* 3) *dass diese Grenzwerthe von PQ oder OR bei denjenigen Strahlen statt finden, für welche $\lambda = \pm 45^\circ$ ist, d. h. deren Projectionen mit der Grundlinie auf der einen oder andern Seite der letztern einen halben rechten Winkel machen, und dass daher von zwei zu der einen und andern Grenze gehörigen Strahlen die Projectionen sich rechtwinklig schneiden und damit zugleich symmetrisch gegen die Projectionen der zwei Brennlinien liegen;* 4) *dass von zwei Strahlen überhaupt, deren Projectionen, also auch die auf diese gefällten Perpendikel OP, sich rechtwinklig schneiden, die den Strahlen zugehörigen Entfernungen der kleinsten Abstände von der Grundebene einander entgegengesetzt gleich sind.*

10. Aus der Gleichung (5) des vor. Artikels kann man ohne Mühe noch die von Hamilton aufgestellte Formel $r = r_1 \cos\omega^2 + r_2 \sin\omega^2$ (Kummer S. 199, [16]) ableiten. — Man setze

$$\lambda = 45^\circ + \omega \text{ und } \tfrac{1}{2}(a+b) = m,$$

so geht (5) über in $OR = m\cos 2\omega$. Statt dessen kann man auch schreiben:

$$n + OR = (n+m)\cos\omega^2 + (n-m)\sin\omega^2,$$

wo n eine willkührliche Länge ist. Macht man nun im Hauptstrahle die Linien $SO = n$ und $OR_1 = R_2O = m$, so wird letztere Gleichung

$$(\text{H}) \,.\,.\; SR = SR_1 \cos\omega^2 + SR_2 \sin\omega^2,$$

welches die Hamilton'sche Formel ist. Hierin sind S, R, R_1, R_2 Punkte des Hauptstrahls, und zwar S ein willkührlicher; R ist der dem Strahle l am nächsten liegende; R_1 und R_2 aber sind die Grenzpunkte, zwischen denen R stets enthalten ist.

Sind ferner, sowie der Strahl l dem Punkte R zugehört, l_1 und l_2 den Punkten R_1 und R_2 zugehörige Strahlen, und be-

Digitized by Google

zeichnen l', l'_1, l'_2 die Projectionen dieser Strahlen auf die Grundebene, so ist $x^\wedge OP = \lambda$ (vor. Artikel) und $OP^\wedge l' = 90°$, folglich $x\,l' = 90° + \lambda$, und

$$\omega = \lambda - 45° = x\,l' - 135°.$$

Für $\omega = 0°$ coincidirt aber, nach (H), der Punkt R mit R_1 und folglich l' mit l'_1, und es ist daher

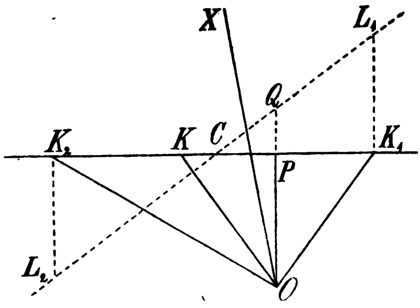
$$0° = x\,l'_1 - 135°;\ \text{folglich}\ \omega = x\,l' - x\,l'_1 = l'_1\,l',$$

d. h. in der Hamilton'schen Formel ist der Winkel $\omega =$ der Projection des von den Strahlen l_1 und l gebildeten Winkels auf die Grundebene.

11. Eine bemerkenswerthe Form erhält noch die Gleichung (5), wenn man in ihr, unter der Voraussetzung, dass die zwei Brennlinien f_1 und f_2 reell sind, für a und b resp. $c.\tan\vartheta$ und $c.\cot\vartheta$ (Artikel 8. zu Ende) setzt. Denn es findet sich hiermit:

$$(6)\quad PQ = OR = c.\sin 2\lambda : \sin 2\vartheta.$$

Ohne, wie vorhin, von der Gleichung des Strahles l auszugehen, kann man zu dieser Gleichung auch durch folgende einfache Construction gelangen. Sind, wie in Artikel 8, L_1, L_2 die Durchschnitte von l mit f_1, f_2, und nennt man K_1, K_2 die Projectionen von L_1, L_2 auf die Grundebene, und C den Durchschnitt von l mit letzterer, so liegen L_1, C, L_2 und Q, desgleichen K_1, C, K_2 und P in gerader Linie, und es sind K_1L_1, K_2L_2, PQ, als Perpendikel auf der Grundebene, mit einander parallel. Mithin verhalten sich



$$K_1L_1 : K_2L_2 : PQ = CK_1 : CK_2 : CP.$$

Es ist aber $K_1L_1 = L_2K_2 = OO_1 = O_2O = c$ (Artikel 8.); folglich ist C der Mittelpunkt von K_1K_2 (sowie von L_1L_2), und man hat

$$PQ = OR = c.\,CP : CK_1.$$

Nächstdem sind OK_1, OK_2, K_1K_2 die Projectionen von f_1, f_2, l auf die Grundebene, und P der Fusspunkt des von O auf K_1K_2 gefällten Perpendikels.

Man mache noch in K_1K_2 den Abschnitt $PK = K_1P$, so ist P der Mittelpunkt von K_1K, sowie es C von K_2K_1 war. Man hat

Digitized by Google

daher $K_2 K = 2.CP$, sowie $K_2 K_1 = 2.CK_1$, und die vorige Gleichung wird damit

$$PQ = c.K_2 K : K_2 K_1.$$

Nun verhält sich $K_2 K : KO = \sin K_2 OK : \sin K K_2 O$
und $K_1 O : K_2 K_1 = \sin K_1 K_2 O : \sin K_2 O K_1$,
folglich, weil $K_1 O = KO$ ist:

$$K_2 K : K_2 K_1 = \sin K_2 OK : \sin K_2 O K_1,$$

$= \sin 2.XOP : \sin 2 XOK_1$, wo OX die den Winkel $K_2 OK_1$ halbirende Axe der x ist. Denn da gleichzeitig der Winkel KOK_1 von OP halbirt wird, so ist $K_2 OK = 2.XOP$.

Weil endlich OK_1 die Projection der Brennlinie f_1 auf die ihr parallele Grundebene ist, so wird letzteres Verhältniss $= \sin 2.x^{\wedge}OP : \sin 2.x^{\wedge}f_1 = \sin 2\lambda : \sin 2\vartheta$; folglich u. s. w.

Übrigens folgt noch aus (6), dass bei dem durch c und ϑ gegebenen Strahlensysteme der grösstmögliche Werth von $PQ, = OR, = c : \sin 2\vartheta$ ist. *Die grösstmögliche Entfernung der kürzesten Abstandslinie eines Strahls von der Grundebene ist daher niemals kleiner als die Entfernung der Brennlinien von der Grundebene*, so dass von den zwei Linien $R_1 R_2$ (vor. Artikel) und $O_1 O_2$, welche, im Hauptstrahle begriffen, den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O haben, — dafern nicht (für $\vartheta = 45°$) die eine mit der andern zusammenfällt, — die Linie $R_1 R_2$ stets die grössere ist.

12. Schlüsslich wollen wir noch ein unendlich dünnes Bündel in Betracht ziehen, dessen Strahlen Normalen einer krummen Fläche sind. — Ein Punkt O des unendlich kleinen Theils der Fläche, dessen Normalen das Bündel ausmachen sollen, werde zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen. Die Axe der z dieses Systems sei die durch O zu legende Normale, und daher die Ebene der x, y die Berührungsebene der Fläche im Punkte O. Für jeden dem O unendlich nahen Punkt $(x' y', z')$ der Fläche ist alsdann $z' = .\,x'^2 + .\,x'y' + .\,y'^2$, — eine Gleichung die sich, durch gehörige Drehung des rechten Winkels $x^{\wedge}y$ in seiner Ebene um den Punkt O, im Allgemeinen auf die einfachere Form

$$(M) \ldots z' = \frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} \text{ bringen lässt.}$$

Es folgt hieraus $\frac{dz'}{dx'} = 2\frac{x'}{a}$, $\frac{dz'}{dy'} = 2\frac{y'}{b}$, und die allgemeinen Gleichungen für die Normale einer Fläche im Punkte (x', y', z') der Fläche:

Digitized by Google

$$\frac{x-x'}{z-z'} + \frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{y-y'}{z-z'} + \frac{dz'}{dy'} = 0,$$

reduciren sich dadurch, und wenn z', als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung gegen das im Allgemeinen endliche z weggelassen wird, auf

$$a(x-x') + 2x'z = 0, \quad b(y-y') + 2y'z = 0.$$

Hierin das einemal $x = 0$, und das anderemal $y = 0$ gesetzt, erhält man $z = \frac{1}{2}a$, und $z = \frac{1}{2}b$. Es sind aber $x = 0$ und $z = \frac{1}{2}a$ die Gleichungen einer Geraden, sie heisse f_1, welche, durch den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2}a)$, $= O_1$, gehend, mit der Axe der y parallel läuft, und ebenso wird durch $y = 0$ und $z = \frac{1}{2}b$ eine zweite Gerade f_2 ausgedrückt, welche durch den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2}b)$, $= O_2$, geht und mit der Axe der x parallel ist. Jede dem O unendlich nahe Normale der Fläche wird folglich die Geraden f_1 und f_2 treffen, und man wird daher für jeden dem O unendlich nahen Punkt die Normale erhalten, wenn man durch ihn eine die f_1 und f_2 zugleich treffende Gerade legt. Alle diese Normalen bilden folglich ein unendlich dünnes Strahlenbündel, von welchem die Axe der z der Hauptstrahl, und die Linien f_1 und f_2, welche, als Parallelen mit den Axen der y und der x, einen rechten Winkel mit einander bilden, die zwei Brennlinien sind.

Folgerungen. a. Da die zwei Constanten a und b von einander unabhängig sind, so wird auch umgekehrt jedes unendlich dünne Strahlenbündel, dessen zwei Brennlinien reell und in rechtwinkliger Lage gegen einander sind, sich als ein System von Normalen eines unendlich kleinen Theils einer krummen Fläche betrachten lassen.

b. Ist ein solches Bündel gegeben, so kann durch jeden Punkt O seines Hauptstrahls eine Fläche gelegt werden, von welcher die Strahlen des Bündels die Normalen sind. Zufolge der Gleichung (M) ist die Krümmung dieser Fläche in unmittelbarer Nähe von O entweder eine elliptische, oder eine hyperbolische, jenachdem die Constanten a und b, $= 2\,OO_1$ und $2\,OO_2$, einerlei, oder verschiedene Zeichen haben, jenachdem also der Hauptstrahl von der Fläche entweder ausserhalb, oder zwischen den beiden Brennlinien getroffen wird.

c. Für diejenige Curve, in welcher die Fläche von der Ebene der x, z geschnitten wird, ist $y' = 0$, und die zwei Gleichungen der Normale, welche in irgend einem, dem O unendlich nahen

Punkte dieser Curve auf der Fläche errichtet wird, sind daher

$$a(x-x')+2x'z=0\ ,\ y=0.$$

Diese Normale trifft folglich die Axe der z im Punkte $(0,0,\frac{1}{2}a)$, $=O_1$, d. h. O_1 ist der Mittelpunkt der Krümmung jener Curve im Punkte O; und ebenso zeigt sich, dass in demselben Punkte O die Durchschnittscurve der Fläche mit der Ebene der y,z den Punkt O_2 zum Mittelpunkte der Krümmung hat.

Übrigens haben die Krümmungshalbmesser OO_1 und OO_2 dieser zwei Curven unter den dem Punkte O zugehörigen Krümmungshalbmessern aller Durchschnittscurven der Fläche mit Ebenen, die durch die Axe der z gelegt werden, den grössten oder kleinsten Werth, — ebenso wie von dem durch (M) für einen constanten Werth von z' ausgedrückten Kegelschnitte unter allen Durchmessern desselben die zwei in die Axen der x und der y fallenden am grössten oder am kleinsten sind.

d. Endlich bemerke man noch, dass bei dem von den Normalen einer Fläche gebildeten Strahlensysteme für zwei solche Strahlen, deren kürzeste Abstände vom Hauptstrahle von der einen und andern Seite der Grundebene am weitesten entfernt sind, diese Abstandslinien in die zwei Brennlinien f_1 und f_2 fallen.

Denn in Bezug auf das in Artikel 8. angenommene Coordinatensystem ist jetzt $\vartheta=45°$, und die Gleichungen für f_1 und f_2 sind daher

$$(n)\ \ldots\ z=c\ ,\ y=x \text{ und } z=-c\ ,\ y=-x.$$

Andererseits sind die Gleichungen der kürzesten Abstandslinie eines Strahls

$$z=c\sin 2\lambda : \sin 2\vartheta\ ,\ y=x\tang\lambda\,;$$

und diese reduciren sich für die zwei Abstandslinien, welche am weitesten von der Grundebene entfernt sind, wo also $\lambda=\pm 45°$ ist, und für den jetzigen Werth von ϑ, $=45°$, auf die zwei vorigen Paare von Gleichungen (n).

Digitized by Google

Herm. Hankel, *Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche.* Vorgelegt von *W. Scheibner.*

Mittels eines eleganten von Jacobi herrührenden Principes hat Heine die Transformation einer nach aufsteigenden Potenzen einer Variabelen geordneten Reihe in einen Kettenbruch, dessen Partialzähler jene Variabele linear enthalten, dessen Partialnenner Constanten sind, auf eine rationelle Weise ausgeführt. Es verdient vielleicht bemerkt zu werden, dass sich dasselbe Princip nicht minder fruchtbar erweist, wenn es sich um die Transformation einer nach absteigenden Potenzen einer Variabelen fortschreitenden Reihe in einen Kettenbruch handelt, dessen Partialzähler Constanten, dessen Partialnenner lineare Functionen jener Variabelen sind.

In der That, sei

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots$$

in einen Kettenbruch:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \cfrac{1}{a_1 x + b_1 - \cfrac{1}{a_2 x + b_2 - \cfrac{1}{a_3 x + b_3 - \cdots}}}$$

zu transformiren und bezeichne $p_n : q_n$ den $n$ten Näherungswerth dieses Kettenbruches, so überzeugt man sich leicht, dass p_{n+1} und q_n rationale ganze Functionen vom $n$ten Grade in x sind, also:

$$q_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \cdots + c_n^{(n)} x^n \tag{1}$$

Man weiss, dass:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \cdots$$

ist, woraus man:

$$q_n \frac{\varphi_1}{\varphi} - p_n = \frac{1}{q_{n+1}} + q_n \left(\frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \cdots \right) \tag{2}$$

findet; die linke Seite hievon ist:

Digitized by Google

$$(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x + \cdot\cdot + c_n^{(n)}x^n)\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \cdot\cdot\right) - p_n$$

Die rechte kann nach absteigenden Potenzen von x entwickelt werden und fängt, da q_{n+1} von $(n+1)$ten Grade ist, mit $\frac{1}{x^{n+1}}$ an. Es verschwinden somit auf der linken Seite die Coefficienten von $x^0, x^1, \cdots x^{n-1}$, die zur Bestimmung der Coefficienten in p_n hinreichen, sobald man die Coefficienten in q_n gefunden hat, die sich durch das Verschwinden der Coefficienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots \frac{1}{x^n}$ bis auf einen constanten Factor bestimmen. Man erhält nämlich durch diese Bemerkung die n homogenen Gleichungen:

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{l} c_0^{(n)}s_0 + c_1^{(n)}s_1 + \cdots + c_n^{(n)}s_n = 0 \\ c_0^{(n)}s_1 + c_1^{(n)}s_2 + \cdots + c_n^{(n)}s_{n+1} = 0 \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ c_0^{(n)}s_{n-1} + c_1^{(n)}s_n + \cdots + c_n^{(n)}s_{2n-1} = 0 \end{array}\right\}$$

Man findet daher sehr leicht, wenn man:

$$c_n^{(n)} = \varpi_n \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{n-1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_{n-1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

setzt:

$$q_n = \varpi_n \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_{n-1} & \cdots & s_{2n-1} \\ 1 & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

Um ϖ_n zu finden, nehmen wir auf die beiderseitigen Coefficienten von $\frac{1}{x^{n+1}}$ in der obigen Gleichung (2) Rücksicht, wodurch man erhält:

$$(4)\qquad c_0^{(n)}s_n + c_1^{(n)}s_{n+1} \cdots + c_n^{(n)}s_{2n} = \frac{1}{c_{n+1}^{(n+1)}}$$

und hieraus durch Zusammenstellung mit (3):

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_n & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}^2 \varpi_n \varpi_{n+1} = 1$$

aus welcher Gleichung man ϖ_n bestimmen kann, sobald ϖ_1 durch ein directes Verfahren gefunden ist.

Digitized by Google

Man gelangt auf Grund dieser Betrachtungen mit überraschender Kürze zur directen Bestimmung der Sturm'schen Function in der eleganten Form, wie sie Joachimsthal gegeben hat.

Nimmt man nämlich für φ eine ganze Function von x $m$ten Grades $\varphi = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)$, für φ_1 den Differentialquotienten dieser Function, so werden $s_0, s_1, \cdots$ die Potenzsummen der Wurzeln dieser Gleichungen unmittelbar darstellen. Entwickelt man nun $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ in einen Kettenbruch mittels des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= (a_1 x + b_1)\varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 &= (a_2 x + b_2)\varphi_2 - \varphi_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{m-1} &= (a_m x + b_m)\varphi_m \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

so sind $\varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_m$ die Functionen, die von Sturm zur Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln von $\varphi = 0$ zwischen gegebenen Grenzen benutzt worden sind. Um diese durch die Potenzsummen der Wurzeln darzustellen, bemerken wir, dass nach einem bekannten Satze von Euler:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = q_n \frac{\varphi_1}{\varphi} - p_n$$

ist; auf der rechten Seite fängt die Entwickelung erst mit $\frac{1}{x^{n+1}}$ an und geht nach absteigenden Potenzen fort und zwar hat man:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_0^{(n)} s_{n+k} + c_1^{(n)} s_{n+k+1} + \cdots + c_n^{(n)} s_{2n+k} \right\} \frac{1}{x^{n+k+1}}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sigma_k = \frac{\alpha_1^k}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^k}{x-\alpha_m}$$

wo nun σ_k eine symmetrische Function der Wurzeln $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ ist, also rational in x und die Coefficienten in φ ausgedrückt werden kann, so findet man:

$$x^n \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = c_0^{(n)} \sigma_n + c_1^{(n)} \sigma_{n+1} + \cdots + c_n^{(n)} \sigma_{2n}$$

Mit dem Systeme (3) vereinigt, folgt hieraus:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi} = \frac{\overline{\omega}_n}{x^n} \begin{vmatrix} s_0 & \cdot\ \cdot & s_{n-1} & \sigma_n \\ s_1 & \cdot\ \cdot & s_n & \sigma_{n+1} \\ & \cdot & \cdot\ \cdot & \\ s_n & \cdot\ \cdot & s_{2n-1} & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante lässt sich leicht in eine orthosymmetrische*) transformiren. Man findet nämlich:

$$\begin{vmatrix} \sigma_0 & \cdots & \sigma_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 - \frac{\sigma_1}{x}, & \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{x}, & \cdots & \sigma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_n - \frac{\sigma_{n+1}}{x}, & \sigma_{n+1} - \frac{\sigma_{n+2}}{x}, & \cdots & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

und, da $\sigma_k - \frac{\sigma_{k+1}}{x} = \frac{s_k}{x}$ ist:

$$= \begin{vmatrix} \frac{s_0}{x}, & \frac{s_1}{x}, & \cdots & \sigma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{s_n}{x}, & \frac{s_{n+1}}{x}, & \cdots & \sigma_{2n} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^n} \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{n-1} & \sigma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ s_n & \cdots & s_{2n-1} & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

so dass man:

$$\varphi_{n+1} = \varpi_n \varphi \begin{vmatrix} \sigma_0 & \cdots & \sigma_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n} \end{vmatrix}$$

erhält und dies ist das schöne Resultat der Umformung des Sylvester'schen Summenausdruckes der Sturm'schen Function in eine orthosymmetrische Determinante.

Um den Factor ϖ_n zu bestimmen gehen wir von dem Werthe $\varpi_1 = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{s_0^2}$ aus, der sehr leicht zu finden ist. Setzen wir dann:

$$\begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_n \\ \\ s_n & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix} = S_n$$

so finden wir aus der obigen Gleichung (5):

$$\varpi_{2n} = \left(\frac{S_0 S_2 \,.\,.\, S_{2n-2}}{S_1 S_3 \,.\,.\, S_{2n-1}}\right)^2$$

$$\varpi_{2n+1} = \left(\frac{S_1 S_3 \,.\,.\, S_{2n-1}}{S_0 S_2 \,.\,.\, S_{2n}}\right)^2$$

was mit den bekannten Resultaten übereinstimmt.

Eine andere Anwendung der obigen Betrachtungen lässt sich auf die Auflösung des Gleichungssystems machen:

$$\begin{matrix} a_1 & + a_2 & + \cdots + a_m & = s_0 \\ a_1\alpha_1 & + a_2\alpha_2 & + \cdots + a_m\alpha_m & = s_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1\alpha_1^{2m-1} & + a_2\alpha_2^{2m-1} & + \cdots + a_m\alpha_m^{2m-1} & = s_{2m-1} \end{matrix}$$

---

*) Vergl. meine Inauguraldissertation: Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten. Leipzig. 1861.

Digitized by Google

die schon von Lagrange gegeben ist. Es sind hierin $s_1, s_2, \cdots s_{2m}$ gegebene Grössen, $a_1, \cdots a_m$ sowie $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ die unbekannten.

Wir gehen mit Scheibner*) von der Gleichung:

$$\frac{a_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{a_m}{x-\alpha_m} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \cdots$$

aus und entwickeln die rechte Seite derselben in einen Kettenbruch von der Form (6). Dann lässt sich q_n aus dem System (3) bis auf einen Factor bestimmen. Hat man auf diese Weise q_m gefunden, so braucht man nur die Wurzeln von $q_m = 0$ nach x zu ermitteln, um die m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ zu erhalten. Um die Grössen $a_1, a_2, \cdots a_m$ ebenfalls zu finden, bemerkt man, dass a_n der Coefficient von $\frac{1}{x-\alpha_n}$ in der Zerlegung von $\frac{p_m}{q_m}$ in Partialbrüche ist, sodass wir:

$$a_n = \left(\frac{p_m}{q'_m}\right)_{x=\alpha_n}$$

setzen können; da nun

$$p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1} = 1$$

ist, und für $x = \alpha_n$, q_m verschwindet, so ist $p_m q_{m-1} = 1$ und somit:

$$a_n = \left(\frac{1}{q_{m-1} q'_m}\right)_{x=\alpha_n}$$

Es kommt also alles auf die Darstellung von q_n an. In dem speciellen Falle:

$$\frac{s_{p+1}}{s_p} = \frac{\lambda+p+1}{\mu+p+1}$$

ergibt sich die Auflösung des Gleichungssystemes (3) mit Leichtigkeit:

$$c_p^{(n)} = (-1)^p c_0^{(n)} \frac{n(n-1) \,..\, (n-p+1)}{1 \cdot 2 \,..\, p} \frac{(\mu+n) \,..\, (\mu+n+p-1)}{(\lambda+1) \,..\, (\lambda+p)}$$

so dass man:

$$q_n = c_0^{(n)} F(-n, \mu+n, \lambda+1, x)$$

hat, wo F die Gauss'sche hypergeometrische Reihe bezeichnet. Es sind nun die α die m Wurzeln der Gleichung:

$$F(-m, \mu+m, \lambda+1, x) = 0$$

Man hat für $x = \alpha_n$

$$q_{m-1} = c_0^{(m-1)} F(1-m, \mu+m-1, \lambda+1, \alpha_n)$$

$$q'_m = -c_0^{(m)} \frac{m(\mu+m)}{\lambda+1} F(1-m, \mu+m+1, \lambda+2, \alpha_n)$$

*) S. diese Berichte 1856. pag. 65 u. ff.

Digitized by Google

und es besteht zwischen diesen beiden hypergeometrischen Reihen und

$$F(-m,\ \mu+m,\ \lambda+1,\ \alpha_n) = 0$$

eine lineare Relation:

$$F(1-m,\ \mu+m-1,\ \lambda+1,\ \alpha_n) = \alpha_n(1-\alpha_n)\,\frac{(\mu+2m-1)\ (\mu+m)}{(\mu+m-\lambda-1)\ (\lambda+1)} \times$$
$$\times\ F(1-m,\ \mu+m+1,\ \lambda+2,\ \alpha_n)$$

so dass man erhält:

$$a_n = -\frac{m}{\alpha_n(1-\alpha_n)}\,\frac{\mu+m-\lambda-1}{\mu+2m-1}\,\frac{1}{c_0^{(m)}c_0^{(m-1)}}\,A_n^2$$

wo

$$A_n = \frac{\lambda+1}{m(\mu+m)}\,\frac{1}{F(1-m,\ \mu+m+1,\ \lambda+2,\ \alpha_n)}$$

zu setzen ist. Um den Werth von $c_0^{(m)}c_0^{(m-1)}$ zu finden, setzen wir den gegebenen Werth von $c_p^{(n)}$ in (4) ein und erhalten daraus mittels einer von J. F. Pfaff für die Summation einer speciellen hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung gegebenen Formel:

$$c_0^{(n)}c_0^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\frac{1}{s_0}\,\frac{(\lambda+1)\ \ldots(\lambda+n+1)}{(\lambda-n-\mu+1)\ldots\ (\lambda-\mu)}\,\frac{(\mu+n)\ldots\ \ (\mu+1)}{1\cdot 2\ \ldots n(\mu+2n+1)}$$

Das schliessliche Resultat ist somit:

$$a_n = \frac{\mu s_0}{\alpha_n(1-\alpha_n)}\,\frac{1\cdot 2\ \ldots\ m}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)}\,\frac{(\mu-\lambda)\ \ldots\ (\mu-\lambda+m-1)}{(\lambda+1)\ \ldots\ \ (\lambda+m)}\,A_n^2$$

übereinstimmend mit dem von Scheibner a. a. O. gegebenen.

Berlin, December 1861.

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 1. JULI 1862.

O. Schlömilch. *Ueber die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung.*

Was man von der Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung weiss, beschränkt sich heute noch auf den bereits von Legendre gefundenen Satz, dass der Inhalt eines von vier Krümmungslinien begrenzten Flächenstückes durch elliptische Integrale ausgedrückt werden kann. Abgesehen von dem sehr speciellen Falle, wo es sich um den Octanten des Ellipsoides handelt, sind aber die betreffenden Formeln ziemlich verwickelt wenn die angedeutete Reduction vollständig ausgeführt wird, und es liegt hierin jedenfalls der Grund, wesshalb man noch keinen Satz kennt, der als das stereometrische Seitenstück zum Fagnano'schen Theoreme anzusehen wäre. Unter diesen Umständen ist es wohl nicht überflüssig wenn ich im Folgenden zeige, dass sich auf jeder centrischen Fläche zweiter Ordnung unendlich viel Zonen oder Kappen construiren lassen, deren Inhalte durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrückbar sind, so wie ferner, dass Zonen und Kappen angegeben werden können, deren Inhaltsdifferenzen algebraische Werthe haben.

Die Gleichungen der drei aus den Halbachsen a, b, c construirten centrischen Flächen zweiter Ordnung mögen sein

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

wofür in den Fällen, wo keine Unterscheidung nöthig ist, einfacher

Digitized by Google

$$(1)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

geschrieben werden soll. Zur Abkürzung sei ferner

$$(2)\qquad \alpha=\sqrt{1-\frac{A}{C}},\quad \beta=\sqrt{1-\frac{B}{C}},$$

sodass α und β die numerischen Excentricitäten der Hauptschnitte in den Ebenen xz und yz bedeuten. Um jederzeit reelle α und β sowie $\alpha>\beta$ zu erhalten, ist bei dem Ellipsoide $a>b>c$, bei den Hyperboloiden $a<b$ vorauszusetzen.

In der Horizontalebene xy mögen nun zwei concentrische Ellipsen construirt sein, die eine mit den Halbachsen a_0 und b_0, die andere mit den Halbachsen $a_1>a_0$ und $b_1>b_0$; die zwischen beiden Ellipsen liegende ringförmige Fläche denken wir uns als Horizontalprojection einer Zone der Fläche zweiter Ordnung und nennen Z den Inhalt jener Zone. Nach diesen Bestimmungen ist

$$\tfrac{1}{4}Z=\iint\sqrt{\frac{1-A\alpha^2x^2-B\beta^2y^2}{1-Ax^2-By^2}}\,dx\,dy,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven x und y beziehen, welche den Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2+\left(\frac{y}{b_0}\right)^2\geqq 1,\quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{y}{b_1}\right)^2\leqq 1$$

gleichzeitig genügen. Führt man Polarcoordinaten ein mittelst der gewöhnlichen Formeln

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,\quad dx\,dy=r\,d\vartheta\,dr,$$

und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
P&=A\cos^2\vartheta+B\sin^2\vartheta,\\
Q&=A\alpha^2\cos^2\vartheta+B\beta^2\sin^2\vartheta,\\
R_0&=\left(\frac{\cos\vartheta}{a_0}\right)^2+\left(\frac{\sin\vartheta}{b_0}\right)^2,\\
R_1&=\left(\frac{\cos\vartheta}{a_1}\right)^2+\left(\frac{\sin\vartheta}{b_1}\right)^2,
\end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$Z=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{}}}^{\frac{1}{\sqrt{R_1}}}\sqrt{\frac{1-Qr^2}{1-Pr^2}}\,r\,d\vartheta\,dr.$$

Um das auf r bezügliche Integral rational zu machen benutzen wir die Substitution

$$\frac{1-Pr^2}{1-Qr^2}=u^2,$$

Digitized by Google

woraus

$$r^2=\frac{1-u^2}{P-Qu^2}, \quad r\,dr=-\frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}du$$

folgt; wir gelangen dadurch zu der Formel

$$Z=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{u_1}^{u_0}\frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}d\vartheta\,du,$$

und zwar sind die für u geltenden Integrationsgrenzen:

$$u_0=\sqrt{\frac{R_0-P}{R_0-Q}}, \quad u_1=\sqrt{\frac{R_1-P}{R_1-Q}}.$$

Die Integration nach u lässt sich ohne Mühe ausführen, liefert aber einen ziemlich complicirten Werth, der entweder Logarithmen oder Kreisbögen enthält. Es liegt nahe, diesem Uebelstande durch Umkehrung der Integrationenfolge auszuweichen, jedoch entstehen hierbei neue Weitläufigkeiten da im Allgemeinen u_0 und u_1 von ϑ abhängen. Gleichzeitig übersieht man, dass sich die Rechnung weit einfacher gestalten muss sobald u_0 und u_1 constante Werthe haben, denn in diesem Falle würde man die Reihenfolge der Integrationen ohne Weiteres umkehren dürfen. Nun ist zufolge der Bedeutungen von P, Q, R_0, R_1, α, β

$$R_0-P=\left(\frac{1}{a_0^2}-A\right)\cos^2\vartheta \quad +\left(\frac{1}{b_0^2}-B\right)\sin^2\vartheta,$$

$$R_0-Q=\left(\frac{1}{a_0^2}-A+\frac{A^2}{C}\right)\cos^2\vartheta+\left(\frac{1}{b_0^2}-B+\frac{B^2}{C}\right)\sin^2\vartheta;$$

der erste Ausdruck geht im zweiten auf sobald gleichzeitig

$$A^2=\left(\frac{1}{a_0^2}-A\right)H_0, \quad B^2=\left(\frac{1}{b_0^2}-B\right)H_0,$$

wo H_0 irgend einen constanten Factor bedeutet. Setzt man demgemäss

$$a_0^2=\frac{H_0}{A(A+H_0)}, \quad b_0^2=\frac{H_0}{B(B+H_0)}, \tag{3}$$

so wird

$$R_0-Q=(R_0-P)\left(1+\frac{H_0}{C}\right),$$

$$u_0=\sqrt{\frac{R_0-P}{R_0-Q}}=\sqrt{\frac{C}{C+H_0}}. \tag{4}$$

In gleicher Weise erhält u_1 einen constanten Werth, wenn

$$a_1^2=\frac{H_1}{A(A+H_1)}, \quad b_1^2=\frac{H_1}{B(B+H_1)} \tag{5}$$

genommen wird, nämlich

Digitized by Google

$$(6)\qquad u_1 = \sqrt{\frac{R_1 - P}{R_1 - Q}} = \sqrt{\frac{C}{C + H_1}}.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$Z = 4\int_{u_1}^{u_0} du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{P - Q}{(P - Qu^2)^2}\, d\vartheta,$$

und zufolge der Werthe von P und Q gestaltet sich das auf ϑ bezügliche Integral folgendermaassen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta + B(1-\beta^2)\sin^2\vartheta}{[A(1-\alpha^2u^2)\cos^2\vartheta + B(1-\beta^2u^2)\sin^2\vartheta]^2}\, d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{AB}} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}};$$

hiernach wird

$$(7)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{AB}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Eine etwas andere Form erhält dieses Integral wenn die identische Gleichung

$$\int \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}$$

$$= \frac{1}{u}\left\{ 1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}} \right\} + \int \frac{du}{u^2} \left\{ 1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}} \right\}$$

zu Hülfe genommen wird; führt man nämlich die Grenzen u_0 und u_1 ein, substituirt in dem vom Integralzeichen freien Theile die Werthe von u_0, u_1, α^2, β^2 und setzt zur Abkürzung

$$(8)\qquad D = \sqrt{\frac{C + H_0}{C}} \left\{ 1 - \frac{H_0}{\sqrt{(A + H_0)(B + H_0)}} \right\}$$
$$- \sqrt{\frac{C + H_1}{C}} \left\{ 1 - \frac{H_1}{\sqrt{(A + H_1)(B + H_1)}} \right\},$$

so gelangt man zu der Formel

$$(9)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{AB}} \left[D + \int_{u_1}^{u_0} \left\{ 1 - \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}} \right\} \frac{du}{u^2} \right].$$

Um das gefundene Resultat soweit als möglich geometrisch zu interpretiren bemerken wir Folgendes. Giebt man den H jedesmal dasselbe Vorzeichen, welches C besitzt, so bedeutet die Gleichung

Digitized by Google

$$A^2x^2 + B^2y^2 - CHz^2 = 0$$

einen elliptischen Kegel; dieser schneidet die Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

in einer doppelt gekrümmten Curve, deren Horizontalprojection durch die Gleichung

$$A(A+H)x^2 + B(B+H)y^2 = H$$

bestimmt, also eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\sqrt{\frac{H}{A(A+H)}}, \quad \sqrt{\frac{H}{B(B+H)}}$$

ist. Der Vergleich zwischen den vorstehenden und den unter No. 3) und 5) angegebenen Werthen erlaubt nun die Aufstellung des folgenden Satzes:

> Wenn die centrische Fläche zweiter Ordnung
>
> $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$
>
> von den beiden elliptischen Kegeln
>
> $$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_0z^2 = 0,$$
> $$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_1z^2 = 0$$
>
> geschnitten wird, so entstehen auf jener Fläche zwei symmetrisch gleiche und entgegengesetzt liegende Zonen; der Inhalt jeder solchen Zone lässt sich nach den Formeln 7) und 9) durch elliptische Integrale erster und zweiter Art audrücken.

Die Construction der beiden Kegel ist übrigens für alle drei Flächen eine und dieselbe. Substituirt man nämlich die anfangs erwähnten Werthe von A, B, C und setzt

$$H_0 = \pm\frac{1}{h_0^2}, \quad H_1 = \pm\frac{1}{h_1^2},$$

wobei die oberen Zeichen für ein positives, die unteren für ein negatives C gelten, so erhält man in allen Fällen dieselben Kegelgleichungen:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{(ch_0)^2} = 0,$$

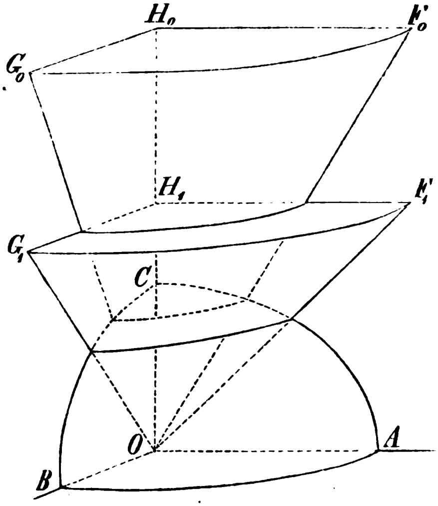
$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{(ch_1)^2} = 0.$$

Die beiden Kegel lassen sich demnach construiren indem man ihre Höhen $OH_0 = h$, $OH_1 = h_1$ willkührlich auf der z-Achse wählt, ferner die Strecken

Digitized by Google

$$F_0H_0 = F_1H_1 = \frac{\overline{OA}^2}{OC} = \frac{a^2}{c},$$

$$G_0H_0 = G_1H_1 = \frac{\overline{OB}^2}{OC} = \frac{b^2}{c}$$



parallel zu den Halbachsen a, b legt und die congruenten Ellipsen F_0G_0, F_1G_1 als Grundflächen der Kegel nimmt. Bei dem Ellipsoid sind h_0 und h_1 ganz beliebig, bei dem einfachen Hyperboloid müssen beide kleiner als die kleinere Halbachse a, bei dem getheilten Hyperboloid grösser als die grössere Halbachse b genommen werden.

Behufs der Reduction auf elliptische Integrale sei in No. 7)

$$(10) \qquad x = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \quad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha};$$

es wird dann

$$\int \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int \left\{ \frac{1-\alpha^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1-\beta^2}{1-x^2\sin^2\varphi} \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-x^2)} \left[(1-x^2)\,F(x,\varphi) - E(x,\varphi) + \Delta(x,\varphi).\tan\varphi\right]$$

$$+ \frac{1-\beta^2}{\alpha(1-x^2)} \left[E(x,\varphi) - \frac{x^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(x,\varphi)}\right]$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{C\alpha}\left[(C-A)E(\varkappa,\varphi) + AF(\varkappa,\varphi) + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varkappa,\varphi)}\tan\varphi\right].$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$G(\varkappa,\varphi) = \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varkappa,\varphi)}\tan\varphi \tag{11}$$

und bestimmen die Grenzwerthe von φ mittelst der Formeln

$$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi_0 &= \alpha u_0 = \sqrt{\frac{C-A}{C+H_0}}, \\ \sin\varphi_1 &= \alpha u_1 = \sqrt{\frac{C-A}{C+H_1}}; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

die Gleichung (9) geht dann in die folgende über

$$Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\{(C-A)[E(\varphi_0) - E(\varphi_1)] + A[F(\varphi_0) - F(\varphi_1)] + G(\varphi_0) - G(\varphi_1)\}. \tag{13}$$

Selbstverständlich kann dafür geschrieben werden

$$Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\{(C-A)E(\tau) + AF(\tau) + G(\varphi_0) - G(\varphi_1) - \varkappa^2\sin\varphi_0\sin\varphi_1\sin\tau\}, \tag{14}$$

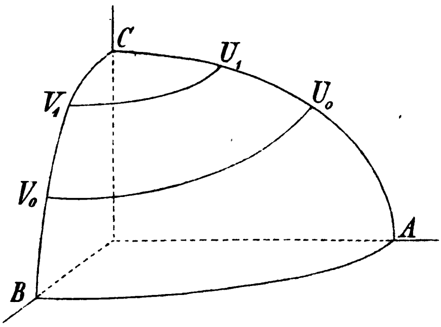
worin τ durch die bekannte Formel

$$\sin\tau = \frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_1\,\Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1\cos\varphi_0\,\Delta(\varphi_0)}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi_0\sin^2\varphi_1} \tag{15}$$

bestimmt ist.

Bei dem Ellipsoid kann man den Grössen H_0 und H_1 die Werthe 0 oder ∞ geben und gelangt dann zu einer bemerkenswerthen Folgerung. Für $H_0=0$ oder $h_0=\infty$ geht die Zone Z in eine Kappe über, von welcher die Figur einen Quadranten CU_1V_1 zeigt, und deren Flächeninhalt Z_1 heissen möge. Die erste Gleichung in No. 12) giebt dann $\sin\varphi_0=\alpha$ oder, wenn wir diesen speciellen Werth von φ_0 mit σ bezeichnen,

$$\sin\sigma = \alpha = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}, \tag{16}$$



Digitized by Google

und nach No. 13) ist

$$Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)[E(\sigma)-E(\varphi_1)]+c^2[F(\sigma)-F(\varphi_1)] \\ + a^2c^2[G(\sigma)-G(\varphi_1)]\}.$$

Im Falle $H_1=\infty$ oder $h_1=0$ wird die untere Begrenzungslinie der Zone Z identisch mit der Horizontalspur des Ellipsoides; der Flächeninhalt dieser besonderen Zone, deren Quadrant ABU_0V_0 in der Figur sichtbar ist, heisse Z_0. Die Formeln 12) und 13) geben als Werth desselben

$$Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)E(\varphi_0)+c^2F(\varphi_0)+a^2c^2G(\varphi_0)\},$$

woraus, beiläufig bemerkt, für $h_0=\infty$, $\varphi_0=\sigma$ die bekannte Formel für die Oberfläche des Halbellipsoides folgt. Man hat ferner

$$Z_0-Z_1=\frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)\,[E(\varphi_0)+E(\varphi_1)-E(\sigma)] \\ + c^2\,[F(\varphi_0)+F(\varphi_1)-F(\sigma)] \\ + a^2c^2[G(\varphi_0)+G(\varphi_1)-G(\sigma)]\}$$

und wenn hier h_0 und h_1 so gewählt werden, dass φ_0 und φ_1 der Gleichung

(17) $$\cos\sigma = \cos\varphi_0\cos\varphi_1 - \sin\varphi_0\sin\varphi_1\Delta(\sigma)$$

genügen, so ist nach dem Additionstheoreme

$$E(\varphi_0)+E(\varphi_1)-E(\sigma)=\varkappa^2\sin\varphi_0\sin\varphi_1\sin\sigma,$$
$$F(\varphi_0)+F(\varphi_1)-F(\sigma)=0,$$

mithin erhält Z_0-Z_1 den algebraischen Werth

(18) $$Z_0-Z_1=\frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)\varkappa^2\sin\varphi_0\sin\varphi_1\sin\sigma \\ +a^2c^2[G(\varphi_0)+G(\varphi_1)-G(\sigma)]\}.$$

Der in den Gleichungen 17) und 18) liegende Satz lässt sich, wenn Alles durch a, b, c, h_0, h_1 ausgedrückt wird, auf folgende Weise darstellen:

Wenn die Kegelhöhen h_0 und h_1 der Bedingung

$$\frac{\sqrt{(a^2+h_0^2)(a^2+h_1^2)}}{a} - \frac{\sqrt{(c^2+h_0^2)(c^2+h_1^2)}}{c} = \frac{(a^2-c^2)h_0h_1}{abc}$$

genügen, so ist die Differenz zwischen den Flächen der vom ersten Kegel bestimmten Zone und der vom zweiten Kegel abgeschnittenen Kappe algebraisch quadrirbar nämlich

Digitized by Google

$$Z_0 - Z_1 = \pi \left\{ \frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)h_0h_1}{ab\sqrt{(c^2+h_0^2)(c^2+h_1^2)}} - c^2 \right.$$
$$+ \frac{(b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2+c^2h_0^2)h_0}{\sqrt{(a^2+h_0^2)(b^2+h_0^2)(c^2+h_0^2)}}$$
$$\left. + \frac{(b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2+c^2h_1^2)h_1}{\sqrt{(a^2+h_1^2)(b^2+h_1^2)(c^2+h_1^2)}} \right\}.$$

Sehr einfach werden diese Formeln für $h_0 = h_1$ d. h. wenn nur ein Kegel von der Höhe h vorhanden ist, welcher die Fläche des Halbellipsoides in eine Kappe Z_1 und in die Zone Z_0 theilt. Die vorige Bedingungsgleichung liefert jetzt den Werth

$$h = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}},$$

und als Differenz beider Flächen ergiebt sich

$$Z_1 - Z_0 = \pi \left\{ ab - \frac{(a^2+b^2)c}{a+b} \right\},$$

was geometrisch leicht zu deuten ist.

Für die Hyperboloide kann man ähnliche Sätze aufstellen, welche indessen, der Natur der Sache nach, keine so einfachen Specialisirungen zulassen. Jedenfalls dürfen aber diese Resultate als die Analoga der Fagnano'schen Sätze von Ellipse und Hyperbel betrachtet werden.

Das Verfahren, welches zur Reduction des Doppelintegrales für Z diente, ist auch anwendbar auf das allgemeinere Doppelintegral

$$S = \iint x^{2m-1} y^{2n-1} F\left(\frac{1-Ax^2-By^2}{1-A\alpha x^2-B\beta y^2}\right) dx\, dy, \qquad (19)$$

worin F eine beliebige Function bezeichnet und die Integrationen auf alle positiven, den Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 \geqq 1, \qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 \leqq 1$$

genügenden x und y zu beziehen sind. Führt man zuerst Polarcoordinaten ein, setzt zur Abkürzung

$$P = A\cos^2\vartheta + B\sin^2\vartheta, \qquad Q = A\alpha\cos^2\vartheta + B\beta\sin^2\vartheta$$

und versteht unter R_0, R_1 dieselben Grössen wie früher, so erhält man

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{R_0}}}^{\frac{1}{\sqrt{R_1}}} r^{2(m+n-1)} F\left(\frac{1-Pr^2}{1-Qr^2}\right) \cos^{2m-1}\vartheta \sin^{2n-1}\vartheta\, r\, d\vartheta\, dr$$

Digitized by Google

Mittelst der Substitution

$$\frac{1-Pr^2}{1-Qr^2}=t, \qquad r^2=\frac{1-t}{P-Qt}$$

ergiebt sich weiter

$$S=\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{t_1}^{t_0}\frac{(P-Q)\,(1-t)^{m+n-1}F(t)\cos^{2m-1}\vartheta\sin^{2n-1}\vartheta}{(P-Qt)^{m+n+1}}\,d\vartheta\,dt,$$

$$t_0=\frac{R_0-P}{R_0-Q}, \qquad t_1=\frac{R_1-P}{R_1-Q}.$$

Wählt man a_0, b_0, a_1, b_1 so, dass

$$(20)\qquad \begin{cases} a_0^2=\dfrac{K_0}{A(1-\alpha+K_0)}, & b_0^2=\dfrac{K_0}{B(1-\beta+K_0)},\\ a_1^2=\dfrac{K_1}{A(1-\alpha+K_1)}, & b_1^2=\dfrac{K_1}{B(1-\beta+K_1)},\end{cases}$$

worin K_0 und K_1 beliebige Grössen bedeuten, so erhalten die Integrationsgrenzen t_0, t_1 die constanten Werthe

$$(21)\qquad t_0=\frac{1}{1+K_0}, \qquad t_1=\frac{1}{1+K_1},$$

und man kann daher die Reihenfolge der Integrationen umkehren: diess giebt

$$S=\tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_0}(1-t)^{m+n-1}F(t)\,dt\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(P-Q)\cos^{2m-1}\vartheta\sin^{2n-1}\vartheta}{(P-tQ)^{m+n+1}}\,d\vartheta.$$

Um die auf ϑ bezügliche Integration auszuführen bedarf es nur der bekannten Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^{2m-1}\vartheta\sin^{2n-1}\vartheta\,d\vartheta}{(\mu\cos^2\vartheta+\nu\sin^2\vartheta)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}\cdot\frac{1}{\mu^m\nu^n};$$

differenzirt man dieselbe einmal in Beziehung auf μ, das andere Mal nach ν, so erhält man die beiden Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^{2m+1}\vartheta\sin^{2n-1}\vartheta\,d\vartheta}{(\mu\cos^2\vartheta+\nu\sin^2\vartheta)^{m+n+1}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n+1)}\cdot\frac{m}{\mu^{m+1}\nu^n},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^{2m-1}\vartheta\sin^{2n+1}\vartheta\,d\vartheta}{(\mu\cos^2\vartheta+\nu\sin^2\vartheta)^{m+n+1}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n+1)}\cdot\frac{n}{\mu^m\nu^{n+1}},$$

welche zu dem genannten Zwecke unmittelbar dienlich sind sobald man die Werthe von P und Q einsetzt. Die Integration nach ϑ giebt nun

Digitized by Google

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n+1)A^m B^n}\left\{\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}\right\}\frac{1}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n}$$

und daher ist

$$S=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{4\Gamma(m+n+1)A^m B^n}\int_{t_1}^{t_0}\left\{\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}\right\}\frac{(1-t)^{m+n-1}F(t)\,dt}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n}\,.$$

Setzt man in No. 19) $x^2=\xi$, $y^2=\eta$, so führt die Zusammenfassung des Ganzen zu folgendem Satze:

Wenn sich in dem Doppelintegrale

$$\iint \xi^{m-1}\eta^{n-1}F\left(\frac{1-A\xi-B\eta}{1-A\alpha\xi-B\beta\eta}\right)d\xi\,d\eta$$

die Integrationen auf alle positiven ξ und η beziehen, welche den Bedingungen

$$\frac{A(1-\alpha+K_0)}{K_0}\xi+\frac{B(1-\beta+K_0)}{K_0}\eta\geqq 1,$$

$$\frac{A(1-\alpha+K_1)}{K_1}\xi+\frac{B(1-\beta+K_1)}{K_1}\eta\leqq 1$$

genügen, wobei K_0 und K_1 willkührliche Constanten bedeuten, so ist jenes Doppelintegral gleich dem einfachen Integrale

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)A^m B^n}\int_{t_1}^{t_0}\left\{\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}\right\}\frac{(1-t)^{m+n-1}F(t)\,dt}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n},$$

$$t_0=\frac{1}{1+K_0},\qquad t_1=\frac{1}{1+K_1},$$

Zu dem nämlichen Resultate führt auch die bekannte Substitution $\xi=st$, $\eta=s(1-t)$ sobald man die Integrationsgrenzen für t constant werden lässt.

In dem besonderen Falle $A=B=1$, $K_0=0$, $K_1=\infty$ ist die erste Integrationsbedingung von selbst erfüllt, die zweite geht über in $\xi+\eta\leqq 1$, gleichzeitig wird $t_0=1$, $t_1=0$, und damit kommt man auf eine specielle, von Catalan angegebene Formel zurück.

Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet das dreifache Integral

$$\iiint \xi^{m-1}\eta^{n-1}\zeta^{p-1}F\left(\frac{1-A\xi-B\eta-C\zeta}{1-A\alpha\xi-B\beta\eta-C\gamma\zeta}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

werden nämlich die Integrationen auf alle positiven, den Bedingungen

Digitized by Google

$$\frac{A(1-\alpha+K_0)}{K_0}\xi+\frac{B(1-\beta+K_0)}{K_0}\eta+\frac{C(1-\gamma+K_0)}{K_0}\zeta\geqq 1,$$
$$\frac{A(1-\alpha+K_1)}{K_1}\xi+\frac{B(1-\beta+K_1)}{K_1}\eta+\frac{C(1-\gamma+K_1)}{K_1}\zeta\leqq 1$$

genügenden ξ, η, ζ ausgedehnt, so reducirt sich jenes Integral zu einem einfachen nämlich

$$M\int_{t_1}^{t_0}\left\{\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}+\frac{p(1-\gamma)}{1-\gamma t}\right\}\frac{(1-t)^{m+n+p-1}F(t)\,dt}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n(1-\gamma t)^p}$$

worin

$$M=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p+1)A^mB^nC^p},\qquad t_0=\frac{1}{1+K_0},\qquad t_1=\frac{1}{1+K_1}.$$

Auch bei mehrfachen Integralen lässt sich derselbe Gedankengang rein analytisch verfolgen indem man die Substitutionen

$$\xi=st,\quad \eta=s(1-t)u,\quad \zeta=s(1-t)(1-u)v\;\ldots.$$

benutzt und die Integrationsgrenzen zu Constanten macht; die Form des allgemeinen Resultates ist aus dem Bisherigen hinreichend ersichtlich.

Digitized by Google

SITZUNG AM 8. NOVEMBER 1862.

K. G. Lehmann *berichtet über verschiedene Untersuchungen, welche in letzter Zeit im chemischen Laboratorium zu Jena ausgeführt worden sind.*

I. Ueber die Verdaulichkeit der Cellulose und des Chitins so wie über deren etwaigen Werth für die Ernährung gewisser Thiere wurden mehrere Versuchsreihen von Herrn Dr. Gerlich aus Ostpreussen unter meiner Leitung durchgeführt.

Man hielt bekanntlich früher die Cellulose für durchaus unverdaulich, da sie in den gewöhnlichen Lösungsmitteln völlig unlöslich zu sein schien. Indessen deuteten doch von verschiedenen Seiten gemachte Beobachtungen darauf hin, dass die Cellulose im Darme mancher Thiere unter gewissen Bedingungen wirklich in Lösung versetzt werden könne. E. H. Weber's Untersuchungen an Bibern, denen beizuwohnen mir vergönnt war, ergaben, dass diese bei stark entwickelten Speicheldrüsen und einer eigenthümlichen Magendrüse mit einem Pancreas versehen seien, welches $^1/_{30}$ des Körpergewichts dieser Thiere betrug. In jedem der beobachteten Fälle war der ganze Darmcanal gleichsam ausgestopft mit Spähnen von Weiden- und Pappelholz; es musste sich daher jedem der Gedanke aufdrängen, dass die Biber wohl im Stande seien, einen Theil der verzehrten Holzfaser zu verdauen. Mikroskopische und mikrochemische Untersuchungen des Dickdarminhalts dieser Biber ebensowohl als spätere Beobachtungen an den Excrementen der Raupen von Sphinx Cossus vermochten doch nicht zur objectiven Gewissheit über die Corrosion und Lösung der Holzfaserzellen zu führen. Später glaubten Frerichs so wie Mulder sich von der Verdaulichkeit feiner Cellulosehäutchen aus jungen

Pflanzentheilen überzeugt zu haben, bis Donders bestimmter nachwies, dass Herbivoren die Schicht dickwandiger proteinführender Zellen in Getreidesaamen völlig zu lösen im Stande seien. In neuester Zeit wurden mehrere sehr interessante Versuchsreihen ausgeführt, welche zunächst die landwirthschaftliche Verwerthung der Cellulose bei Fütterungen gewisser Wiederkäuer im Auge hatten. So fanden Henneberg und Stohmann, dass bei Rindern und Schafen von der in deren Futtermitteln enthaltenen Cellulose in den Excrementen nur 35 bis 51 Proc. (nach den üblichen Methoden) wieder nachzuweisen waren. Zu ähnlichen Resultaten gelangten bei denselben Thierspecies Ritthausen und Scheven, Fraas, Fr. Crusius, Haubner, Stöckhardt und Sussdorff.

Es ist nun klar, dass aus diesen und ähnlichen Fütterungsversuchen nur dann mit Sicherheit auf die Verdaulichkeit der Cellulose geschlossen werden kann, wenn es feststeht, dass die in Anwendung gebrachte, quantitative Bestimmung der Cellulose eine exacte ist. Diess ist aber keineswegs der Fall. Denn wenn man auch zur Entfernung heterogener Materien neben den gewöhnlichen indifferenten Lösungsmitteln durchgängig fünfprocentige Säuren und fünfprocentige Alkalilösungen in Anwendung brachte: so mussten doch die grössere oder geringere Vertheilung der zu digerirenden Substanzen, das Alter und der Verholzungsgrad der Pflanzenzellen, die angewendete Temperatur, die Dauer der Einwirkung u. a. m. in dem Erfolge der Anwendung jener Lösungsmittel sehr erhebliche Differenzen bedingen. Diess ist auch von genannten Forschern so wie von E. Wolff und Grouven bei Aufstellung landwirthschaftlich verwerthbarer Fütterungstabellen keineswegs verkannt worden. Ebensowenig hat man übersehen, dass nicht alles Cellulose ist, was nach den verschiedenen Auslaugungen schliesslich auf dem Filter bleibt. Die Elementaranalyse lehrt, dass der »analytisch gefundenen« Cellulose stets mehr oder weniger stickstoffhaltige Substanz anhaftet, welche nach Schultze in den Verdickungsschichten der Pflanzenzellhaut selbst enthalten und desshalb ohne Zerstörung der Zellen selbst nicht trennbar von der Holzfaser ist. Henneberg, Jani und andere fanden, dass $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ des ganzen Proteingehalts der Pflanze in der Pflanzenfaser zurückbleibt; im Darmcanal der Thiere scheint aber nach Grouven's Berechnungen der Stickstoffgehalt relativ mehr als

Digitized by Google

der Cellulosegehalt zu schwinden. Henneberg fand zwar, dass unter Umständen das Gewicht sämmtlicher Trockensubstanz der Excremente noch geringer bleibt, als das der aufgenommenen Cellulose, und es möchte somit die Auflöslichkeit und Verdaulichkeit der Cellulose in jenen Fällen ausser allem Zweifel gesetzt erscheinen: allein dagegen ist doch in Erwägung zu ziehen nicht nur, dass die Cellulose, welche erfahrungsgemäss schon von sehr schwachen Alkalilösungen etwas angegriffen wird, in die Excremente meist nicht nur viel feiner zertheilt und gewissermassen vorbereiteter zur Auflösung gelangt, sondern auch dass es stets und in jedem Falle einer bedeutend längern Zeit bedarf, um sie von den ihr anhaftenden Materien zu befreien, als die der Nahrungsmittel. Darum ist also die Cellulose der Excremente einer viel längern Einwirkung der chemischen Agentien ausgesetzt, als die der Nahrungsmittel. Man möchte desshalb bei der Kritik solcher Versuche und ihrer Ergebnisse wohl immer von der scheinbar in den Excrementen verschwundenen Cellulose eine (freilich unbestimmbare) Menge in Abzug zu bringen d. h. als unverdaut anzusehen haben.

Eine auf ein anderes Princip begründete Methode, welche die meisten Inconcinnitäten der bisherigen Bestimmungsweise der Cellulose zu vermeiden scheint, wurde erst während der im Folgenden erwähnten Versuche ermittelt; daher bei diesen im Wesentlichen noch die ältere Bestimmungsweise dieses Stoffs beibehalten wurde.

In den von Herrn Gerlich ausgeführten Versuchen wurde zunächst die Frage zu beantworten gesucht, ob auch die Nagethiere rücksichtlich des Verhaltens der Cellulose im Darmcanal ähnliche Erscheinungen wahrnehmen liessen, wie die eben erwähnten Wiederkäuer. Unter den Nagethieren, welche überhaupt zur Hoffnung auf schlussfertige Versuche wegen der bei ihnen meist stark entwickelten Speicheldrüsen und Pancreas so wie der Grösse des Cöcums halber berechtigten, schienen sich die Meerschweinchen (Cavia Cobaia) besonders zu eignen, da dieselben gut sammelbare Excremente liefern und sich überhaupt ziemlich reinlich halten. Zur Fütterung wurden Blätter von Leontodon Taraxacum gewählt, da diese (im Mai und Juni) längere Zeit hindurch von gleichem Alter erlangt werden können, von den Meerschweinchen sehr gern und zwar zugleich mit den sogenannten Blattrippen verzehrt werden.

Digitized by Google

Im Betreff der Analyse dieses Futtermittels sei hier nur folgendes bemerkt. Die Blätter wurden zunächst auf ihren Gehalt an nicht flüchtigen Bestandtheilen untersucht und zwar in mehrern Versuchsreihen *a*) die Blätter einer ganzen Pflanze, *b*) die einer in der Sonne gewachsenen, *c*) einer zum Theil im Schatten gewachsenen, *d*) einer an besonders feuchter Stelle gewachsenen, *e*) junge unentwickelte Blätter, *f*) grosse, wuchernde Blätter, *g*) saftige Stengel, und *h*) Blätter verschiedener Pflanzen gemengt; der Gehalt schwankte zwischen 14,016 (ganz junge Blätter) und 16,324 % (ältere Blätter einer der Sonne exponirten Pflanze); im Durchschnitt aller Beobachtungen = 15,235 %.

An chlorophyll- und wachshaltigem Fett wurden im Mittel von 5 Bestimmungen 8,445 % der Trockensubstanz gefunden, an Alkoholextract 21,553 %; an nur in Wasser löslichen Materien zwischen 14,200 und 16,211 %. Zucker wurde nur in unbestimmbar geringer Menge beobachtet. An in Säuren löslichen Albuminaten wurden 1,598 bis 2,476 %, durchschnittlich 2,028 %, an nur in Alkalien löslichen Proteinsubstanzen zwischen 9,695 und 10,919 % durchschnittlich 10,291 % ermittelt. An Stickstoff wurden im Trockenrückstand der Blätter nach der Methode von Will und Varrentrapp 3,16 bis 3,23 %, durchschnittlich 3,195 % gefunden. Nimmt man, wie bereits anderweit geschehen, den Stickstoffgehalt der eiweissartigen Pflanzensubstanzen zu 16 % an, so würden dem gefundenen Stickstoffgehalte nach in der Trockensubstanz jener Blätter 19,968 % albuminöse Stoffe enthalten sein, eine Berechnung, welche mit der durch Extraction mittelst Säuren und Alkalien gefundenen Menge von 12,319 % wenig übereinstimmt. Diese Differenz erklärt sich einerseits dadurch, dass in der Pflanze der Stickstoff nicht in der Form eiweissartiger Stoffe, sondern auch andrer organischer, Materien, Nitrate u. s. w. enthalten ist. Andrerseits ist es aber wohl allseitig bekannt, dass bei der Behandlung der Albuminate mit erwärmten Alkalilösungen stets ein Theil derselben zersetzt wird. Die Zahl 12,319 erreicht also nicht den wirklichen Gehalt der trockenen Blätter an albuminöser Materie, während die aus dem Stickstoffgehalte berechnete Zahl 19,968 sicher zu hoch ist.

Im Durchschnitt mehrerer Analysen wurden an Mineralstoffen 10,457 % der Trockensubstanz gefunden.

Digitized by Google

Als analytisch gefundene Cellulose wurde der Rückstand berechnet, welcher hinterblieb, nachdem die mit Alkohol, Aether und Wasser extrahirte Pflanzenmasse abwechselnd mit fünfprocentigen Säurelösungen (Essigsäure und Salzsäure) und einer nur 3 % Kali enthaltenden Lösung heiss und zwar so lange ausgezogen worden war, bis die ablaufende Flüssigkeit keinen verkohlenden Rückstand mehr hinterliess. Die so erhaltene Substanz war im feuchten Zustande gallertartig, sehr voluminös, etwas grünlich gefärbt, liess nur unter dem Mikroskop noch die Pflanzenstructur erkennen; beim Austrocknen ward sie fest, fast hornähnlich.

Nach den angeführten Durchschnittszahlen würde die Zusammensetzung der frischen Blätter ungefähr folgende sein:

Wasser und flüchtige Stoffe	84,765
Mineralstoffe	1,599
Fette	1,287
Unbestimmte stickstofffreie in Wasser und Alkohol lösliche Stoffe.	7,739
Albuminate	3,041
Cellulose	1,569
	100,000

Die Untersuchung der Excremente der Thiere ward in ähnlicher Weise ausgeführt, wie die der Nahrung. Nur rücksichtlich der Cellulosebestimmung ist zu bemerken, dass diese zwar ebenso wie bei der Analyse des Futters ausgeführt wurde (mit fünfprocentiger Salzsäure und drei Procent Kali enthaltender Lösung), dass aber hier auf den während des Auslaugens entstehenden Filterverlust Rücksicht zu nehmen war. Mit Decantiren ist nämlich bei Auslaugung der festen Excremente sehr wenig auszurichten; dieselben verweilen daher während des oft 9 Wochen in Anspruch nehmenden Auslaugens auf dem Filter. Bei eingehendern Untersuchungen über diesen Gegenstand ergab sich nämlich, dass schwedisches Papier ebensowohl als andres (vorher mit Säuren und Wasser sattsam ausgelaugtes) Filterpapier einen nicht unerheblichen Verlust während des längern Aussüssens erleidet, das erstere aber einen geringern als das letztere; jenes nämlich um 7,011 %, dieses um 12,49 %.

Was nun die eigentliche Untersuchung betrifft, so wurden derselben zunächst zwei männliche Meerschweinchen unter-

worfen, nachdem sie bereits 24 Stunden vorher reichlich mit frischen Blättern von Leontodon Taraxacum gefüttert worden waren. Das Gewicht beider Thiere betrug zu Anfang des Versuchs = 1213,55 grm. Dieselben wurden in einen zu ähnlichen Versuchen gebräuchlichen Kasten gebracht, der, mit Blech ausgeschlagen einen conisch zugehenden, in eine Röhre mündenden Boden zum Abflusse des Urins hatte und mit einem feinen Drahtnetz zum Aufsammeln der festen Excremente versehen war. Die Thiere wurden täglich 6 bis 8 Mal mit soviel frischen Blättern gefüttert, als sie zu sich nahmen.

Da Herr Dr. Gerlich sich vorbehält, diese Untersuchungen noch anderweit in ihrem Detail zu veröffentlichen, so berichten wir hier nur über die wesentlichsten Momente und Resultate.

Am ersten Versuchstage zeigten die Thiere so starke Fresslust, dass sie im Ganzen 276,713 grm. frischer Blätter verzehrten. Schon am zweiten Tage verminderte sich die Fresslust, und es trat Verstopfung ein; am dritten Tage war das Befinden normal, ebenso am vierten; den fünften Tag über wurden wenig feste Excremente entleert; am sechsten zeigten die Thiere nicht geringe Fresslust, doch schienen sie matt, die Fäces weicher als gewöhnlich; am siebenten Tage war die Fresslust sogar sehr stark; allein die Thiere waren weniger munter und hatten ein unreinliches Aussehen. Am achten Tage waren sie noch leidender und hatten struppige, borstenartig abstehende Haare. Der Versuch wurde an diesem Tage unterbrochen, zumal da die Thiere 85,84 grm. an Körpergewicht verloren hatten. Es ist wohl hieraus zu schliessen, dass die verabreichte Nahrung qualitativ ungenügend war zur Erhaltung der Thiere im normalen Zustande. Dabei ist aber nicht ausser Acht zu lassen, dass, wie jedem, der mit ähnlichen Thieren experimentirt hat, bekannt ist, Nagethiere insbesondere selbst bei reichlicher und qualitativ genügender Nahrung bald erkranken, wenn sie in von Metall oder selbst nur von Holz umgebenen Räumen ohne Streu oder ohne Erde längere Zeit aufbewahrt werden. Von Kaninchen ist es bekannt, dass, wenn sie z. B. nur in gedielten Räumen gehalten werden, bei ihnen Parasiten sehr bald überhand nehmen. Dasselbe wurde auch gerade an diesen Meerschweinchen so wie auch früher von mir in ähnlichen Fällen beobachtet.

Digitized by Google

In folgender Tabelle sind die Beobachtungsresultate auf 1000 grm. Meerschweinchen berechnet:

1000 gr. Cavia Cobaia nahmen täglich auf:

Tag	Frische Blätter	Trocken-substanz der Blätter	Albuminöse Stoffe	Fette	Sog. Cellulose	Salze	Wasser	Stickstoffhaltige Substanzen: stickstofffreie
1	228,02	34,783	5,936	2,935	3,586	3,6	193,3	
2	183,29	27,925	5,575	2,359	2,882	2,9	155,4	
3	218,51	32,253	6,437	2,725	3,329	3,4	186,3	
4	194,40	29,617	5,902	2,502	3,057	3,1	164,8	1 : 2,9
5	195,62	29,802	5,945	2,518	3,076	3,1	165,8	
6	236,35	36,008	7,189	3,042	3,717	3,8	200,3	
7	241,23	36,750	7,328	3,105	3,793	3,9	204,5	
Mittel	211,57	32,059	6,400	2,708	3,309	3,4	179,5	

1000 gr. Cavia Cobaia gaben täglich ab:

Tag	Frische Fäces	Trocken-substanz der Fäces	Cellulose	Frischen Harn	Harnrückstand
1	25,88	10,906	1,317	133,99	4,178
2	14,49	4,327	1,189	105,51	5,899
3	14,94	4,402	1,078	130,78	7,525
4	17,77	5,455	1,420	127,72	7,754
5	9,54	2,796	0,724	116,56	8,199
6	16,32	3,777	1,201	146,85	8,003
7	17,65	4,767	1,410	153,48	9,252
Mittel	15,12	4,254	1,171	130,11	7,939

Es sei hier zunächst nur erlaubt, darauf aufmerksam zu machen, dass in diesem Falle von 100 Th. Trockensubstanz der Nahrung in 24 St. durchschnittlich 13,385 Th. in die festen Excremente, 21,500 Th. in den Harn und 65,115 Th. in die Perspirationsproducte übergegangen sind, von 100 Th. Wasser dagegen 6,05 Th. in die festen Fäces, 68,53 Th. in den Harn und 25,43 Th. in die Perspiration.

Entsprechend dem täglichen Gewichtsverluste der Thiere sehen wir die Menge der ausgeschiedenen festen Harnbestandtheile täglich zunehmen. Mit der Zunahme der letztern nimmt

Digitized by Google

die Menge der festen Fäcesstoffe ab, während das Perspirations-äquivalent sich ziemlich gleich bleibt.

Wenn auch, wie bereits oben bemerkt, der Aufenthalt der Thiere in dem mit Blech ausgeschlagenen Kasten zweifelsohne viel mit zu dem Uebelbefinden der Thiere beitrug, so weist doch auch eine Vergleichung der stickstoffhaltigen Stoffe der Nahrung mit den stickstofffreien auf den Grund hin, wesshalb die den Meerschweinchen sonst so annehmlichen Blätter von Leontodon Taraxacum ihnen nicht zur vollen Ernährung ausreichten. Das Verhältniss jener Stoffe in diesem Nahrungsmittel ist nämlich = 1 : 2,9. Doch ich sehe hier von weitern Erwägungen über die Ernährungsstatistik der Thiere ab, da ich in einem des Nächsten mitzutheilenden Berichte über an Kälbern und andern Thieren angestellte Untersuchungen auf diesen Gegenstand zurückzukommen hoffe.

Was nun aber die Celluloseverdauung betrifft, so möchten wir auch diese Versuche noch keineswegs als völlig entscheidend für die vorschwebende Frage halten, obwohl sie zu ähnlichen Resultaten geführt haben, wie die oben erwähnten an Wiederkäuern ausgeführten Untersuchungen. Nehmen wir den in allen Menstruis unlöslich gebliebenen Rückstand einstweilen als Cellulose an, so würde sich obigen Versuchen nach herausstellen, dass von 100 Th. sogenannter Cellulose des Futters durchschnittlich nur 35,524 Th. ungelöst geblieben sind, also 64,476 Th. derselben hätten verdaut werden können. Es ist schon früher der Gedanke ausgesprochen worden, dass der Gewichtsverlust, den die sogen. Cellulose bei ihrem Durchgang durch den Darmcanal der Wiederkäuer erleidet, wohl durch das Löslichwerden der in der Cellulose eingeschlossenen stickstoffhaltigen Materie bedingt sein könne. Die Beobachtungen oben genannter Forscher liessen diesen Schluss nicht zu, da der fragliche Gewichtsverlust in der Mehrzahl der Fälle viel bedeutender war, als die Menge der von der Cellulose der Nahrung eingeschlossenen stickstoffhaltigen Materien. In unserm Falle verliert aber jener Gedanke alle Berechtigung, da in dem Unlöslichen der Excremente sogar mehr Stickstoff gefunden wurde, als in dem Unlöslichen der Nahrung. In der sogen. Cellulose von Leontodon Taraxacum wurden in 3 Bestimmungen 0,381 % Stickstoff gefunden, während der aus den festen Excrementen nach vollkommen gleicher Behandlung gewonnene unlösliche Körper

durchschnittlich sogar 1,006 % Stickstoff enthielt. Gewiss darf man aber aus diesem Ergebnisse noch keineswegs schliessen, dass im Verdauungscanale der Meerschweinchen aus der Pflanzenzellsubstanz jener Blätter mehr eigentliche Cellulose als stickstoffhaltige Substanz gelöst würde. Die Vermehrung des Stickstoffgehalts im Unlöslichen der Excremente ist gewiss keine relative, sondern eine absolute, d. h. dieselbe ist bedingt durch Epithelialsubstanzen, welche sich der Pflanzenfaser bei ihrem Durchgange durch den Darmcanal beigemengt haben, und vielleicht auch durch feine Haare, obgleich dieselben bei Untersuchung der Excremente jedes Mal sorgfältigst zu entfernen gesucht wurden.

Vergleicht man die Menge der in der Nahrung enthaltenen Pflanzenzellsubstanz mit der Gesammtmenge des Trockenrückstands der festen Excremente: so trat in den 7 Tagen nur einmal der Fall ein, dass, wie in Henneberg's Beobachtungen, weniger feste Stoffe überhaupt in den Fäces enthalten waren, als die Cellulosemenge der Nahrung betrug. Auf 3,076 grm. in der Nahrung enthaltener Cellulose wurden nämlich am fünften Tage an löslichen und unlöslichen Bestandtheilen der Fäces nur 2,796 grm. gefunden. Diese vereinzelte Erfahrung verliert aber alle Beweiskraft, da es nicht nur denkbar, sondern, wie aus der Vergleichung der Zahlen obiger Tabellen hervorgeht, sogar wahrscheinlich ist, dass am 5. Tage ein Theil der excernirbaren Contenta im Dickdarm zurückblieb. Dagegen deutet weit eher ein Vergleich der Durchschnittszahlen vom 2. bis zum 7. Tage (der 1. Tag ist wegen der excessiven Nahrungsmittelaufnahme und Excretion nicht mit in Rechnung zu ziehen) allerdings mit grösserer Wahrscheinlichkeit darauf hin, dass Cellulose wirklich verdaut wurde. Im Mittel jener 6tägigen Beobachtung waren nämlich 3,309 grm. sogen. Cellulose im Futter enthalten, und 4,254 grm. betrug die Gesammtmenge der festen in den Fäces enthaltenen Stoffe. Diese Differenz = 0,945 grm. ist so gering, dass man fast gezwungen ist, anzunehmen, die Cellulose sei im Verdauungscanale der Meerschweinchen nicht blos gelöst, sondern auch resorbirt worden; denn abgesehen davon, dass Gummi, Pectin, Harze u. dgl. als unverdauliche Stoffe in die Excremente mit übergehen, gesellen sich diesen auch Gallenstoffe, Epithelien und Haare bei.

Wir unterlassen hier den Versuch, noch aus dem Vergleiche

Digitized by Google

der Perspirationsgrösse mit den Mengen der Excrete und aufgenommenen Nahrung die Wahrscheinlichkeit der Celluloseverdauung nachzuweisen, da weitere Versuche, bei welchen die Perspirationsproducte gleichzeitig direct bestimmt und eine exactere Bestimmungsweise der Cellulose in Anwendung gebracht wird, einen sichrern Ausweis über die vorliegende Frage zu geben versprechen.

Im Ganzen dürfte also aus dieser Beobachtungsreihe zu schliessen sein, dass in ähnlicher Weise, wie man diess bereits bei Rindern und Schafen gefunden, auch bei Nagethieren, bezüglich Meerschweinchen, im Darmcanale besonders bei unzureichender Nahrung ein grosser Theil sogenannter Cellulose der Nahrung aufgelöst wird.

II. Theils die Analogie des Chitins mit der Cellulose, theils der Gedanke, dass im Darmcanale der Vögel das Chitin möglicher Weise seines stickstoffhaltigen Bestandtheils beraubt und in ein einfaches Kohlenhydrat verwandelt würde, bestimmte mich, Herrn Dr. Gerlich zu einer Untersuchung über das Verhalten des Chitins bei seinem Durchgange durch den Verdauungscanal der Vögel zu veranlassen.

Zu diesen Versuchen wurden vier ausgewachsene Staare (Sturnus vulgaris) verwendet, welche mit Mehlwürmern (den Larven von Tenebrio molitor) gefüttert wurden.

Die chemische Constitution der Mehlwürmer ist natürlich je nach ihrem Alter und der letzten Zeit ihrer Häutung ziemlich verschieden; es wurden daher zahlreiche Versuche angestellt, um bei sorgsamer möglichst gleichmässiger Fütterung mit jüngern und ältern Thieren ein von der Wahrheit möglichst wenig abweichendes Mittelresultat in Rechnung bringen zu können.

Im Durchschnitt von 14 Versuchen wurden in den Larven von Tenebrio molitor 41,483 % Trockensubstanz gefunden; dieselbe schwankte nur zwischen 40,248 und 42,766 %. In der Trockensubstanz selbst wurden durchschnittlich 39,652 % Fett, 5,300 % in Alkohol löslicher Stoffe und 5,973 % Chitin ermittelt.

Trotz der zahlreichen Untersuchungen (selbst der neueren, wie sie von Peligot einerseits und Städeler andererseits in neuerer Zeit mit grossem Scharfsinn ausgeführt worden sind) ist die Natur des Chitins noch keineswegs völlig aufgeklärt. Diese Substanz verhält sich aber (wenn man sie nämlich auf

Digitized by Google

oben angeführte Weise und nicht mit stärkern Agentien, wie concentrirter Schwefelsäure, Kalkhydrat oder leicht schmelzbarem Kalihydrat, behandelt) in der That ziemlich verschieden, je nach der Gattung der Insecten und der Organe, aus welchen man sie darzustellen versucht. So zeigte auch dieses aus zerschnittenen Mehlwürmern dargestellte Chitin einige Eigenthümlichkeiten, wie ich sie bei Chitin aus verschiedenen andern Quellen nicht wahrgenommen habe. Die quantitative Bestimmung des Chitins der Mehlwürmer ist sehr umständlich und zeitraubend. Lässt man auf frischgetödtete und zerkleinerte Mehlwürmer die verschiedenen Lösungsmittel einwirken, so ist eine genaue Bestimmung des Chitingehalts derselben ganz unmöglich, da sich schliesslich durchaus unfiltrirbare und undecantirbare Flüssigkeiten bilden. Eine solche gelang nur nach vorgängigem sorgfältigem Trocknen und Pulverisiren der vorher möglichst fein zerschnittenen Larven, bot aber trotzdem noch Schwierigkeiten genug dar. Nachdem nämlich die vollkommen getrockneten und wiederholt zerriebenen Körper der Larven mit Alkohol, mit kaltem und heissem Wasser (wovon übrigens ein Theil albuminöser Materie gelöst wurde) gehörig extrahirt worden waren, wurde die Masse, mochte man nun eine dreiprocentige Kalilösung, Essigsäure oder verdünnte Salzsäure anwenden, so gallertartig, dass ein Filtriren völlig unmöglich war; weder durch Anwendung von Salzen noch durch Neutralisiren und wiederholtes Präcipitiren vermochte man diesen Uebelstand völlig zu beseitigen; nur wenn die mit Essigsäure versetzte Masse stark mit Wasser verdünnt würde, wobei ein Theil eiweissartiger Substanz wieder ausgefällt wurde, gelang es, durch wiederholtes und vorsichtiges Decantiren eine vollkommene Abscheidung der unlöslichen Substanz zu ermöglichen; erst nachher liess sich die letztre durch Alkalien und Salzsäure gut auslaugen und filtriren. Dieser Reinigungsprocess nahm aber eine Zeit von 8 bis 12 Wochen in Anspruch. Es war deshalb auch hier auf den Filterverlust Rücksicht zu nehmen. Die Schwierigkeit, das Chitin aus Larven rein darzustellen, beruht hauptsächlich auf der Anwesenheit einer nur den Insecten und den Raupen insbesondere eigenthümlichen albuminösen Substanz, welche, dem gewöhnlichen thierischen Schleim in vieler Beziehung ähnlich, auf Zusatz von Wasser gerinnt, ebenso durch Säuren, in verdünnter Essigsäure und Alkalilösungen nur stark

Digitized by Google

aufquillt, sich nicht wahrhaft löst, an der Luft sich aber leicht verändert und nach dem Grade der Veränderung sich sehr verschieden gegen Lösungsmittel verhält.

Dieses Insecteneiweiss wird im Darmcanale der Vögel verdaut, und daher rührt es, dass aus den Excrementen der Vögel nach Aufnahme chitinhaltiger Nahrung sich das Chitin ausserordentlich leicht durch oben erwähnte Lösungsmittel darstellen lässt. In den von den Staaren nach Fütterung mit Mehlwürmern entleerten Excrementen wurde übrigens weder Hypoxanthin, noch Xanthin, noch Guanin vorgefunden.

Die Staare wurden während der Versuche in einem sehr grossen Bauer gehalten, dessen Boden mit einer Glasplatte zur Aufnahme der Excremente bedeckt war; etwa einen Zoll über dieser Platte war ein weitmaschiges Drahtnetz angebracht, durch welches die Vögel verhindert wurden, die abgeschiedenen Excremente zu zertreten und zu zerstreuen.

In der ersten Versuchsreihe wurden in je 3 bis 5 während eines Tags unternommenen Fütterungen den 4 Staaren so viel Mehlwürmer verabreicht, als diese zu verzehren noch Lust zeigten. Das Gewicht der Vögel wurde natürlich ebenso wie die täglich aufgenommene Gewichtsmenge an Mehlwürmern genau bestimmt. Auch hier verzehrten die Thiere am ersten Tage ausserordentlich viel, dann weniger, bis nach einigen Tagen die tägliche Nahrungsaufnahme nur in geringen Grenzen schwankte. Wir geben in folgender Tabelle die Bilance der Einnahmen und Ausgaben sogleich auf 1000 grm. Körpergewicht der Staare berechnet.

1000 grm. Sturnus vulgaris consumirten an

Tag	Frischen Mehlwürmern	Trocken-substanz	Fetten	Chitin	Alkohol + Aetherextr.
1	230,39	95,57	37,89	5,71	42,96
2	195,61	81,14	32,17	4,85	36,48
3	164,57	68,27	27,07	4,08	30,69
4	229,15	95,06	37,69	5,68	42,73
5	217,19	90,09	35,72	5,38	40,50
6	221,24	91,78	36,39	5,48	41,25
7	220,47	91,46	36,25	5,46	41,11
8	211,37	87,68	34,76	5,24	39,41
9	216,35	89,82	35,61	5,36	40,37
10	179,76	82,04	32,52	4,90	36,88
Mittel	210,43	87,29	34,61	5,21	39,24

Digitized by Google

1000 grm. Sturnus vulgaris excernirten an:

Tag	trocknen Fäces	Fetten	Chitin	Alkohol + Aetherextr.	Perspir. Theil der Nahrung
1	27,58	1,68	4,35	4,31	68,00
2	23,00	1,40	3,33	3,75	58,14
3	27,35	1,59	3,53	5,32	40,92
4	31,55	1,85	4,59	5,31	63,51
5	29,71	1,49	4,25	4,96	60,38
6	29,65	1,49	4,16	5,45	62,13
7	28,29	1,20	3,70	5,14	63,17
8	27,00	1,14	3,53	5,15	60,69
9	30,64	1,30	4,48	5,95	59,18
10	25,83	1,10	3,77	5,02	56,20
Mittel	28,06	1,42	3,99	5,04	59,23

Vorläufig sei hier nur darauf aufmerksam gemacht, dass in dieser Versuchsreihe durchschnittlich von 100 Th. Trockenrückstand der Nahrung 32,3 Th. in die Excremente übergehen und 67,7 Th. zur Perspiration gelangen; das Verhältniss beider Mengen ist also ziemlich genau = 1 : 2.

Von 100 Th. Chitin verschwanden in diesem Falle während der Verdauung durchschnittlich 23,5 Th.; diese Menge schwankte aber in den einzelnen Tagen ausserordentlich, nämlich zwischen 13,32 und 32,59 Th.

In einer zweiten Versuchsreihe erhielten die Thiere $1/8$ Mehlwürmer weniger, als sie im ersten Falle bei beliebiger Nahrung verzehrt hatten; zugleich wurde auf die Menge des von ihnen getrunkenen Wassers so wie auf die Lufttemperatur Rücksicht genommen. Am 8. Versuchstage trat bei den Thieren Diarrhöe ein, wesshalb die weitere Beobachtung unterbrochen wurde. (Siehe die Tabelle S. 48 oben.)

In diesem Falle wurden durchschnittlich von 100 Th. trockener Nahrung 28,79 Th. durch die Excremente wieder ausgeschieden, während 71,21 Th. zur Perspiration gelangten. Von 100 Th. Chitin der Nahrung verschwanden im Darmcanale durchschnittlich 25,1 Th.; doch stellten sich die Schwankungen an den einzelnen Tagen immerhin ziemlich gross heraus. Soviel lässt sich aber wohl hieraus schliessen, dass durch Minderung der Nahrung die Verdaubarkeit des Chitins nicht gesteigert worden ist (wie sich dieses doch bei der Cellulose nach

Digitized by Google

den meisten Experimentatoren sicher herausgestellt zu haben scheint). Die Vögel hatten übrigens während dieser Versuchsreihe einen nicht unerheblichen Körpergewichtsverlust erlitten.

1000 grm. Sturnus vulgaris

	nahmen auf an:						gaben ab an:		
Tag	Temper. +° C.	Frischen Mehlw.	Trockensubstanz	Fetten	Chitin	Wasser neben dem des Futters	Getr. Fäces	Chitin	Perspirirt
1	8°	161,6	67,58	26,58	4,003	161,6	18,41	2,815	48,62
2	9°	138,5	57,46	22,78	3,431	221,3	16,16	2,612	41,30
3	9°	totid	totid	totid	totid	197,8	16,12	2,475	41,34
4	10°	—	—	—	—	238,9	16,30	2,649	41,16
5	14	—	—	—	—	286,5	17,38	2,834	40,08
6	15	—	—	—	—	295,0	18,09	2,852	39,36
7	8°	—	—	—	—	237,1	16,00	2,155	41,46
Mittel		141,82	58,83	23,38	3,513	234,0	16,92	2,627	41,90

Nebenbei sei darauf aufmerksam gemacht, wie auffällig sich in obiger Tabelle der anderweit längst constatirte Einfluss der äussern Temperatur theils auf die Menge des genossenen Wassers, theils auf die der trockenen Excremente herausstellt. Auf die Chitinverdauung aber scheint die äussere Temperatur hiernach ohne Einfluss zu sein.

Eine dritte Versuchsreihe, welche erst begonnen wurde, nachdem die Thiere sich durch gemischte, d. h. theils vegetabilische, theils animalische Kost vollständig erholt und ihr früheres Körpergewicht wieder erlangt hatten, wurde leider ebenfalls am 8. Tage der Fütterung mit Mehlwürmern durch den Eintritt einer galligen Diarrhöe unterbrochen.

1000 grm. Sturnus vulgaris

	verzehrten an:			schieden ab:		
Tag	Lebenden Mehlwürmern	Trockensubstanz	Chitin	Trockne Fäces	Chitin	Perspirirt
5	140,0	58,07	3,468	22,45	2,586	35,82
6	140,0	58,07	3,468	21,33	2,582	36,74
7	140,0	58,07	3,468	21,83	2,566	36,24
Mittel	140,0	58,07	3,468	21,80	2,578	36,27

Digitized by Google

Von 100 Th. Trockensubstanz wurden hiernach in je 24 St. 37,543 Th. durch die Excremente wieder ausgeschieden, und nur 62,457 Th. gelangten zur Perspiration. Dass in dieser dritten Versuchsreihe erheblich weniger organischer Nährstoff zur Resorption und Perspiration gelangte, erklärt sich zum Theil daraus, dass die Temperatur in dem Raume, wo die Thiere verweilten, weit höher war, als früher (nämlich zwischen + 17 und 22° C. schwankend), theils auch daraus, dass die Thiere, mehr an den Käfig gewöhnt, sich viel ruhiger verhielten wie früher.

Von 100 Th. Chitin wurden in diesem Falle durchschnittlich 25,66 Th. im Darme der Thiere aufgelöst.

Aus einer Vergleichung dieser 3 Versuchsreihen ist zunächst zu entnehmen, dass dieser Gegenstand noch fortgesetzter und mannichfach modificirter Untersuchungen bedarf. Einstweilen lässt sich aber wohl so viel aus denselben schliessen:

1) dass das Chitin der Larven im Darmcanale von Vögeln theilweise gelöst wird;

2) dass durchschnittlich 25% des von den Vögeln aufgenommenen Chitins verdaut werden, während von der Cellulose bei Wiederkäuern und Nagethieren unter günstigen Bedingungen 60% gelöst werden.

3) Unzureichende Nahrung scheint eine grössere Aufnahme von Chitin in den Organismus der Vögel nicht zu bedingen.

In dem aus Tenebrio molitor nach der oben angeführten Methode (in der, wie wir wiederholen, keine stärkere Kalilauge angewendet wurde, als eine 3% Kali enthaltende) dargestellten Chitin fand Herr Gerlich 7,010 % Stickstoff; in einer andern Probe ebenso dargestellten Chitins 7,122 %. Bekanntlich ist von C. Schmidt so wie von Städeler, welchen beiden Forschern wir vorzüglich eine genauere Kenntniss des Chitins verdanken, im Chitin von ersterm nur 6,5 %, von letzterm nur 6,14 % Stickstoff gefunden worden, während nach den älteren Analysen allerdings mehr Stickstoff darin enthalten sein sollte. Die als Chitin nach obiger Methode bestimmte Materie war also nicht das Chitin der neuern Forscher. Herr Gerlich behandelte daher dieses Chitin mit stärkern Agentien, wie sie von Peligot, Rouget und Städeler angewendet wurden, und erhielt dann einen Rückstand, der die von Städeler hervor-

Digitized by Google

gehobenen Eigenschaften zeigte und, aus verschiedenen Bereitungsweisen entlehnt, bald 6,011, bald nur 5,977, bald auch 6,212 % Stickstoff enthielt.

Es war demnach um so mehr zu erwarten, dass das aus den Excrementen der Vögel (durch Behandlung mit 3procentiger Kalilauge und 5procentiger Salzsäure) dargestellte Chitin einen Verlust im Stickstoffgehalte zeigen würde: allein Herr Gerlich fand in dem von der ersten Versuchsreihe entlehnten Chitin 7,052 % Stickstoff, in dem aus der zweiten Reihe entlehnten 6,560 % und in dem aus der letzten herrührenden 7,102 %. Das Chitin der Excremente zeigte sich übrigens bei der mikroskopischen Untersuchung in seiner Textur vollkommen unverändert, gab an Kupferoxyd-Ammoniak, Nickeloxyd-Ammoniak durchaus nichts ab, verhielt sich also in dieser wie in jeder andern Beziehung ganz wie das aus den frischen Mehlwürmern nach gleicher Methode dargestellte. Wir dürfen hieraus schliessen, dass das Chitin, welches im Verdauungscanale der Vögel nicht zur Lösung gelangt, ebensowenig in seiner chemischen Constitution als in seiner Textur verändert wird.

Digitized by Google

SITZUNG AM 12. DECEMBER 1862.

O. Schlömilch. *Ueber die Complanation gewisser Fusspunktflächen.*

Projicirt man den Mittelpunkt eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides auf alle Berührungsebenen desselben, so erhält man bekanntlich als geometrischen Ort jener Projectionen die nämliche Fläche vierten Grades, welche Fresnel in seinen Untersuchungen über die doppelte Strahlenbrechung als Elasticitätsfläche bezeichnet hat, und deren Gleichung ist

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Wir denken uns dieselbe von zwei, durch die Gleichungen

$$M_0x^2+N_0y^2=z^2,$$
$$M_1x^2+N_1y^2=z^2$$

bestimmten Kegeln geschnitten und suchen den Flächeninhalt Z einer so entstandenen Zone zu ermitteln.

Behufs der Einführung von Polarcoordinaten nennen wir r den Radiusvector des Punktes xyz, ferner ψ den Neigungswinkel von r gegen die Horizontalebene xy, endlich ω den Winkel zwischen der x-Achse und der Horizontalprojection von r; es ist dann

$$x=r\cos\psi\cos\omega\ ,\quad y=r\cos\psi\sin\omega\ ,\quad z=r\sin\psi;$$

die Gleichung der Fusspunktfläche wird

$$r^2=a^2\cos^2\psi\cos^2\omega+b^2\cos^2\psi\sin^2\omega+c^2\sin^2\psi\ ,$$

und die Gleichungen der beiden Kegel gehen über in

$$[(M_0+1)\cos^2\omega+(N_0+1)\sin^2\omega]\cos^2\psi=1\ ,$$
$$[(M_1+1)\cos^2\omega+(N_1+1)\sin^2\omega]\cos^2\psi=1.$$

Zur Complanation der angegebenen Zone benutzen wir die Formel

Digitized by Google

$$S=\iint r\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\,d\omega\,d\psi$$
$$=\iint\sqrt{\left[r^4+\left(\frac{rdr}{d\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi+\left(\frac{rdr}{d\omega}\right)^2}\,d\omega\,d\psi$$

und erhalten im vorliegenden Falle

$$Z=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\sqrt{a^4\cos^2\psi\cos^2\omega+b^4\cos^2\psi\sin^2\omega+c^4\sin^2\psi}\cos\psi\,d\omega\,d\psi,$$

wobei sich die Integrationsgrenzen aus den Kegelgleichungen bestimmen nämlich

$$\cos^2\psi_0=\frac{1}{(M_0+1)\cos^2\omega+(N_0+1)\sin^2\omega},$$
$$\cos^2\psi_1=\frac{1}{(M_1+1)\cos^2\omega+(N_1+1)\sin^2\omega}.$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein

$$A=a^4,\qquad B=b^4,\qquad C=c^4,$$
$$Q=A\cos^2\omega+B\sin^2\omega-C=(A-C)\cos^2\omega+(B-C)\sin^2\omega,$$
$$R_0=(M_0+1)\cos^2\omega+(N_0+1)\sin^2\omega,$$
$$R_1=(M_1+1)\cos^2\omega+(N_1+1)\sin^2\omega,$$

und haben dann

$$Z=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\sqrt{C+Q\cos^2\psi}\,\cos\psi\,d\omega\,d\psi.$$

Das auf ψ bezügliche Integral wird rational wenn man die Substitution

$$\frac{C\sin^2\psi}{C+Q\cos^2\psi}=t^2$$

anwendet; diese liefert nämlich:

$$\cos\psi=\sqrt{\frac{C(1-t^2)}{C+Qt^2}},\qquad \sin\psi=\sqrt{\frac{C+Q}{C+Qt^2}}\,t,$$
$$\sqrt{C+Q\cos^2\psi}=\sqrt{\frac{C(C+Q)}{C+Qt^2}},\qquad \cos\psi\,d\psi=\frac{C\sqrt{C+Q}}{\sqrt{(C+Qt^2)^3}}\,dt,$$
$$Z=4\sqrt{C^3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{t_0}^{t_1}\frac{C+Q}{(C+Qt^2)^2}\,d\omega\,dt,$$

und zwar sind hier die Integrationsgrenzen:

Digitized by Google

$$t_0 = \sqrt{\frac{C(1-\cos^2\psi_0)}{C+Q\cos^2\psi_0}} = \sqrt{\frac{C(R_0-1)}{CR_0+Q}},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{C(1-\cos^2\psi_1)}{C+Q\cos^2\psi_1}} = \sqrt{\frac{C(R_1-1)}{CR_1+Q}},$$

oder vermöge der Werthe von Q, R_0 und R_1,

$$t_0 = \sqrt{\frac{C(M_0\cos^2\omega+N_0\sin^2\omega)}{(A+CM_0)\cos^2\omega+(B+CN_0)\sin^2\omega}},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{C(M_1\cos^2\omega+N_1\sin^2\omega)}{(A+CM_1)\cos^2\omega+(B+CN_1)\sin^2\omega}}.$$

Nimmt man

$$M_0=\frac{A}{K_0}, \quad N_0=\frac{B}{K_0}, \quad M_1=\frac{A}{K_1}, \quad N_1=\frac{B}{K_1},$$

wo K_0 und K_1 irgend welche constante Grössen bedeuten, so werden die Integrationsgrenzen t_0, t_1 constant, nämlich:

$$t_0=\sqrt{\frac{C}{C+K_0}}, \qquad t_1=\sqrt{\frac{C}{C+K_1}},$$

und in diesem Falle ist es erlaubt, die auf t und ω bezüglichen Integrationen umgekehrt anzuordnen; man hat also

$$Z=4\sqrt{C^3}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{C+Q}{(C+Qt^2)^2}\,dt\,d\omega$$

d. i. vermöge des Werthes von Q

$$Z=4\sqrt{C^3}\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{A\cos^2\omega+B\sin^2\omega}{\left[\left\{C+(A-C)t^2\right\}\cos^2\omega+\left\{C+(B-C)t^2\right\}\sin^2\omega\right]^2}\,d\omega.$$

Unter der Voraussetzung $a<b<c$ also $A<B<C$ sei ferner

$$\alpha^2=1-\frac{A}{C}=1-\frac{a^4}{c^4}, \qquad \beta^2=1-\frac{B}{C}=1-\frac{b^4}{c^4};$$

es wird dann

$$Z=4\sqrt{C}\int_{t_0}^{t_1}dt\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-\alpha^2)\cos^2\omega+(1-\beta^2)\sin^2\omega}{[(1-\alpha^2t^2)\cos^2\omega+(1-\beta^2t^2)\sin^2\omega]^2}\,d\omega$$

und durch Ausführung der ersten Integration

$$Z=\pi\sqrt{C}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2t^2}+\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2t^2}\right\}\frac{dt}{\sqrt{(1-\alpha^2t^2)(1-\beta^2t^2)}}.$$

Digitized by Google

Hieran knüpft sich eine sehr einfache Vergleichung zwischen der bisher betrachteten und einer ellipsoidischen Zone. Schneidet man nämlich ein aus den Halbachsen a', b', c' construirtes Ellipsoid durch die beiden elliptischen Kegel

$$\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}=\frac{H_0 z^2}{c'^2}\ ,$$
$$\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}=\frac{H_1 z^2}{c'^2}\ ,$$

so entsteht eine ellipsoidische Zone deren Flächeninhalt Z' durch die (in der Sitzung vom 1. Juli 1862 mitgetheilte) Formel

$$Z'=\pi a'b'\int_{u_1}^{u_0}\left\{\frac{1-\alpha'^2}{1-\alpha'^2u^2}+\frac{1-\beta'^2}{1-\beta'^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha'^2u^2)(1-\beta'^2u^2)}}$$

bestimmt wird, wobei

$$\alpha'^2=1-\frac{c'^2}{a'^2}\ ,\qquad \beta'^2=1-\frac{c'^2}{b'^2}\ ,$$
$$u_0=\frac{1}{\sqrt{1+H_0c'^2}}\ ,\qquad u_1=\frac{1}{\sqrt{1+H_1c'^2}}\ .$$

Die Formeln für Z und Z' werden nun völlig identisch, wenn

$$a'=\frac{bc}{a}\ ,\qquad b'=\frac{ca}{b}\ ,\qquad c'=\frac{ab}{c}$$
$$H_0=\frac{K_1}{a^2b^2c^2}\ ,\qquad H_1=\frac{K_0}{a^2b^2c^2}$$

genommen wird, wobei der Homogenität wegen $K_0=k_0^4$, $K_1=k_1^4$ sein möge. Man hat dann folgendes Theorem

Der Durchschnitt der Fusspunktfläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

mit den beiden Kegeln

$$a^4x^2+b^4y^2=k_0^4z^2\ ,$$
$$a^4x^2+b^4y^2=k_1^4z^2$$

giebt eine Zone, welche denselben Flächeninhalt besitzt, wie die elliptische Zone, die aus dem Durchschnitte des Ellipsoides

$$a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=a^2b^2c^2$$

und der beiden Kegel

$$a^8x^2+b^8y^2=c^4k_0^4z^2\ ,$$
$$a^8x^2+b^8y^2=c^4k_1^4z^2$$

hervorgeht. Beide Zonen sind durch elliptische Integrale quadrirbar.

Digitized by Google

Beiläufig bemerkt, hat das neue Ellipsoid denselben cubischen Inhalt wie das ursprüngliche Ellipsoid, aus welchem die Fusspunktfläche abgeleitet wurde; die Halbachsen des zweiten Ellipsoides verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Halbachsen des ersten.

Für $k_0 = 0$ und $k_1 = \infty$ geht die Zone Z in die halbe Fusspunktfläche, Z' in das Halbellipsoid über, mithin besitzt dann die ganze Fusspunktfläche denselben Flächeninhalt wie das zweite Ellipsoid. Diesen speciellen Satz hat bereits Tortolini in Crelle's Journal Bd. 31, S. 17 mitgetheilt.

Für die Fusspunktflächen der beiden Hyperboloide bleibt die Rechnung im Wesentlichen ganz dieselbe, weil die Aenderung der Vorzeichen von a^2, b^2 oder c^2 keinen Einfluss auf A, B, C hat; man kann daher das obige Theorem leicht auf die genannten Fusspunktflächen ausdehnen.

Digitized by Google

W. G. Hankel, *über die von G. Meissner an der Oberfläche des menschlichen Körpers beobachteten elektrischen Erscheinungen.*

In seinen Untersuchungen »über das elektrische Verhalten der Oberfläche des menschlichen Körpers«*) berichtet Herr Professor Meissner in Göttingen über gewisse von ihm an der genannten Oberfläche wahrgenommene elektrische Spannungserscheinungen, und glaubt dieselben als Wirkungen der in den darunter liegenden Muskeln vorhandenen elektrischen Ströme betrachten zu müssen.

Er stützt sich dabei auf folgende Beobachtungen: »Wenn man auf die wie gewöhnlich trockne Haut über den Muskelbäuchen am Vorderarm eine Messingplatte mit wohl isolirender Handhabe und mit rein metallischer Oberfläche, ohne Spur von irgend welchem Firniss ruhig aufsetzt, und nach einigen Augenblicken gradlinig wieder abhebt, so hat die Messingscheibe eine zwar nach Umständen verschieden starke, aber in der Regel ansehnliche elektrische Ladung angenommen, welche bei Berührung des Knopfes eines empfindlichen Elektroskops eine Divergenz der Goldblätter von 20^0 bis 30^0 bewirken kann.« Eine weitere Prüfung zeigt, dass die Metallscheibe bei diesem Verfahren negative Elektricität erhält.

Bei nicht isolirtem Körper liefert der Versuch bei jeder Wiederholung das angegebene Resultat. Dies ist aber nicht

---

*) Zeitschrift für rationelle Medicin von Henle und Pfeifer, dritte Reihe, Bd. 12. S. 263—313.

Digitized by Google

mehr der Fall, wenn der Körper auf einer gut isolirenden Vorrichtung steht. Das erste Anlegen ertheilt der Metallplatte starke negative Elektricität; lässt man jedoch vor jedem neuen Anlegen die Platte durch einen Gehülfen entladen, während der Körper des Experimentators gut isolirt bleibt, so wird die Ladung bei jedem neuen Versuche schwächer, so dass sie zuweilen schon beim dritten Male auf Null herabgesunken ist.

Meissner sucht dann nachzuweisen, dass die Elektricität, welche bei den zuvor beschriebenen Versuchen die Metallscheibe ladet, weder vor dem Aufsetzen derselben auf der Haut bereits vorhanden gewesen, noch auch während des Aufsetzens und Abhebens durch irgend einen Vorgang zwischen der Scheibe und der Haut erzeugt worden sei, sondern vielmehr, wie bereits oben angegeben, von einer Vertheilung seitens der in den Muskeln existirenden elektrischen Ströme herrühre. Er betrachtet dabei die dünne verhornte Schicht der Epidermis als isolirendes Medium, während er der über dieser Schicht auf der Epidermis angesammelten Feuchtigkeit die Function zuweist, die der vertheilenden gleichnamige Elektricität abzuleiten. Da indess Meissner die bisher erwähnte Form des Versuchs, so wie die Argumente, die er zur Stütze der im Vorstehenden ausgesprochenen Ansicht beibringt, doch nicht als streng beweisend hinstellen zu können glaubt, so gibt er einen Versuch an, der in aller Strenge darthun soll, »dass bei jenem Versuch an der Ladung der Metallscheibe die Manipulation absolut unbetheiligt ist, wenigstens (um eine allerdings mögliche Einmischung zu berücksichtigen) absolut unbetheiligt sein kann.«

Der bezeichnete Versuch ist folgender:

»Man stellt einen Condensator mit hinreichend grossen Platten so auf, dass man einigermassen bequem unter eigener Beobachtung des Abstandes den Arm mit der genannten Gegend [den Muskelbäuchen am Vorderarm] über die obere oder unter die untere Scheibe halten kann; der Abstand der Armoberfläche von der Scheibe kann etwa zwei Linien betragen. Während man den Arm der Scheibe angenähert hält, berührt man dieselbe Scheibe mit dem Finger, entfernt diesen, entfernt dann den Arm und berührt darauf die andere Scheibe ableitend, worauf der Arm wieder angenähert wird, und dieselben Manipulationen sich wiederholen.« Hatte Meissner die Reihe dieser Manipulationen 10—15 Male wiederholt, so besassen beide

Digitized by Google

Condensatorscheiben relativ starke Ladungen, die Scheibe auf Seiten des Arms negative, die andere positive.

Bei der Genauigkeit und Gewissenhaftigkeit, mit welcher Meissner seine Untersuchungen führt, ist im Voraus anzunehmen, dass die von ihm mitgetheilten Beobachtungen richtig sind. Dagegen darf die Frage gestellt werden, ob die aus ihnen hergeleiteten Folgerungen oder besser gesagt die den beobachteten Erscheinungen zu Grunde gelegten Ursachen in Wahrheit begründet sind.

Da Reibung und Druck bei dem letzten Versuche gänzlich entfernt sind, so glaubt Meissner die beobachteten Erscheinungen nur durch eine Vertheilungswirkung seitens der in den Muskeln circulirenden elektrischen Ströme erklären zu können. Er hat dabei indess eine andere Elektricitätsquelle, nämlich die Berührung heterogener Leiter, unbeachtet gelassen; ich werde jetzt den Beweis führen, dass die bei dem letzten Verfahren mittelst des Condensators von Meissner wahrgenommene Elektricität in der That dieser Quelle entstammt.

Zur experimentellen Nachweisung meines Ausspruchs dürfte es zweckmässig sein, den von Meissner angewandten Apparat zu vereinfachen. Meissner beabsichtigt die Erregung von Elektricität in einer Metallscheibe durch blosse Annäherung des Armes nachzuweisen, und er bedarf einer zweiten Condensatorplatte nur, um die an sich schwachen Wirkungen bis zur Wahrnehmbarkeit an seinem Elektrometer zu verstärken. Lassen wir die zweite untere Condensatorplatte fort, erhöhen dafür aber die Empfindlichkeit des Elektrometers, so wird derselbe Zweck viel leichter und unabhängig von den aus condensatorischen Wirkungen leicht entspringenden Fehlerquellen erreicht werden. Der ganze Apparat reducirt sich also auf eine Metallplatte und den Arm, der ihr genähert und dann wieder entfernt wird; bei der Annäherung muss der Arm durch Vermittelung eines Fingers der anderen Hand mit der Metallscheibe in leitende Verbindung gesetzt werden.

Bei diesem Verfahren spielt der Arm blos die Rolle eines feuchten Leiters.

Nicht allein bei der Berührung fester Leiter unter einander, sondern auch bei Berührung fester Leiter mit flüssigen entsteht bekanntlich Elektricität. Ich bin während der letzten Jahre mit der Messung der aus Berührung von Metallen und Flüssigkeiten

Digitized by Google

entstehenden elektrischen Spannungen beschäftigt gewesen, und werde die gewonnenen Resultate bald veröffentlichen. Anstatt des zu diesen Messungen vorgerichteten und bereits in meinen elektrischen Untersuchungen (Fünfte Abhandlung, Bd. IX. S. 11 der Abhandl. d. königl. sächs. Ges. der Wiss.) beschriebenen Apparates genügt im vorliegenden Falle, wo genaue und vergleichbare Werthe nicht verlangt werden, die folgende einfache Vorrichtung.

Auf dem obern Rande eines gefirnissten gläsernen hohlen Cylinders waren mittelst Schellack drei abgerundete Messingspitzen befestigt. Sie dienten als Träger einer auf der obern Seite gefirnissten Kupferplatte, die an einer Stelle ihres Randes mit einem metallischen Ansatze zur Ableitung, an einer andern aber mit einem isolirenden Handgriffe versehen war. Neben jenem Glascylinder erhoben sich auf demselben Holzfusse, auf welchem das Glas festgekittet war, drei Stäbe, die mit ihrem oberen Ende die Metallplatte etwas überragten. Auf diese wurde ein abgedrehter Holzring gelegt, dessen untere Fläche einen kleinen Vorsprung von gleichem Durchmesser mit der Kupferplatte trug. Ueber diesen Vorsprung war ein Stück vegetabilischen Pergaments straff ausgespannt. Lag der Ring auf den drei Stäben, so stand die Pergamentfläche um etwa 2 Millimeter von der Metallfläche ab; auf das Pergament wurde etwas Wasser gegossen. Wurde nun ein Finger in dieses Wasser getaucht, und ein befeuchteter Finger derselben oder der andern Hand an den seitlichen Fortsatz der Kupferplatte angelegt, so entstand einerseits durch die Berührung des Kupfers mit dem Wasser am Finger eine elektrische Spannung, und andererseits bildeten die durch den Körper leitend verbundenen Kupfer- und Pergamentflächen einen Condensator, dessen trennende Schicht aus Luft bestand.

Es leuchtet ein, dass dieser Versuch ganz dem von Meissner angestellten entspricht, nur in vereinfachter Gestalt; die feuchte Pergamentfläche vertrat die Stelle des Armes; sie wirkte aber besser condensirend, weil alle ihre Theile gleichweit von der Kupferfläche abstanden, was bei der rundlichen Form des Armes nicht möglich ist.

Wurde nun erst die Ableitung von der Kupferplatte entfernt, und sodann der Holzring mit dem feuchten Pergament abgehoben, so trat die durch die Condensation in der Kupfer-

Digitized by Google

platte gebundene Elektricität in den freien Zustand, und konnte an einem geeigneten Elektrometer beobachtet und gemessen werden.

Als Elektrometer diente das von mir schon vor langer Zeit construirte und in diesen Berichten für 1850 S. 71 (vergl. Abhandlungen der K. S. Ges. der Wissensch. Bd. V. S. 392 ff.) beschriebene Instrument, das an Bequemlichkeit und Empfindlichkeit, an Sicherheit und Genauigkeit der Beobachtung Nichts zu wünschen übrig lässt.

Wurde nun die Kupferplatte nach dem Abheben des Pergamentes mittelst der isolirenden Handhabe an das obere Ende des das Goldblättchen im Elektrometer tragenden Stäbchens gelegt, so entstand ein negativer Ausschlag, der auf den Theilstrichen des Ocularmikrometers durch Umlegen des Commutators wiederholt gemessen werden konnte.*)

In der That zeigt hier also die Kupferplatte dieselbe Elektricität, wie Meissner sie bei seinen Versuchen mittelst des über die obere messingene Condensatorplatte gehaltenen Armes erhielt.

Beiläufig sei erwähnt, dass bei dem vorstehenden Versuche nicht blos durch die Berührung des Wassers mit dem kupfernen Fortsatze der Platte, sondern auch durch die Berührung der innern Kupfermasse mit der auf ihrer Oberfläche unter dem Firnisse befindlichen schwachen Oxydschicht die den Condensator ladende elektrische Spannung erzeugt wurde.

Das Vorstehende wird hinreichen, um die Ueberzeugung zu begründen, dass die von Meissner bei Annäherung des Armes an den Condensator gesammelte Elektricität allein der Berührung des Metalles mit dem Finger, als feuchtem Leiter, ihre Entstehung verdankt, und bedarf es daher nicht erst noch der Hinweisung auf die Unmöglichkeit, von den im Muskel vorhandenen äusserst schwachen elektrischen Strömen relativ so bedeutende Spannungserscheinungen zu erhalten. Meissner hat allerdings an diese Schwierigkeit selbst schon erinnert, dieselbe aber dadurch beseitigen zu können gemeint, dass er sich »den Muskel vorstellt in elektrischer Beziehung als einen Apparat,

*) Vergl. über dies Verfahren Abhandl. der K. S. Ges. der Wissenschaft. Bd. V, S. 400. — Pogg. Ann. Bd. 84, S. 86; Bd. 103, S. 213.

Digitized by Google

dessen Eigenthümlichkeit etwa die Mitte hält zwischen der Volta-Säule und der trocknen Säule.«

Bei Versuchen mit so schwachen elektrischen Kräften, wie sie durch die Berührungen zweier heterogener Leiter entstehen, muss man sich sehr vor einer Fehlerquelle schützen, die gewöhnlich gar nicht beachtet wird, nämlich vor der Vertheilungswirkung seitens der elektrisirten Luft des Zimmers. Als ich z. B. die obigen Versuche mit dem aus der Kupferplatte und dem darüber befindlichen feuchten Pergamente bestehenden Condensator ausführen wollte, gelang es nicht, die auf den drei Messingspitzen, ohne Bedeckung mit dem Holzringe und Pergamente, liegende Kupferplatte durch Ableitung zur Erde in einen solchen Zustand zu bringen, dass wenn sie mittelst des isolirenden Griffes von ihrem auf einem Tische stehenden Träger abgehoben und an das ungefähr zwei Fuss davon entfernt auf dem Fensterbrette aufgestellte Elektrometer, dessen Goldblättchen zuvor durch eben dieselbe Ableitung mit der Erde verbunden gewesen, gebracht wurde, kein Ausschlag des Goldblättchens im Elektrometer entstand; und doch war die Luft des Zimmers durch eine kleine zur Erde abgeleitete und in der Mitte der Stube brennende Spirituslampe möglichst von Elektricität befreit. Der Ausschlag im Elektrometer beim Anlegen der Kupferplatte hatte seinen Grund in der Verschiedenheit der elektrischen Atmosphäre (es möge der Kürze wegen dieser Ausdruck gestattet sein) oberhalb des Tisches, auf welchem der Träger für die Platte stand, und oberhalb des Elektrometers. Um ihn zu beseitigen blieb nur übrig, ein grosses dünnes Messingblech oberhalb des Trägers in ungefähr anderthalb Fuss Abstand auszuspannen und zur Erde abzuleiten.

Während nun bei dem Versuche, wo Meissner seinen Arm der Metallplatte blos näherte, die Quelle der Elektricität in der Berührung des Metalles mit dem feuchten Leiter (möglicherweise zum Theil auch in einer Vertheilungswirkung seitens der elektrischen Luft des Zimmers) zu suchen ist, findet bei dem oben zuerst beschriebenen Verfahren, wobei die Metallplatte auf die Haut aufgesetzt wird, ein Vorgang statt, der angemessen jetzt noch mit einem besondern Namen bezeichnet wird. Die bei diesem Verfahren erzeugte Elektricität entsteht durch Druck, ähnlich wie beim Andrücken einer Metallplatte gegen Wachstaffet, gegen nicht vulkanisirten Kautschuck oder gegen ein

Digitized by Google

trocknes zusammengefaltetes Handtuch. Die Art und Weise, wie hiebei Elektricität erregt wird, ist bisjetzt nicht genauer bekannt; ich werde mir es angelegen sein lassen, später derselben weiter nachzuforschen. Soviel aber steht fest, dass bei den von Meissner angestellten Versuchen die elektrischen Ströme in den unter der Haut liegenden Muskelbäuchen ohne allen Einfluss sind. Meissner selbst äussert auf S. 269, dass »bei den relativ starken Ladungen, wie man sie erhält, wohl nur Reibung, allerhöchstens noch etwa Druck als Elektricität erregendes Moment in Frage kommen könnte.« Da indess ein stärkeres Drücken die Ladung nicht vermehrte, und ausserdem auch durch blosse Annäherung dieselbe Elektricität erregt wurde, so glaubte er von einer Erregung durch Druck absehen zu können.

Schliesslich möge ausser den bisher besprochenen Erscheinungen mit wenigen Worten noch gewisser Ladungen gedacht werden, die Meissner auf einem Isolirstuhle stehend aus der Vola und der Planta dem Elektrometer oder Condensator mitzutheilen vermochte. Er sagt: »Unter günstigen Umständen kann das Säulenelektroskop bei Berührung des letzteren mit den Fingern vom Isolatorium aus schwache Ladungen anzeigen. Für gewöhnlich aber muss man sowohl das Isolatorium wie den Condensator in seiner gewöhnlichen Anwendungsweise zu Hülfe nehmen. Die Nothwendigkeit der beiden genannten Bedingungen beweist zur Genüge, dass es sich um Ladung durch Mittheilung durch ausströmende Elektricität handelt.« Später fügt er hinzu: »Was nun die Beschaffenheit dieser Ladungen betrifft, so sind dieselben sowohl hinsichtlich der Stärke als auch hinsichtlich der Qualität wechselnd.« Einen bestimmten Zusammenhang zwischen jenen Quantitäts- und Qualitätswechseln mit physiologischen Processen hat Meissner nicht wahrgenommen. Auch diese Ladungen glaubt Meissner aus den in den Muskeln vorhandenen Strömen herleiten zu können.

Indess stehen diese Erscheinungen ebensowenig, wie die früher behandelten, mit jener Elektricität der Muskeln in irgend einer Verbindung. Die Bewegung des Goldblättchens eines Elektrometers durch Anlegen des Fingers oder der Hand vom Isolatorium aus erfolgt, wofern sie nicht durch Elektricität hervorgerufen wird, welche am Körper durch Reibung oder Druck erzeugt ist, durch eine Aenderung der Vertheilungswirkung seitens der umgebenden Luft, welche eine nothwendige Folge

ist von der Aenderung der leitenden Massen über und neben dem das Goldblättchen tragenden Metallstäbchen. Die Ladungen des Condensators aber können ihr Entstehen ausser den soeben genannten Quellen auch noch der Berührung heterogener Leiter verdanken, wenn die beiden Condensatorscheiben in ungleicher Weise ableitend berührt werden. Eine specielle Erörterung dieser Vorgänge dürfte nach den im Vorstehenden gegebenen Erläuterungen nicht mehr nöthig sein.

Digitized by Google

W. Scheibner, *Ueber periodische Functionen.*

1.

»Wenn φx eine Function von solcher Beschaffenheit be»deutet, dass der Quotient $\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x}$ sich nicht ändert, wenn man »den Werth von x mit entgegengesetztem Vorzeichen versieht, »so ist das Product $fx = \varphi x\,\varphi(h-x)$ eine periodische Function »mit dem Periodicitätsmodul h, welche bei Vertauschung des »Vorzeichens von x gleichfalls ungeändert bleibt«.

Der Beweis dieses Satzes liegt auf der Hand, denn aus der vorausgesetzten Gleichung

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x} = \frac{\varphi(h-x)}{\varphi(-x)}$$

folgen durch Wegschaffung der Nenner unmittelbar die geforderten Relationen

$$f(x+h) = f(-x) = fx.$$

Man wird folglich mittelst jeder Auflösung einer Functionalgleichung von der Form

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x} = \text{einer geraden Function von } x$$

eine periodische Function fx erhalten können. Setzt man dagegen den Quotienten $\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x}$ einer ungeraden Function von x gleich, mit anderen Worten, wenn dieser Quotient zugleich mit x sein Zeichen umkehrt, so wird

$$f(x+h) = f(-x) = -fx,$$

und fx ist nicht mehr eine mit der Periode h, sondern erst mit der Periode $2h$ periodische ungerade Function. Solche Functio-

Digitized by Google

nen aber, welche durch Aenderung ihres Arguments um eine Constante h keine weitere Aenderung, als die Umkehr ihres Vorzeichens erleiden, mögen halbperiodisch in Bezug auf h heissen.

Die allgemeinste Lösung einer Functionalgleichung von der Form

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x}=X$$

erhält man, wenn man eine particuläre Lösung derselben mit einer willkürlichen Function von der Periode h multiplicirt. Denn wenn zwei Functionen $\varphi_1 x$ und $\varphi_2 x$ der vorgelegten Gleichung genügen, so folgt aus der Gleichheit

$$\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_1 x}=\frac{\varphi_2(x+h)}{\varphi_2 x},$$

dass der Quotient $\frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x}$ die Periode h haben muss. Es wird für unseren Zweck folglich ausreichen, der Functionalgleichung $\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x}=X$, wo X eine beliebig gegebene gerade oder ungerade Function bedeutet, irgendwie Genüge zu leisten.

Der einfachste Fall würde für

$$X=a=\text{const.}$$

eintreten, und hier erhält man leicht

$$\varphi x=a^{\frac{x}{h}},$$

zu welchem Werthe noch die Summe einer beliebigen (convergirenden) *Fourier*'schen Reihe von der Form

$$\Phi=\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2n x\pi i}{h}}$$

als Factor hinzutreten kann. Ferner ergibt sich

$$fx=\varphi x\,\varphi(h-x)=a,$$

ein weniger brauchbares Resultat, da selbstverständlich eine Constante mit jedem Modul periodisch ist.

2.

Setzt man ferner $\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x}=x$, so führt die Anwendung dieser Functionalgleichung auf Kreis- oder Exponentialfunctionen.

Digitized by Google

Sei der Einfachheit halber $h=1$, also

$$\varphi(x+1) = x\varphi x \;,$$

so wird für jede ganze Zahl n

$$\varphi x = \frac{\varphi(x+n)}{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \ldots x+n-1} \;,$$

also auch

$$\varphi x = \lim \frac{\varphi(x+n)}{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \ldots x+n-1} \;,$$

wenn n über alle Grenzen wächst. Für solche Werthe von n ist aber

$$\lim \frac{\varphi(x+n+1)}{\varphi(x+n)} = n$$

und setzt man hiernach

$$\lim \varphi(x+n) = c_n n^x \;,$$

wo c_n eine von n abhängige Constante bedeuten mag, so folgt

$$\varphi x = \lim \frac{c_n n^x}{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \ldots x+n-1} \;.$$

Für $x=1$ erhält man

$$\varphi 1 = \lim \frac{c_n n}{n!} \qquad \text{oder} \qquad c_n = (n-1)!\,\varphi 1$$

also

$$\varphi x = \varphi 1 \lim \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \ldots x+n-1}\, n^{x-1} \;,$$

welche Function unter der hier offenbar gestatteten Annahme $\varphi 1 = 1$ durch Γx bezeichnet wird.

Die Gleichung

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma x} = x$$

lässt sich sofort verificiren; es bliebe noch der Nachweis zu führen, dass das zur Definition der ΓFunction gebrauchte Product von unendlich vielen Factoren für beliebige (complexe) Werthe von x in der That eine angebbare Grenze habe. Will man diesen Beweis nicht als bekannt voraussetzen*), so kann man ihn führen, indem man zeigt, dass die Glieder der unbegrenzt fortgesetzten Reihe

---

*) Vergl. ausser der Schrift von *Gauss* über die hypergeometrische Reihe, welche das Princip des folgenden Beweises enthält, *Weierstrass* in *Crelle*'s Journal, Bd. 51, S. 1 flg.

Digitized by Google

$$\varphi(x,n) \quad \varphi(x,n+1) \quad \varphi(x,n+2) \ldots .$$

wo

$$\varphi(x,n) = \frac{1.2.3\ldots n}{x.x+1.x+2..x+n-1} n^{x-1} ,$$

sich einer bestimmten, von Null und Unendlich verschiedenen Grenze nähern.

Die Entscheidung darüber hängt von der Betrachtung des Quotienten

$$\frac{\varphi(x,n+1)}{\varphi(x,n)} = \frac{(n+1)^x}{(x+n)n^{x-1}}$$

ab, wofür die für grosse Werthe von n jedenfalls convergirende Reihenentwickelung

$$\frac{\varphi(x,n+1)}{\varphi(x,n)} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} - \frac{x(x^2-1)}{3n^3} \ldots$$

erhalten wird. Setzt man

$$x = a+bi , \quad \frac{\varphi(x,n+1)}{\varphi(x,n)} = r_n e^{\varphi_n i} ,$$

so folgt

$$r_n \cos\varphi_n = 1 + \frac{a(a-1)-b^2}{2n^2} + \frac{p_1}{n^3} \ldots , \quad r_n \sin\varphi_n = \frac{(2a-1)b}{2n^2} + \frac{p'}{n^3} \ldots$$

folglich auch

$$r_n = 1 + \frac{a(a-1)-b^2}{2n^2} + \frac{q_1}{n^3} \ldots , \qquad \varphi_n = \frac{(2a-1)b}{2n^2} + \frac{q'}{n^3} \ldots$$

und es kommt jetzt darauf an, da

$$\frac{\varphi(x,n+p)}{\varphi(x,n)} = r_n r_{n+1} \ldots r_{n+p-1} e^{(\varphi_n + \varphi_{n+1} \ldots + \varphi_{n+p-1})i} ,$$

die Werthe zu untersuchen, welche einerseits das Product

$$R_p = r_n r_{n+1} \ldots r_{n+p-1}$$

und andererseits die Summe

$$\Phi_p = \varphi_n + \varphi_{n+1} \ldots + \varphi_{n+p-1}$$

mit wachsendem p annehmen.

Dass der Werth von Φ_p einer bestimmten endlichen Grenze zustrebt, ergibt sich leicht aus der Betrachtung, dass wenn

$$\lambda > \pm(2a-1)b > \mu ,$$

wo λ und μ zwei positive Grössen bedeuten mögen, n so gross angenommen werden kann, dass

Digitized by Google

$$\frac{\lambda}{n^2} > \pm 2\varphi_n > \frac{\mu}{n^2} .$$

Folglich hat man auch

$$\lambda\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\cdots+\frac{1}{(n+p-1)^2}\right) > \pm 2\Phi_p > \mu\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\cdots+\frac{1}{(n+p-1)^2}\right)$$

und hier convergirt die Reihe in der Parenthese bei unbegrenzt wachsendem p, während die Factoren λ und μ einander beliebig nahe angenommen werden dürfen. Für $(2a-1)b=0$ ist $\mu=0$ zu setzen.

Was den Nachweis für das Product R_p betrifft, so hat man zunächst zwei positive Grössen λ und μ aus der Ungleichung

$$-\lambda < \frac{a(a-1)-b^2}{2} < \mu$$

zu bestimmen, und kann dann n so gross annehmen, dass

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\lambda} < r_n < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\mu} ,$$

weil

$$1-\frac{\lambda}{n^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2n^4}\cdots < 1+\frac{a(a-1)-b^2}{2n^2}+\frac{q_1}{n^3}\cdots < 1+\frac{\mu}{n^2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2n^4}\cdots$$

Ist nun $a(a-1)>b^2$, so bilden für grosse Werthe von n die Moduln $R_1 R_2 \ldots$ eine Reihe wachsender Grössen, weil die Quotienten $\frac{R_{p+1}}{R_p}=r_{n+p}$ die Einheit übersteigen. Schreibt man die Ungleichung $r_n<\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\mu}$ unter der Form

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\mu} R_1 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mu} R_2 ,$$

so zeigt sich, dass die Grössen $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\mu} R_1, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mu} R_2, \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\mu} R_3 \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden. Da aber wegen $\mu>0$ die einzelnen Glieder dieser abnehmenden Reihe grösser bleiben, als die entsprechenden Glieder jener zunehmenden Reihe, während sie sich ihnen gleichzeitig unbegrenzt nähern, so folgt, dass die Moduln R_p nicht über alle Grenzen zunehmen können, sondern eine endliche, von Null verschiedene Grenze haben müssen.

Ein analoges Resultat ergibt sich für $a(a-1)<b^2$. Denn da alsdann die Quotienten $\frac{R_{p+1}}{R_p}=r_{n+p}$ die Einheit nicht er-

Digitized by Google

reichen, so bilden die Moduln R_1 R_2 . . . eine abnehmende Reihe. Aus der Ungleichung $r_n > \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^\lambda$ folgt aber

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda R_1 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda R_2 \; ,$$

so dass die zunehmende Reihe $\left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda R_1, \left(\frac{n}{n+1}\right)^\lambda R_2, \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\lambda R_3 \ldots$ construirt werden kann. Wiederum sind wegen $\lambda > 0$ die Glieder der letzteren kleiner, als jene der abnehmenden Reihe, so dass die Producte R_p einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze zustreben müssen. — Wenn endlich $a(a-1) = b^2$, so gelten die nämlichen Schlüsse, indem λ und μ positiv bleiben, nur dass die Abnahme oder Zunahme der Werthe R_1 R_2 . . . alsdann von dem Vorzeichen des ersten nicht verschwindenden Coefficienten q in der Entwickelung von r_n abhängt.

3.

Die Einführung der Function

$$\Gamma x = \lim \frac{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, n}{x \, . \, x+1 \, . \, x+2 \, . \, x+n-1} n^{x-1} \quad \text{für } n = \infty$$

ist somit vollständig legitimirt, und es kann dieselbe für endliche Werthe von x nur dann unendlich werden, wenn der Nenner von $\varphi(x,n)$ verschwindet, d. h. wenn x der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich wird.

Aus der eben aufgestellten, von *Gauss* herrührenden Definitionsgleichung der ΓFunction lassen sich die Eigenschaften derselben mit Leichtigkeit herleiten, ohne dass man die Werthe des Arguments beschränkenden Voraussetzungen zu unterwerfen braucht, wie in der Regel zu geschehen pflegt, wenn man von der Form des *Euler*'schen Integrals der zweiten Gattung ausgeht.*)

*) Ich habe bei einer früheren Gelegenheit (Jahrg. 1856 der Berichte S. 40 flg.) gezeigt, wie man das erwähnte Integral von jenen beschränkenden Voraussetzungen befreien kann, wenn man die Variable nicht durch Null hindurchgehen, sondern auf complexem Wege zwischen den Integrationsgrenzen variiren lässt. Vergl. auch *Riemann* in den Monatsberichten der Berliner Akademie Jahrg. 1859 S. 672, und wie ich beim

Digitized by Google

Schreibt man die obige Gleichung unter der Form

$$\Gamma x = \lim_{n=\infty} \frac{n^x \Gamma n}{x.x+1 \ldots x+n-1},$$

so folgt der Satz, dass für wachsende Werthe von n die Grenzgleichung

$$x.x+1 \ldots x+n-1 \frac{\Gamma x}{\Gamma n} = \frac{\Gamma x+n}{\Gamma n} = n^x$$

erfüllt wird. Es ist wichtig, einen solchen asymptotischen Werth für Γx selbst abzuleiten.

Die Differentiation der ebengefundenen Gleichung ergibt

$$\lim_{n=\infty} \frac{d \log \Gamma(x+n)}{dx} = \log n$$

und setzt man $y=x+n$, so kann man dafür auch schreiben

$$\frac{d \log \Gamma y}{dy} = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma y} = \log y + \chi y \quad ,$$

wo χy sich der Null nähert, wenn der reelle Theil von y über alle Grenzen wächst. Wird y um 1 vermehrt, so erhält die linke Seite der Gleichung den Zuwachs $\frac{1}{y}$, folglich hat man zur Bestimmung von χy die Gleichung

$$\chi(y+1) - \chi y = \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4} \mp \cdot \cdot$$

zu erfüllen. Die Auflösung derselben mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten ergibt leicht die bekannte halbconvergirende, nach den absteigenden Potenzen von y fortschreitende Reihe

$$\chi y = -\frac{1}{2y} - \frac{1}{12y^2}\left\{1 - \frac{1}{10y^2} + \frac{1}{21y^4} - \frac{1}{20y^6} + \frac{1}{11y^8} - \frac{691}{2730y^{10}} + \frac{1}{y^{12}} \mp \cdot \cdot\right\}$$

mit dem allgemeinen Gliede $(-1)^n B_n \frac{1}{2ny^{2n}}$. Die Hinzufügung einer willkürlichen Function mit der Periode 1 ist unstatthaft wegen $\lim \chi y = 0$.

Um zu den entsprechenden Relationen für $\log \Gamma y$ zu gelangen, integriren wir nach y und erhalten

---

Drucke dieser Notiz hinzufügen kann, die lesenswerthe Habilitationsschrift des Dr. *Hankel* über die *Euler*'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.

Digitized by Google

$$\log \Gamma y = \log c + y(\log y - 1) - \tfrac{1}{2}\log y + \frac{1}{12y}\left\{1 - \frac{1}{30y^2} + \frac{1}{105y^4} - \frac{1}{140y^6} \pm \cdots\right\}$$

wo $\log c$ als Integrationsconstante hinzugefügt ist, deren Werth zu bestimmen bleibt. Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird

$$\lim \Gamma y = c e^{-y} y^{y-\frac{1}{2}}$$

wenn y über alle Grenzen wächst.

Man kann mittelst dieser Grenzgleichung die Definitionsgleichung der ΓFunction transformiren. Schreibt man nämlich n statt y, so wird

$$\Gamma x = c \lim \frac{e^{-n}\, n^{n+x-\frac{1}{2}}}{x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \,..\, x+n-1}$$

In dieser Gestalt eignet sich die Gleichung vorzugsweise zur Ableitung des für die ΓFunction geltenden Multiplicationstheorems.

Bildet man nämlich das Product von m Factoren

$$\Pi_{p=0}^{m-1} \Gamma\left(x + \frac{p}{m}\right) = c^m \lim \frac{e^{-mn}\, m^{mn}\, n^{mn+mx-\frac{1}{2}}}{mx \,.\, mx+1 \ldots mx+mn-1}$$

und vergleicht damit den Ausdruck für

$$\Gamma(mx) = c \lim \frac{e^{-mn}(mn)^{mn+mx-\frac{1}{2}}}{mx \,.\, mx+1 \ldots mx+mn-1},$$

so ergibt sich die zuerst von *Gauss* bewiesene Formel*)

$$\Pi_{p=0}^{m-1} \Gamma\left(x + \frac{p}{m}\right) = c^{m-1}\, m^{-mx+\frac{1}{2}}\, \Gamma(mx) \,.$$

Der Werth der Constante

$$c = \sqrt{2} \,.\, \Gamma\tfrac{1}{2}$$

bestimmt sich hier leicht, wenn man $x=1$, $m=2$ setzt.

---

*) Für $x=1$ ist das in der obigen Gleichung enthaltene Theorem von *Euler* erfunden worden, vergl. *Lacroix*, Traité T. III. S. 460 der ersten Ausgabe. *Legendre* gibt den allgemeinen Satz erst im 2. Bande seiner Exercices, S. 23, während *Gauss*' Abhandlung das Datum des 30. Januar 1812 trägt.

Digitized by Google

4.

Wenn die Einmischung der halbconvergirenden Entwickelung der Strenge des Beweises Eintrag thun sollte, so kann man die Gleichung des *Taylor*'schen Theorems zu Grunde legen

$$\log \Gamma x = \log \Gamma(x+h) - h\,\frac{d\log \Gamma x}{dx} - \tfrac{1}{2}h^2 H_2 - \tfrac{1}{3}h^3 H_3 - \text{etc.}$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist

$$H_m = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^m \log \Gamma x}{dx^m} = (-1)^m \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^m}$$

Integrirt man auf beiden Seiten nach h zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{2}$, so fallen die in die ungeraden Potenzen von h multiplicirten Glieder fort, und es ergibt sich die convergirende Reihenentwickelung

$$\log \Gamma x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(x+h)\,dh - \frac{1}{2.3.2^2} H_2 - \frac{1}{4.5.2^4} H_4 - \dots$$

welchem Ausdruck leicht verschiedene Formen gegeben werden können.*)

Die durch H_m bezeichneten Summen nähern sich mit wachsendem x der Null, und man erhält die gesuchte asymptotische Gleichung unter der Form

$$\lim.\log \Gamma x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(x+h)\,dh = u\ .$$

Zur Bestimmung des Integrals u differentiiren wir nach x, wodurch

$$\frac{du}{dx} = \log \Gamma(x+\tfrac{1}{2}) - \log \Gamma(x-\tfrac{1}{2}) = \log(x-\tfrac{1}{2})\ ,$$

folglich

$$u = \int \log(x-\tfrac{1}{2})\,dx = (x-\tfrac{1}{2})\{\log(x-\tfrac{1}{2}) - 1\} + \log c\ ,$$

wenn die Constante $\log c$ den Werth von u für $x=\frac{1}{2}$ darstellt.

---

*) Vergl. *Crelle*'s Journal, Bd. 29, S. 209. — Was die Convergenz der obigen Reihe betrifft, so folgt leicht aus allgemeinen Sätzen, dass dieselbe an die Bedingung mod. $(x+n) > \frac{1}{2}$ geknüpft ist, wobei n jede ganze positive Zahl incl. der Null bedeuten darf.

Digitized by Google

Durch den Uebergang zu den Zahlen folgt

$$\lim \Gamma x = c e^{-x+\frac{1}{2}} (x-\tfrac{1}{2})^{x-\frac{1}{2}}$$

oder was dasselbe ist wegen $e^a = \lim \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$,

$$\lim \Gamma x = c e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}}$$

mit dem Früheren übereinstimmend. Endlich erhält man ohne Mühe durch directe Integration

$$\log c = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(h+\tfrac{1}{2})\, dh = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left\{\Gamma(\tfrac{1}{2}+h) . \Gamma(\tfrac{1}{2}-h)\right\} dh$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{2\pi}{2\cos h\pi}\, dh = \tfrac{1}{2} \log 2\pi .$$

5.

Ohne uns bei den mannichfachen, für die ΓFunction geltenden Reihenentwickelungen aufzuhalten,*) heben wir hier eine einzige hervor, welche für alle Werthe von x convergent bleibt.**)

Betrachtet man nämlich das Product

$$(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right) \ldots \left(1+\frac{x}{n-1}\right) n^{-x} = \Pi(x,n) ,$$

welches vermöge der Definitionsgleichung der ΓFunction mit wachsendem n sich der Grenze $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ nähert, so ist ersichtlich,

*) Vergl. unter Anderem die in meiner Abhandlung »über die Entwickelung der Störungsfunction« S. 25 abgeleiteten Formeln. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass die Coefficienten der betreffenden Reihen a. a. O. etwas einfacher werden, wenn man nach den absteigenden Potenzen von $i \pm \frac{\varepsilon-1}{2}$ entwickelt. Dadurch erhält man z. B. statt der Reihen auf S. 16 den Ausdruck

$$\frac{\Gamma i+\frac{1}{2}}{\Gamma i+1} = \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{4}}} \left\{1 - \frac{1}{64(i+\frac{1}{4})^2} + \frac{21}{8192(i+\frac{1}{4})^4} - \frac{671}{524288(i+\frac{1}{4})^6} \pm \ldots\right\}.$$

**) *Weierstrass* in der bereits citirten Abhandlung in *Crelle*'s Journal, Bd. 51, S. 7.

dass man durch Multiplication der einzelnen Factoren, von denen der letzte in die Exponentialreihe

$$n^{-x} = 1 - x\log n + \tfrac{1}{2}x^2\log^2 n - \tfrac{1}{6}x^3\log^3 n \pm \text{etc.}$$

sich auflösen lässt, eine nach den Potenzen von x fortschreitende Entwickelung ableiten kann, welche für alle endlichen Werthe von x unbedingt convergirt. Wir dürfen also setzen:

$$\Pi(x,n) = 1 + \alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)}\frac{x^2}{2!} + \alpha_3^{(n)}\frac{x^3}{3!} + \text{etc.}\;,$$

wo die Coefficienten $\alpha^{(n)}$ von n abhängen. Lässt man n über alle Grenzen wachsen, so müssen für beliebige Werthe von x mit $\Pi(x,n)$ auch die Glieder der rechten Seite einer bestimmten Grenze sich nähern, und man erhält die Reihenentwickelung

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = 1 + \alpha_1 x + \tfrac{1}{2}\alpha_2 x^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_3 x^3 + \text{etc.}\;,$$

in welcher die Coefficienten α bestimmten numerischen Werthen gleich sind. So wird z. B.

$$\alpha_1 = \lim\alpha_1^{(n)} = \lim\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} .. + \frac{1}{n-1} - \log n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

wofür die numerische Rechnung den Werth $+0.57721\;56649$ liefert. Wir dürfen denselben, wie die Differentiation augenblicklich ergibt, durch $-\Gamma'(1)$ bezeichnen.*)

Zur Berechnung der folgenden Coefficienten lassen sich geeignete Formeln entwickeln, wenn man die Logarithmen einführt. Denn da

$$\log\Pi(x,n) = -x\log n + \sum_{m=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{x}{m}\right)\;,$$

so findet man leicht

$$\log\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \alpha_1 x - \tfrac{1}{2}s_2 x^2 + \tfrac{1}{3}s_3 x^3 \mp \text{etc.}$$

wo

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$$

Die Werthe dieser Summen können als bekannt vorausgesetzt werden. Alsdann wird

*) Die Berechnung der Constanten des Integrallogarithmus auf 40 Decimalstellen siehe bei *Gauss*, disquis. general. p. 36.

Digitized by Google

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\alpha_1 x - \frac{1}{2}s_2 x^2 + \frac{1}{3}s_3 x^3 + \dots}$$

$$= 1 + \alpha_1 x - \tfrac{1}{2}s_2 x^2 + \tfrac{1}{3}s_3 x^3 - \tfrac{1}{4}s_4 x^4 + \tfrac{1}{5}s_5 x^5 - \tfrac{1}{6}s_6 x^6 \pm \dots$$

$$+ \frac{1}{2}x^2\left\{\alpha_1^2 - \alpha_1 s_2 x + \left(\tfrac{1}{4}s_2^2 + \tfrac{2}{3}\alpha_1 s_3\right)x^2 - \left(\tfrac{1}{3}s_2 s_3 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 s_4\right)x^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\tfrac{1}{9}s_3^2 + \tfrac{1}{4}s_2 s_4 + \tfrac{2}{5}\alpha_1 s_5\right)x^4 \dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{3!}x^3\left\{\alpha_1^3 - \tfrac{3}{2}\alpha_1^2 s_2 x + \left(\tfrac{3}{4}\alpha_1 s_2^2 + \alpha_1^2 s_3\right)x^2 - \left(\tfrac{1}{8}s_2^3 + \tfrac{3}{4}\alpha_1^2 s_4\right)x^3 \dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{4!}x^4\left\{\alpha_1^4 - 2\alpha_1^3 s_2 x + \left(3\alpha_1^2 s_2^2 + \tfrac{4}{3}\alpha_1^3 s_3\right)x^2 \dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{5!}x^5\left\{\alpha_1^5 - \tfrac{5}{2}\alpha_1^4 s_2 x \dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{6!}x^6\left\{\alpha_1^6 \dots\right\}$$

$$+ \text{ etc.}$$

woraus durch Vergleichung mit dem Früheren die Coefficientengleichungen hervorgehen:

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 - s_2$$
$$\alpha_3 = \alpha_1^3 - 3\alpha_1 s_2 + 2s_3$$
$$\alpha_4 = \alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 8\alpha_1 s_3 - 6s_4$$
$$\alpha_5 = \alpha_1^5 - 10\alpha_1^3 s_2 + 15\alpha_1 s_2^2 + 20\alpha_1^2 s_3 - 20 s_2 s_3 - 30\alpha_1 s_4 + 24 s_5$$
$$\alpha_6 = \alpha_1^6 - 15\alpha_1^4 s_2 + 90\alpha_1^2 s_2^2 + 40\alpha_1^3 s_3 - 15 s_2^3 - 90\alpha_1^2 s_4 +$$
$$+ 40 s_3^2 + 90 s_2 s_4 + 144\alpha_1 s_5 - 120 s_6$$

u. s. w.

Aehnliche Formeln kann man für die Entwickelung von $\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$ nach den Potenzen von x ableiten, wenn man von dem Producte

$$(1+2x)\left(1+\frac{2x}{3}\right)\left(1+\frac{2x}{5}\right)\dots\left(1+\frac{2x}{2n-1}\right)n^{-x} = P(x,n)$$

ausgeht und hier n über alle Grenzen wachsen lässt. In der Reihenentwickelung

$$\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} = 1 + \beta_1 x + \frac{1}{2!}\beta_2 x^2 + \frac{1}{3!}\beta_3 x^3 \dots$$

hängen die Coefficienten β von den Summen

$$\sigma_m = 2^m\left\{1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} \dots\right\} = (2^m - 1)s_m$$

ab, und werden durch ganz analoge Ausdrücke gefunden, wie

Digitized by Google

vorher die Coefffcienten α. Indess kann man auch die aus dem Multiplicationstheoreme folgende Gleichung

$$\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(x+1)} = \frac{2^{2x}}{\Gamma(2x+1)}$$

d. i.

$$\left(1+\alpha_1 x+\frac{1}{2!}\alpha_2 x^2 \,.\,.\right)\left(1+\beta_1 x+\frac{1}{2!}\beta_2 x^2 \,.\,.\right) =$$
$$=\left(1+2\alpha_1 x+\frac{1}{2!}4\alpha_2 x^2 ..\right)\left(1+2x\log 2+\frac{1}{2!}4x^2\log^2 2..\right)$$

benutzen, um von den α direct zu den β überzugehen. So erhält man z. B.

$$\beta_1 = \alpha_1 + 2\log 2 = 1.96351\ 00260\ ,$$

wofür man wiederum den logarithmischen Differentialquotienten $-\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}}$ schreiben darf.

Indessen zeigen die numerischen Werthe der Coefficienten α und β, *) dass die betreffenden Reihen zur wirklichen Berechnung der Functionen Γx und $\Gamma(x+\frac{1}{2})$ nur für kleine Werthe von x geeignet sind. Es tritt hier also derselbe Fall ein, wie bei den trigonometrischen und Exponentialfunctionen, deren Werthe gleichfalls durch andere Mittel bequemer erhalten werden, als durch Berechnung der stets convergirenden und darum analytisch werthvollen Potenzreihen.

6.

Die Summation der binomischen Reihe

$$f(x,h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma x+1}{\Gamma x-p+1\ \Gamma p+1}\, h^p = (1+h)^x$$

beruht bekanntlich auf dem Stattfinden der Gleichung

$$f(x+y) = fx . fy$$

oder

$$\sum_n \frac{\Gamma x+y+1}{\Gamma x+y-n+1\ \Gamma n+1}\, h^n = \sum_p\sum_q \frac{\Gamma x+1\ \Gamma y+1}{\Gamma x-p+1\ \Gamma y-q+1\ \Gamma p+1\ \Gamma q+1}\, h^{p+q}.$$

Setzt man $n=p+q$, so ergibt sich daraus

*) Am Schlusse ist eine kleine Tafel einiger numerischen Werthe beigefügt.

Digitized by Google

$$\frac{\Gamma x+y+1}{\Gamma x+y-n+1\ \Gamma n+1} = \sum_p \frac{\Gamma x+1\ \Gamma y+1}{\Gamma x-p+1\ \Gamma y-n+p+1\ \Gamma p+1\ \Gamma n-p+1}$$

oder

$$\frac{\Gamma x+y+1\ \ \Gamma y-n+1}{\Gamma x+y-n+1\ \Gamma y+1} = 1 + \frac{n}{1}\ \frac{x}{y-n+1} + \frac{n.n-1}{1.2}\ \frac{x.x-1}{y-n+1.y-n+2} + \text{etc.}$$

Wenn der Einfachheit halber die Variable y mit $y+n-1$ vertauscht und dann z statt $x+y$ geschrieben wird, so folgt

$$\frac{\Gamma y\ \Gamma z+n}{\Gamma z\ \Gamma y+n} = 1 + \frac{n}{1}\ \frac{z-y}{y} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\ \frac{z-y.z-y-1}{y\ .\ y+1} + \text{etc.}$$

Die Reihe auf der rechten Seite bricht beim $n$ten Gliede ab, während die linke Seite dem endlichen Producte

$$\frac{z.z+1.z+2..z+n-1}{y.y+1.y+2..y+n-1}$$

gleich wird. *Gauss* hat nachgewiesen, dass die Gleichung in der obigen Gestalt richtig bleibt, auch wenn n keine ganze positive Zahl bedeutet.*) Wir stellen uns die Aufgabe, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen die Summe

$$\sum_{p=0}^{m-1} s_p = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{x.x-1..x-p+1}{1.\ 2\ ...\ p} \cdot \frac{z-y.z-y-1..z-y-p+1}{y\ .\ y+1\ ..\ y+p-1}$$

mit wachsendem m den Quotienten $\frac{\Gamma y\ \Gamma x+z}{\Gamma x+y\ \Gamma z}$ zur Grenze hat.

In jedem Falle besteht die identische Gleichung

$$\sum_{p=0}^{m-1} (l_{p+1}s_{p+1} - l_p s_p) = l_m s_m - l_0 s_0\ ,$$

wo l_p eine beliebige Function des Index p bedeuten mag. Schreibt man p für l_p, und substituirt den Werth des Quotienten

$$\frac{s_{p+1}}{s_p} = \frac{x-p\ .\ z-y-p}{p+1\ .\ y+p}\ ,$$

so ergibt sich

$$\sum_{p=0}^{m-1} \left\{ \frac{x-p\ .\ z-y-p}{y+p} - p \right\} s_p = m s_m$$

oder mittelst einer leichten Transformation

$$\sum_{p=0}^{m-1} \left\{ \frac{(x+y)z}{y+p} - (x+z) \right\} s_p = m s_m\ .$$

*) Disquisit. generales . . . p. 28.

Bezeichnet man durch

$$s'_p = \frac{y}{y+p}\, s_p$$

den Werth, in welchen s_p übergeht, wenn man y und z um 1 vermehrt, so erhält man nach Division durch $x+z$

$$\frac{(x+y)z}{y(x+z)} \sum_{p=0}^{m-1} s'_p = \sum_{p=0}^{m-1} s_p + \frac{ms_m}{x+z} ,$$

und wenn man hier m über alle Grenzen wachsen lässt:

$$\frac{(x+y)z}{y(x+z)} \sum_{p=0}^{\infty} s'_p = \sum_{p=0}^{\infty} s_p + \frac{1}{x+z} \lim ms_m .$$

Zur Ermittelung des Werthes von $\lim ms_m$ hat man zunächst

$$ms_m = -x\,\frac{1-x\,.\,2-x\,..\,m-1-x}{1\,.\,2\,..\,m-1} \cdot \frac{y-z\,.\,y-z+1\,..\,y-z+m-1}{y\,.\,y+1\,..\,y+m-1}$$

und mit Benutzung der Grenzgleichungen des Art. 4:

$$\lim ms_m = \frac{\Gamma y}{\Gamma(-x)\,\Gamma(y-z)}\, m^{-(x+z)} \text{ für } m=\infty .$$

Dieser Werth verschwindet, sobald der reelle Theil von $x+z$ positiv ist, oder sobald die Argumente der ΓFunctionen im Nenner, d. h. die Grössen $y-z$ oder $-x$ einer ganzen negativen Zahl gleich sind. Alsdann wird aber

$$\sum_0^{\infty} s_p = \frac{(x+y)z}{y(x+z)} \sum_0^{\infty} s'_p$$

und wenn man hier wiederholt $y+1$ statt y, $z+1$ statt z schreibt:

$$\sum_0^{\infty} s'_p = \frac{(x+y+1)(z+1)}{(y+1)(x+z+1)} = \sum_0^{\infty} s''_p$$

$$\sum_0^{\infty} s''_p = \frac{(x+y+2)(z+2)}{(y+2)(x+z+2)} = \sum_0^{\infty} s'''_p$$

u. s. w. Da man diese Gleichungen beliebig weit fortsetzen darf, so folgt

$$\sum_0^{\infty} s_p = \frac{x+y\,.\,x+y+1\,..\,x+y+n-1}{x+z\,.\,x+z+1\,..\,x+z+n-1} \cdot \frac{z\,.\,z+1\,...\,z+n-1}{y\,.\,y+1\,...\,y+n-1} \sum_0^{\infty} s^{(n)}_p ,$$

und wenn man zur Grenze übergeht:

$$\sum_0^{\infty} s_p = \frac{\Gamma y\,\Gamma(x+z)}{\Gamma(x+y)\,\Gamma z} ,$$

Digitized by Google

weil offenbar $\lim \sum_{p=0}^{\infty} s^{(n)}{}_p$ für wachsende Werthe von n auf die Einheit sich reducirt. Die Richtigkeit der *Gauss*'schen Gleichung ist somit streng nachgewiesen unter der Bedingung, dass $x+z$ einen positiven reellen Theil habe, oder dass x oder $z-y$ einer ganzen positiven Zahl gleich werden. Im letzteren Falle besteht die zu summirende hypergeometrische Reihe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, hat also unzweifelhaft für beliebige Werthe von $x+z$ eine Summe.

Der Quotient

$$(G) \,.\,.\quad \frac{\Gamma y \Gamma(x+z)}{\Gamma(x+y)\Gamma z} = 1 + \frac{x}{1} \cdot \frac{z-y}{y} + \frac{x.x-1}{1.\;2} \cdot \frac{z-y.z-y-1}{y\;.\;y+1} + \\ + \frac{x.x-1.x-2}{1.\;2\;.\;3} \cdot \frac{z-y.z-y-1.z-y-2}{y\;.\;y+1\;.\;y+2} + \text{etc.}$$

welcher vorstehend in eine convergirende Reihe entwickelt worden ist, hat die Eigenschaft, dass im Zähler und Nenner die Summe der Argumente der beiden ΓFunctionen die nämliche ist. Durch einfache Vertauschung der Buchstaben lassen sich, wie *Gauss* a. a. O. gezeigt hat, aus der gegebenen Entwickelung einige andere Reihen, theils für denselben Ausdruck, theils für seinen inversen Werth ableiten, bei denen wir hier nicht weiter verweilen wollen.

Lässt man x unendlich abnehmen, so wird, wie leicht zu sehen,

$$\lim_{x=0} \frac{\Gamma y \Gamma(x+z) - \Gamma(x+y)\Gamma z}{x\Gamma(x+y)\Gamma z} = \frac{z-y}{y} - \frac{1}{2}\,\frac{z-y.z-y-1}{y\;.\;y+1} + \\ + \frac{1}{3}\,\frac{z-y.\;z-y-1\;.z-y-2}{y\;.\;y+1\;.\;y+2} \mp \ldots$$

und wenn man nach den gewöhnlichen Regeln den Grenzwerth auf der linken Seite bestimmt:

$$\frac{\Gamma' y}{\Gamma y} - \frac{\Gamma' z}{\Gamma z} = \frac{y-z}{y} + \frac{1}{2}\,\frac{y-z.y-z+1}{y\;.\;y+1} + \frac{1}{3}\,\frac{y-z.y-z+1.y-z+2}{y\;.\;y+1\;.\;y+2} + \ldots$$

Die Formel wird endlich, wenn $z-y$ eine ganze positive Zahl bedeutet, während sie ihre Bedeutung verliert, wenn y einer negativen ganzen Zahl gleich wird. Ausserdem wird als Bedingung ihrer Convergenz erfordert, dass der reelle Theil von z positiv sei. Uebrigens kann man die Differenz der logarithmischen Differentialquotienten, wie bekannt, auch durch die Gleichung darstellen:

Digitized by Google

$$\frac{\Gamma' y}{\Gamma y}-\frac{\Gamma' z}{\Gamma z}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{y+2}\right)+\text{etc.}$$

$$=(y-z)\left\{\frac{1}{yz}+\frac{1}{(y+1)(z+1)}+\frac{1}{(y+2)(z+2)}+\text{etc.}\right\}$$

7.

Gehen wir von der Function $\varphi x=\Gamma x$ zur periodischen Function $fx=\varphi x\,\varphi(h-x)$ über, so ergibt sich wegen $h=1$

$$fx=\Gamma x\,\Gamma(1-x)=\lim\frac{(n-1)!\;(n-1)!}{x(1-x^2)(4-x^2)\ldots(\overline{n-1}^2-x^2)}\cdot\frac{n}{n-x}$$

$$=\frac{1}{x(1-x^2)(1-\frac{1}{4}x^2)(1-\frac{1}{9}x^2)\ldots}=\frac{\pi}{\sin x\pi}$$

und es ist $\sin x\pi$ in der That eine ungerade, halbperiodische Function mit dem Modul 1. Die Multiplication durch x zeigt, dass der Quotient $\frac{\sin x\pi}{x\pi}$ sich mit abnehmendem x der Einheit nähert.

Substituirt man in Gleichung (G) des vorigen Art. die Werthe

$$y=n \quad z=n-x$$

so folgt

$$\frac{\Gamma n\,\Gamma n}{\Gamma n-x\,\Gamma n+x}=1-\frac{x^2}{n}+\frac{x^2(x^2-1)}{2!\,n.n+1}-\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{3!\,n.n+1.n+2}\pm\text{etc.}$$

Aber

$$\frac{\Gamma n\,\Gamma n}{\Gamma n-x\,\Gamma n+x}=\frac{(n-1)!\quad(n-1)!}{x(1-x^2)(4-x^2)\ldots(\overline{n-1}^2-x^2)}\cdot\frac{1}{\Gamma x\,\Gamma(1-x)},$$

folglich

$$\sin x\pi=\pi x\,(1-x^2)\,(1-\tfrac{1}{4}x^2)\ldots1-\left(\frac{x}{n-1}\right)^2F(x,-x,n,1)\quad,$$

wenn zur Darstellung der obigen hypergeometrischen Reihe die *Gauss*'sche Bezeichnungsweise gewählt wird. Für $n=1$ folgt sofort

$$\sin x\pi=x\pi\left\{1-\frac{x^2}{1^2}+\frac{x^2.\,x^2-1}{2!\;\;2!}-\frac{x^2.\,x^2-1.\,x^2-4}{3!\;\;3!}\pm\ldots\right\}$$

nebst

$$\frac{x\pi}{\sin x\pi}=1+\frac{x^2}{1\pm x}+\frac{x^2(1\pm x)}{2!\,(2\pm x)}+\frac{x^2(1\pm x)(2\pm x)}{3!\;(3\pm x)}+\text{etc.}\quad,\quad \pm x<1\,.$$

Für $x=\frac{1}{2}$ gehen die unendlichen Producte hervor

Digitized by Google

$$f\tfrac{1}{2} = (\Gamma\tfrac{1}{2})^2 = \pi = 2.\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\cdots$$
$$= 4.\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdots$$

Auch hier sind nach dem Vorigen die Correctionsfactoren der endlichen Producte leicht zu bestimmen, und zwar erhält man

$$\pi = 2.\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdots\frac{4n^2}{4n^2-1}F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \text{ oder } F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, n+\tfrac{3}{2}).$$

und

$$\pi = 4.\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdots\frac{(2n-2)2n}{(2n-1)^2}F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \quad .$$

Für $n=0$ ergeben sich hieraus die Reihen

$$\pi = 2F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = 4F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

nebst

$$\frac{1}{\pi} = \tfrac{1}{2}F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1) = \tfrac{1}{4}F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1) = \tfrac{1}{4}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2) \quad .$$

Die Aenderung des Arguments x um den halben Modul führt auf die Gleichung der Cofunction

$$f(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\cos x\pi}$$

wofür wie oben leicht die Ausdrücke gefunden werden:

$$\cos x\pi = (1-4x^2)(1-\tfrac{4}{9}x^2)(1-\tfrac{4}{25}x^2)\ \ldots \text{ in inf.}$$
$$= (1-4x^2)(1-\tfrac{4}{9}x^2)\,..\,1-\left(\frac{2x}{2n-1}\right)^2 F(x, -x, n+\tfrac{1}{2}, 1)$$
$$= 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(4x)^2(x^2-1)}{4!}-\frac{(8x)^2(x^2-1)(x^2-4)}{6!} \pm \text{etc.}$$

nebst

$$\frac{1}{\cos x\pi} = \sec x\pi = \frac{x^2}{\tfrac{1}{2}\pm x}+\frac{x^2(1\pm x)^2}{2!(\tfrac{1}{2}\pm x)(\tfrac{3}{2}\pm x)}+\frac{x^2(1\pm x)^2(2\pm x)^2}{3!(\tfrac{1}{2}\pm x)(\tfrac{3}{2}\pm x)(\tfrac{5}{2}\pm x)} + \text{etc.}$$
$$\text{für } \pm x < \tfrac{1}{2} \; .$$

Der Cosinus ist folglich eine gerade und halbperiodische Function; der Quotient

$$\frac{f\tfrac{1}{2}fx}{f(x+\tfrac{1}{2})} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} x\pi} = \frac{1-(2x)^2.1-(\tfrac{2}{3}x)^2.1-(\tfrac{2}{5}x)^2\ldots}{x.1-x^2.1-(\tfrac{1}{2}x)^2.1-(\tfrac{1}{3}x)^2\ldots}$$

dagegen wird mit dem Modul $h=1$ periodisch.

Ferner erhält man ohne Schwierigkeit, dem oben abgeleiteten *Gauss*'schen Satze für die ΓFunction entsprechend, das Multiplicationstheorem

Digitized by Google

$$(2f\tfrac{1}{2})^{n-1} f(nx) = \Pi_{p=0}^{n-1} f\left(x+\frac{p}{n}\right)$$

oder

$$2\sin nx = \Pi_{p=0}^{n-1} 2\sin\left(x+\frac{p}{n}\pi\right) \quad .$$

Der für die Function $\frac{\pi}{\sin x\pi}$ gegebene Ausdruck lässt sich nach bekannten Regeln in Partialbrüche zerlegen. Wir wollen, um streng zu verfahren, zunächst den Quotienten

$$\frac{\varpi(x)}{x\,.\,1-x^2\,.\,1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\,\ldots\,1-\left(\frac{x}{n}\right)^2} = Q$$

betrachten, wo $\varpi(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $2n$ bedeuten mag. Die Zerfällung in Partialbrüche ergibt ein Aggregat von der Form

$$\frac{\lambda_0}{x}+\frac{\lambda_1}{1-x}+\frac{\lambda_2}{1-\frac{x}{2}}\,\ldots\,+\frac{\lambda_m}{1-\frac{x}{m}}\,\ldots\,+\frac{\lambda_n}{1-\frac{x}{n}}$$
$$+\frac{\lambda_{-1}}{1+x}+\frac{\lambda_{-2}}{1+\frac{x}{2}}\,\ldots\,+\frac{\lambda_{-m}}{1+\frac{x}{m}}\,\ldots\,+\frac{\lambda_{-n}}{1+\frac{x}{n}} \quad .$$

Hier wird

$$\varpi(0) = \lambda_0 \;, \quad \varpi(m) = 2m\lambda_m \Pi m \;, \quad \varpi(-m) = -2m\lambda_{-m}\Pi m$$

wo Πx zur Abkürzung für das Product

$$\frac{1}{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2}\, 1-x^2\,.\,1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\,\ldots\,1-\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

geschrieben ist. Wenn ϖx einer geraden Function gleich ist, so wird $\lambda_{-m} = -\lambda_m$, und man erhält etwas einfacher

$$Q = \frac{\lambda_0}{x}+\frac{2\lambda_1 x}{1-x^2}+\frac{4\lambda_2 x}{4-x^2}\,\ldots\,+\frac{2m\lambda_m x}{m^2-x^2}\,\ldots\,+\frac{2n\lambda_n x}{n^2-x^2} \quad .$$

Lässt man jetzt n über alle Grenzen wachsen, so geht die rechte Seite dieser Gleichung in eine unendliche Reihe über, deren Summe durch $\frac{\pi\,.\,\varpi(x)}{\sin x\pi}$ gegeben ist. Gleichzeitig wird

$$\Pi x = \frac{\sin x\pi}{x\pi\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)}$$

und da

$$\frac{\sin x\pi}{(x-m)\pi} = (-1)^m \frac{\sin(x-m)\pi}{(x-m)\pi}$$

sich für $x=m$ der Einheit nähert,

$$\Pi m = (-1)^{m+1}\tfrac{1}{2}, \qquad \text{mithin} \quad \lambda_m = (-1)^{m+1}\frac{\varpi(m)}{m}\ .$$

Ist daher $\varpi(m)$ constant, so erhält man

$$\frac{\pi}{\sin x\pi} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{4-x^2} + \frac{2x}{9-x^2} \mp \text{etc.} = fx\ .$$

Ist aber

$$\varpi x = \lim\, (1-4x^2)\left(1-\frac{4}{9}x^2\right)\left(1-\frac{4}{25}x^2\right)..1-\left(\frac{2x}{2n+1}\right)^2 = \cos x\pi$$

gegeben, so gelten die Gleichungen

$$\varpi(m) = \cos m\pi = (-1)^m \quad , \quad \lambda_m = -\frac{1}{m}$$

folglich

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} x\pi} = \frac{f\tfrac{1}{2} fx}{f(x+\tfrac{1}{2})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{4-x^2} - \frac{2x}{9-x^2} - \text{etc.}$$

8.

Es ist jetzt leicht, die Differentialformeln aufzustellen, welchen die Kreisfunctionen genügen. Denn differentiirt man die Definitionsgleichung für fx logarithmisch, so folgt

$$\frac{f'x}{fx} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{4-x^2} + \frac{2x}{9-x^2} + \text{etc.}$$

und durch Vergleichung mit dem ebengefundenen Resultate

$$\frac{f'x}{fx} + \frac{f\tfrac{1}{2} fx}{f(x+\tfrac{1}{2})} = 0\ .$$

Hieraus geht wegen

$$\frac{1}{fx} = \frac{\sin x\pi}{\pi} \quad \text{und} \quad \frac{f\tfrac{1}{2}}{f(x+\tfrac{1}{2})} = \cos x\pi$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial \sin x\pi}{\partial x} = \cos x\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$$

hervor. Ebenso leicht leitet man die Gleichung ab

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x\ ,$$

und durch Verbindung mit der vorigen

$$\frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} = -\sin x \quad \text{nebst} \quad \frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} = -\cos x\ ;$$

Digitized by Google

d. h. die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ sind particuläre Integrale der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$.

Hat man aber zwei particuläre Integrale y_1 und y_2 dieser linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so folgt

$$0 = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} y_2 - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} y_1$$

und durch Integration

$$c = y_2 \frac{\partial y_1}{\partial x} - y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad \text{d. h.} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ .$$

Uebrigens ist dieser Satz nur ein specieller Fall des **Additionstheorems** für Kreisfunctionen, welches in der Gleichung

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

oder

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

enthalten ist. Mit Benutzung unserer früheren Bezeichnung fx würde man zu schreiben haben

$$\frac{1}{f\tfrac{1}{2} f(x+y)} = \frac{1}{fx f(y+\tfrac{1}{2})} + \frac{1}{fy f(x+\tfrac{1}{2})} \ .$$

Diese Formeln beweisen sich einfach, wenn man die hingeschriebenen Aggregate nach x und nach y differentiirt. Da das Resultat in beiden Fällen ein identisches wird, so müssen die betreffenden Ausdrücke Functionen von $x+y$ gleich sein, welche sich sofort ergeben, wenn man $y=0$ setzt.

Um endlich zu den Reihenentwickelungen der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ nach den Potenzen von x zu gelangen, welche wie die entsprechenden der Functionen $\frac{1}{\Gamma x}$ und $\frac{1}{\Gamma x + \frac{1}{2}}$ stets convergiren müssen, können wir mannichfache Wege einschlagen. Denn da die Form der gesuchten Reihen

$$\sin x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots \quad , \quad a_1 = 1$$

$$\cos x = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots \quad , \quad a_0 = 1$$

nach dem Früheren hinlänglich bekannt ist, so genügt die Anwendung verschiedener der im Vorigen entwickelten Eigenschaften, um die Coefficienten a zu bestimmen. So z. B. liefern die aus den Differentialformeln entspringenden Relationen

$$a_{2m} = (2m+1) a_{2m+1} \quad \text{nebst} \quad a_{2m-1} = -2m a_{2m}$$

sofort die gesuchten Werthe.

Digitized by Google

Indessen kann man auch die Additionsformeln für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ anwenden, um zu zeigen, dass die Function

$$Fx = \cos x + i \sin x$$

der bekannten Functionalgleichung für Exponentialgrössen

$$F(x+y) = Fx \, . \, Fy$$

Genüge leistet. Sofern nun die allgemeinste Lösung dieser Gleichung durch die Exponentialreihe

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \tfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \tfrac{1}{6}\alpha^3 x^3 + \text{etc.}$$

gegeben ist, so handelt es sich bloss noch um die Bestimmung des Factors α, der als die Grenze gefunden werden kann, welcher sich der Quotient $\frac{Fx-1}{x}$ mit abnehmendem x nähert. Damit erhält man schliesslich

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}) \quad , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi}) \ .$$

9.

Ohne uns bei der weiteren Entwickelung der zahlreichen Eigenschaften der Kreisfunctionen aufzuhalten,*) wenden wir uns jetzt zur Betrachtung der Functionalgleichung

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi x} = \frac{\pi}{\sin x\pi} \ ,$$

indem wir die im Vorigen gefundene halbperiodische, ungerade Function zur rechten Seite der Gleichung machen. Die Multiplication der Gleichungen

$$\varphi x = \frac{\sin x\pi}{\pi}\varphi(x+h) \quad , \qquad \varphi(x+h) = \frac{\sin(x+h)\pi}{\pi}\varphi(x+2h) \quad ,$$

$$\text{bis} \quad \varphi(x+\overline{n-1}\,h) = \frac{\sin(x+\overline{n-1}\,h)\pi}{\pi}\varphi(x+nh)$$

gibt

$$\varphi x = \frac{\varphi(x+nh)}{\pi^n}\sin x\pi \sin(x+h)\pi \sin(x+2h)\pi \ldots \sin(x+\overline{n-1}\,h)\pi \, ,$$

*) Ueber die Entwickelung der Eigenschaften der Kreisfunctionen aus den unendlichen Producten vergl. *Eisenstein* im *Crelle*'schen Journal Bd. 35, S. 197, so wie *Tralles* in der Abhandl. den Berliner Akademie aus den Jahren 1816/17.

Digitized by Google

welche Gleichung wiederum für unendlich wachsende Werthe von n richtig sein muss.

Um einen geeigneten Werth für $\lim \varphi(x+nh)$ zu finden, gehen wir von der Gleichung

$$\lim \frac{\varphi(x+\overline{n+1}\,h)}{\varphi(x+nh)} = \lim \frac{\pi}{\sin(x+nh)\pi}$$

aus, welche für den Fall, dass h einen positiven imaginären Theil hat, auf

$$\lim \frac{\varphi(x+\overline{n+1}\,h)}{\varphi(x+nh)} = \frac{2\pi}{i} e^{(x+nh)\pi i}$$

sich reducirt.*) Dieser Gleichung wird Genüge geleistet durch die Annahme

$$\lim \varphi(x+nh) = \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2}} e^{\left(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h\pi i}{2}},$$

wie sich augenblicklich verificiren lässt. Damit erhält man

$$\varphi x = \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\frac{x}{h}-\frac{1}{2}} \lim \left(\frac{2}{i}\right)^n e^{\left(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h\pi i}{2}} \prod_{p=0}^{n-1} \sin(x+ph)\pi .$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass die rechte Seite dieses Ausdrucks für beliebige Werthe von x mit wachsendem n sich in der That einer bestimmten, von Null und Unendlich verschiedenen Grenze nähert. Setzen wir wieder

$$\varphi x = \lim \varphi(x,n)$$

und untersuchen den Quotienten

$$\frac{\varphi(x,n+1)}{\varphi(x,n)} = \frac{2}{i} e^{(x+nh)\pi i} \sin(x+nh)\pi = 1 - e^{2(x+nh)\pi i},$$

so nähert sich derselbe mit wachsendem n der Einheit, sobald, wie bereits vorausgesetzt worden, der imaginäre Theil von h grösser als Null ist. Wir schreiben zur Abkürzung

$$\omega = e^{x\pi i}, \qquad q = e^{h\pi i},$$

wodurch der Modul von q kleiner als 1 und

$$\frac{\varphi(x,n+1)}{\varphi(x,n)} = 1 - q^{2n}\omega^2$$

---

*) Nimmt man h mit positivem imaginären Theile, so erhält man schliesslich kein materiell verschiedenes Resultat.

Digitized by Google

wird. Daraus folgt sogleich

$$\varphi(x,n) = \varphi(x,0)(1-\omega^2)(1-q^2\omega^2)(1-q^4\omega^2)\ldots(1-q^{2n-2}\omega^2) \ ,$$

mithin

$$\varphi x = \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\frac{x}{h}-\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h\pi i}{2}} (1-\omega^2)(1-q^2\omega^2)(1-q^2\omega^2)\ldots \text{ in inf.}$$

Die Convergenz dieses unendlichen Productes für $\mod q < 1$ dürfen wir hier als bekannt voraussetzen; dass der Functionalgleichung, von der wir ausgegangen sind, in der That Genüge geleistet worden, davon kann man sich a posteriori ohne Schwierigkeit überzeugen. Zugleich erhält man eine zweite Functionalgleichung von der Form

$$\varphi(x+1) = (2\pi)^{\frac{1}{h}} e^{\left(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)\pi i} \varphi x \ .$$

10.*)

Kehren wir einen Augenblick zu dem allgemeinen Falle

$$fx = \varphi x \,.\, \varphi(h-x) \quad , \quad \varphi(h+x) = \varphi x \,.\, \psi x$$

zurück, wo ψx eine beliebige Function von x bedeuten möge. Nach dem *Fourier*'schen Satze hat man für jede Function Fx

$$\tfrac{1}{2}\left\{Fx + F(x+h)\right\} = \int_0^1 F(x+ht)\,dt + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 F(x+ht)\cos 2n\pi t\,dt$$

nebst

$$F(x+\tfrac{1}{2}h) = \int_0^1 F(x+ht)\,dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 F(x+ht)\cos 2n\pi t\,dt.$$

Setzt man hier $Fx = \log \varphi x$, und bedenkt, dass identisch

$$\int_0^1 F(x+ht)\,dt = \frac{1}{h}\int_0^x \left\{F(t+h) - Ft\right\} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{F(ht) + F(h-ht)\right\} dt \,,$$

so folgen wegen

$$\log fx = \log \varphi x + \log \varphi(h-x) \quad , \quad \log \psi x = \log \varphi(h+x) - \log \varphi x$$

die Ausdrücke

*) Die Artikel 10—14 sind während des Druckes eingeschaltet worden.

Digitized by Google

$$\log \varphi x = \int_0^{\frac{1}{2}} \log f(ht)\,dt - \tfrac{1}{2}\log \psi x + \frac{1}{h}\int_0^{x} \log \psi t\,dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \log \varphi(x+ht)\cos 2n\pi t\,dt$$

und

$$\log \varphi(x+\tfrac{1}{2}h) = \int_0^{\frac{1}{2}} \log f(ht)\,dt + \frac{1}{h}\int_0^{x} \log \psi t dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \log \varphi(x+ht)\cos 2n\pi t\,dt.$$

Die Integralsummen auf der rechten Seite dieser Gleichungen können nach der von *Poisson* *) gelehrten Methode mittelst partieller Integration transformirt werden. Schreibt man zur Abkürzung

$$\chi x = \frac{\psi'(x)}{\psi x} = \frac{\partial}{\partial x}\{\log \varphi(h+x) - \log \varphi x\}$$

$$a_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^{2m}} = \frac{1}{(2m)!} B_m$$

$$b_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n\pi)^{2m}} = -\left(1 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right)\frac{1}{(2m)!} B_m$$

so erhält man respective

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 = a_2 h\chi(x) - a_4 h^3 \chi''(x) + a_6 h^5 \chi^{IV}(x) \mp \ldots \quad + R_m$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 = b_2 h\chi(x) - b_4 h^3 \chi''(x) + b_6 h^5 \chi^{IV}(x) \mp \ldots \quad + S_m$$

nebst

$$R_m = (-1)^m h^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2m}\int_0^1 \log \varphi(x+ht)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos 2n\pi t}{(2n\pi)^{2m}}\,dt$$

$$= (-1)^{m+1} h^{2m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2m+1}\int_0^1 \log \varphi(x+ht)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin 2n\pi t}{(2n\pi)^{2m+1}}\,dt$$

$$= (-1)^m h^{2m+2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2m+2}\int_0^1 \log \varphi(x+ht)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\sin n\pi t}{(2n\pi)^{m+1}}\right\}^2 dt$$

und den analogen Ausdrücken für S_m.**)

Um aus den vorstehenden Formeln die Entwickelungen

*) Mémoires de l'Académie des Sciences, Tome VI. p. 571 (1823).

**) Vergl. diese Berichte, Jahrgang 1857, p. 197.

Digitized by Google

von $\log\Gamma x$ und $\log\Gamma(x+\frac{1}{2})$ abzuleiten,*) setzen wir

$$h=1\,,\quad \psi x=x\,,\quad \text{mithin } \varphi x=\Gamma x\,,\quad \chi x=\frac{1}{x}\,,\quad fx=\frac{\pi}{\sin x\pi}$$

und erhalten

$$\log\Gamma x=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{2\pi}{2\sin x\pi}\,dx-\tfrac{1}{2}\log x+\int_0^x\log x\,dx+\frac{a_2}{x}-\frac{2!\,a_4}{x^3}+\frac{4!\,a_6}{x^5}\mp\cdots$$

$$\log\Gamma(x+\tfrac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{2\pi}{2\sin x\pi}\,dx+\int_0^x\log x\,dx+\frac{b_2}{x}-\frac{2!\,b_4}{x^3}+\frac{4!\,b_6}{x^5}\mp\cdots$$

in Uebereinstimmung mit der halbconvergirenden Reihe des Art. 3.

Setzt man dagegen $\psi x=\frac{\pi}{\sin x\pi}$, so wird

$$\chi x=-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi x}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+n}$$

$$\log\varphi x=\int_0^{\frac{1}{2}}\log f(ht)\,dt-\tfrac{1}{2}\log\frac{\pi}{\sin x\pi}+\frac{1}{h}\int_0^x\log\frac{\pi}{\sin x\pi}\,dx-$$
$$-a_2h\Sigma\frac{1}{x+n}+a_4h^3\Sigma\frac{\Gamma 3}{(x+n)^3}-a_6h^5\Sigma\frac{\Gamma 5}{(x+n)^5}\pm\text{etc.}$$

nebst

$$\log\varphi(x+\tfrac{1}{2}h)=\int_0^{\frac{1}{2}}\log f(ht)\,dt+\frac{1}{h}\int_0^x\log\frac{\pi}{\sin x\pi}\,dx-$$
$$-b_2h\Sigma\frac{1}{x+n}+b_4h^3\Sigma\frac{\Gamma 3}{(x+n)^3}-b_6h^5\Sigma\frac{\Gamma 5}{(x+n)^5}\mp\text{etc.}$$

wo

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\log f(ht)\,dt=\frac{1}{24}h\pi i+\frac{1}{2h\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\,\frac{1-q^m}{1+q^m}\,.$$

11.

Schreibt man zur Abkürzung

$$\varphi x=\left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\frac{x}{h}-\frac{1}{2}}e^{\left(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2\frac{h\pi i}{2}}\chi(x,h)\,,$$

*) Vergl. *Gauss* disquis. generales p. 33, *Malmstén* in *Crelle's* Journal Bd. 35, p. 75, *Lipschitz* ebendas. Bd. 56, p. 18 flg.

so ist

$$\chi(x,h) = \prod_{p=0}^{\infty} (1 - q^{2p}\omega^2)$$

eine mit dem Modul 1 periodische Function, und daher

$$\chi(x+m, h+n) = \chi(x, h) \ ,$$

wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Ferner ergeben sich sofort die Gleichungen

$(A)\ldots.\ \chi(x,h) = (1-\omega^2)\,\chi(x+h,h)$

$(B)\ldots.\ \chi(x,h) = \chi(x,2h)\,\chi(x+h,4h)\,\chi(x+3h,8h)\chi(x+7h,16h)$ etc.

nebst

$$\chi(h,h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1-q^{2p+2}) = \chi_1(q)$$

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1-q^{2p+1}) = \chi_2(q)$$

$$\chi(h+\tfrac{1}{2},h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1+q^{2p+2}) = \chi_3(q)$$

$$\chi(\tfrac{h+1}{2}, h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1+q^{2p+1}) = \chi_4(q) \ ,$$

so wie wegen der Identität

$$\Pi(1+q^{p+1})\ \Pi(1-q^{2p+1}) = 1$$

die Producte

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h)\ \chi(h+\tfrac{1}{2},h)\ \chi(\tfrac{h+1}{2},h) = 1$$

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h)\ \chi(\tfrac{h+1}{2}, \tfrac{h}{2}) = 1$$

$$\chi(h+\tfrac{1}{2}, h)\ \chi(h, 2h) = 1$$

$$\chi(\tfrac{h+1}{2}, h)\ \chi(\tfrac{h}{2}, \tfrac{h+1}{2}) = 1$$

oder

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h)\ \chi(h+\tfrac{1}{2}, h) = \chi(\tfrac{h}{2}, \tfrac{h+1}{2})$$

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h)\ \chi(\tfrac{h+1}{2}, h) = \chi(h, 2h)$$

$$\chi(h+\tfrac{1}{2}, h)\ \chi(\tfrac{h+1}{2}, h) = \chi(\tfrac{h+1}{2}, \tfrac{h}{2}) \ .$$

Wir fügen diesen Formeln sogleich die später zu beweisenden Relationen hinzu, für welche $hk = -1$ zu setzen ist:

Digitized by Google

$$\chi(h,h) = \sqrt{\frac{i}{h}}\, e^{\frac{1}{12}(k-h)\pi i}\chi(k,k) \qquad (a)$$

$$\chi(\tfrac{1}{2}h,h) = \sqrt{2}\; e^{\frac{1}{24}(h+2k)\pi i}\chi(k+\tfrac{1}{2},\, k) \qquad (b)$$

$$\chi(h+\tfrac{1}{2},\, h) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{24}(2k+k)\pi i}\chi(\tfrac{1}{2}k,\, k) \qquad (c)$$

$$\chi(\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{2},\, h) = e^{\frac{1}{24}(h-k)\pi i}\chi(\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2},\, k)\,. \qquad (d)$$

Hier haben h und k, wie die Convergenz der unendlichen Producte χ verlangt, gleichzeitig einen positiven imaginären Theil; das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{i}{h}}$ ist so zu bestimmen, dass ihr reeller Theil positiv wird.

12.

Die in (a) (b) (c) (d) enthaltenen Transformationen lassen sich leicht verallgemeinern, wenn man die Argumente der χFunctionen um ganze Zahlen ändert, wodurch der Werth der Producte ungeändert bleibt. Setzt man daher

$$(h+m)(k+n)+1=0$$

wo m und n beliebige ganze, positive oder negative, Zahlen bedeuten, so geht (a) über in

$$\chi(h,h) = \sqrt{\frac{i}{h+m}}\, e^{\frac{1}{12}(k-h-m+n)\pi i}\,\chi(k,k)\;,$$

während bei den übrigen Formeln unterschieden werden muss, ob m und n gerade oder ungerade sind. Es ergibt sich leicht

$$\begin{aligned}
\chi(\tfrac{1}{2}h,h) &= \sqrt{2}\;.\, e_1.\chi(k+\tfrac{1}{2},k) && \text{für } m \text{ gerade}\\
&= e_3.\chi(\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2},k) && \text{für } m \text{ ungerade, } n \text{ gerade}\\
&= e_3.\chi(\tfrac{1}{2}k,k) && \text{für } m \text{ und } n \text{ ungerade,}\\
\chi(h+\tfrac{1}{2},h) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_2.\chi(\tfrac{1}{2}k,k) && \text{für } n \text{ gerade}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_2.(\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2},k) && \text{für } n \text{ ungerade,}\\
\chi(\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{2},h) &= e_3.\chi(\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2},k) && \text{für } m \text{ und } n \text{ gerade}\\
&= e_3.\chi(\tfrac{1}{2}k,k) && \text{für } m \text{ gerade, } n \text{ ungerade}\\
&= \sqrt{2}.e_1.\chi(k+\tfrac{1}{2},k) && \text{für } m \text{ ungerade,}
\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung geschrieben wird

Digitized by Google

$$e_1 = e^{\frac{1}{12}(h+2k+m+2n)\pi i}$$
$$e_2 = e^{-\frac{1}{12}(2h+k+2m+n)\pi i}$$
$$e_3 = e^{\frac{1}{12}(h-k+m-n)\pi i} \quad .$$

Da die Leichtigkeit der numerischen Berechnung wesentlich von der Kleinheit von q, d. i. von der Grösse des imaginären Theiles von h oder k abhängt, so entsteht die wichtige Frage, unter welchen Umständen der Modul von q durch die obigen Transformationen verkleinert werden kann.

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir die Abhängigkeit zwischen h und k näher ins Auge zu fassen. Sei

$$h = h_1 + h'i \ , \quad k = k_1 + k'i \ ,$$

so folgt

$$k_1 = -n - \frac{h_1+m}{(h_1+m)^2 + h'h'} \ , \quad k' = \frac{h'}{(h_1+m)^2 + h'h'}$$

Man erhält folglich $k' > h'$ und der Modul von q nimmt ab, sobald

$$(h_1+m)^2 + h'h' < 1$$

gemacht werden kann. Dieser Ungleichung lässt sich stets Genüge leisten, wenn $h' < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, denn offenbar braucht man nur die ganze Zahl m so zu wählen, dass h_1+m zwischen $\pm\frac{1}{2}$ fällt, woraus $h'h' + \frac{1}{4} < 1$ hervorgeht. Da $q = e^{h\pi i}$, also $\mathrm{mod}\, q = e^{-h'\pi}$, so kann man nöthigenfalls durch Wiederholung der obigen Transformation stets erreichen, dass dieser Modul kleiner wird als $e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. In der That ist diese Grenze bereits von *Jacobi* angegeben worden, welcher hinzufügt, dass der gedachte Werth eine g e n a u e G r e n z e (limite précise) constituire, weil bei der Wahl jedes geringeren Werthes sich Fälle denken lassen, in denen $\mathrm{mod}\, q$ in allen durch die Transformation erreichbaren Formen jenem Werthe überlegen bleibt. *)

*) »En faisant usage de la méthode employée par *Lagrange* pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours ramener la function Θ à une autre où le module de q, ce mot pris dans le sens de M. *Cauchy*, soit $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise, c'est à dire qu'étant prise une quantité inférieure, il y aura toujours des cas, où le module de q dans toutes les formes que pourra prendre la function Θ, restera supérieure à cette quantité.« *Jacobi* in einem an *Hermite* gerichteten Briefe, siehe Mathematische Werke Vol. I, p. 358 (*Crelle*, Bd. 32, S. 177), *Hermite* ebendas. Vol. II, p. 287 (*Crelle*, Bd. 40, S. 277).

Digitized by Google

Für $h' > 1$ hat man stets $k' < h'$; dagegen hängt, wie leicht zu sehen, im Falle $\frac{3}{4} < h'h' < 1$ die Entscheidung über das Wachsen oder Abnehmen der Grösse q von der Beschaffenheit des reellen Theiles h_1 ab. Ist z. B. q reell, so kann man jederzeit $h_1 + m = 0$ machen, wodurch $k' = \frac{1}{h'}$ wird, so dass in diesem Falle der Maximalwerth von q auf $e^{-\pi}$ herabsteigt. Die Werthe $q = e^{-\pi}$ und $q = ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$ bleiben durch die Transformation ungeändert, indem h und k gleichzeitig sowohl der zweiten als der dritten Wurzel der negativen Einheit gleich werden.

13.

Wenn man von der durch die Gleichung $1 + (h+m)(k+n) = 0$ definirten Transformation wiederholten Gebrauch macht, also eine Reihe von Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 1 + (h+m)(j_1+n_1) \\ 0 &= 1 + (j_1+m_1)(j_2+n_2) \\ 0 &= 1 + (j_2+m_2)(j_3+n_3) \\ &\cdot \quad \cdot \\ 0 &= 1 + (j_p+m_p)(k+n) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H)}$$

successive zur Anwendung bringt, so nimmt schliesslich, nach Elimination der j, der Werth von k die Form an

$$k = \frac{ah + b}{a_1 h + b_1}$$

wo die Factoren a b a_1 b_1 beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten — selbstverständlich mit Ausschluss eines allen vieren gemeinschaftlichen Divisors —, welche der Bedingung

$$ab_1 - a_1 b = 1$$

unterworfen sind.*) Es folgen damit leicht die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{b - b_1 k}{a_1 k - a} \\ \text{nebst} \qquad & \\ 1 + (a_1 h + b_1)&(a_1 k - a) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H*)}$$

---

*) *Jacobi*, Mathemat. Werke, Vol. II, p. 35 (*Crelle's* Journal, Bd. 36, S. 111).

Digitized by Google

Um den Beweis zu führen, transformiren wir das System (H) in den äquivalenten Kettenbruch

$$k=\frac{ah+b}{a_1h+b_1}=-n-\frac{1}{m_p-n_p}\dot{-}\frac{1}{m_{p-1}-n_{p-1}}\dot{-}\dots\dot{-}\frac{1}{m_1-n_1}\dot{-}\frac{1}{m+h},$$

welcher wiederum durch das aus der fortgesetzten Division entspringende Gleichungensystem

$$\begin{aligned}
ah+b&=-n(a_1h+b_1)-(a_2h+b_2)\\
a_1h+b_1&=(m_p-n_p)(a_2h+b_2)-(a_3h+b_3)\\
a_2h+b_2&=(m_{p-1}-n_{p-1})(a_3h+b_3)-(a_4h+b_4)\\
&\vdots\\
a_{p-1}h+b_{p-1}&=(m_2-n_2)(a_ph+b_p)-(h+m)\\
a_ph+b_p&=(m_1-n_1)(h+m)-1
\end{aligned}$$

ersetzt werden kann. Hier hat man offenbar

$$\text{(K)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{a_1h+b_1}{a_2h+b_2}&=j_p+m_p=-\frac{1}{k+n}\\
\frac{a_2h+b_2}{a_3h+b_3}&=j_{p-1}+m_{p-1}=-\frac{1}{j_p+n_p}\\
&\dots\\
\frac{a_{p-1}h+b_{p-1}}{a_ph+b_p}&=j_2+m_2=-\frac{1}{j_3+n_3}\\
\frac{a_ph+b_p}{h+m}&=j_1+m_1=-\frac{1}{j_2+n_2}
\end{aligned}\right.$$

Bildet man daher die beiden Reihen von Gleichungen

$$\text{(L)}\quad\left\{\begin{aligned}
a&=\lambda a_1-a_2 & b&=\lambda b_1-b_2\\
a_1&=\lambda_1a_2-a_3 & b_1&=\lambda_1b_2-b_3\\
&\vdots & &\vdots\\
a_{p-2}&=\lambda_{p-2}a_{p-1}-a_p & b_{p-2}&=\lambda_{p-2}b_{p-1}-b_p\\
a_{p-1}&=\lambda_{p-1}a_p-1 & b_{p-1}&=\lambda_{p-1}b_p-m\\
a_p&=\lambda_p & b_p&=\lambda_pm-1
\end{aligned}\right.$$

so braucht man nur

$\lambda=-n$, $\lambda_1=m_p-n_p$, $\lambda_2=m_{p-1}-n_{p-1}$ . . . bis $\lambda_p=m_1-n_1$

zu setzen, um das System (H) zu construiren. Die Elimination der λ ergibt aber

$$ab_1-a_1b=a_1b_2-a_2b_1=a_2b_3-a_3b_2\,\dots\,=ma_p-b_p=1\ ,$$

Digitized by Google

ohne dass die ganzen Zahlen $a\,b\,a_1\,b_1$ einer sonstigen Beschränkung unterliegen.

Ist folglich $k=\frac{ah+b}{a_1h+b_1}$ gegeben, so wird man durch fortgesetzte Division oder Entwickelung von $\frac{a_1}{a}$ in einen Kettenbruch die Factoren λ aufzusuchen, und alsdann mittelst successiver Berechnung der b die Zahl m zu bestimmen haben. Man sieht übrigens, da bloss die Differenzen m_1-n_1, m_2-n_2 u. s. w. vorkommen, dass die Hälfte der Grössen m und n willkürlich gewählt, also z. B. gleich Null gesetzt werden dürfen.

14.

Die Multiplication der dem System (H) entsprechenden Transformationsgleichungen

$$\chi(h,h)=\sqrt{\frac{i}{h+m}}\;e^{(j_1+n_1-h-m)\frac{\pi i}{12}}\chi(j_1,j_1)$$

$$\chi(j_1,j_1)=\sqrt{\frac{i}{j_1+m_1}}\;e^{(j_2+n_2-j_1-m_1)\frac{\pi i}{12}}\chi(j_2,j_2)$$

$$\cdot\quad\cdot$$

$$\chi(j_p,j_p)=\sqrt{\frac{i}{j_p+m_p}}\;e^{(k+n-j_p-m_p)\frac{\pi i}{12}}\chi(k,k)$$

ergibt die allgemeine Formel

$$\chi(h,h)=\Omega^{\frac{1}{2}}\;e^{(k-h+\Sigma(n-m))\frac{\pi i}{12}}\chi(k,k)\quad,\quad\ldots\qquad(M)$$

wo mit Rücksicht auf die Gleichungen (K)

$$\Omega=\frac{i^{p+1}}{h+m.j_1+m_1.j_2+m_2\,..\,j_p+m_p}=\frac{i^{p+1}}{a_1h+b_1}$$

gefunden wird.

Von Interesse ist die Vergleichung der umgekehrten Transformation von k in h. Setzt man

$$h=-m-\frac{1}{n_1-m_1}\dot{-}\frac{1}{n_2-m_2}\cdot\cdot\dot{-}\frac{1}{n_p-m_p}\dot{-}\frac{1}{n+k}=\frac{\alpha k+\beta}{\alpha_1k+\beta_1}$$

nebst

Digitized by Google

$$
(\mathrm{K}^*)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1 k+\beta_1}{\alpha_2 k+\beta_2}=j_1+n_1=-\frac{1}{h+m}\\
&\frac{\alpha_2 k+\beta_2}{\alpha_3 k+\beta_3}=j_2+n_2=-\frac{1}{j_1+m_1}\\
&\qquad\qquad\cdot\quad\cdot\\
&\frac{\alpha_{p-1} k+\beta_{p-1}}{\alpha_p k+\beta_p}=j_{p-1}+n_{p-1}=-\frac{1}{j_{p-2}+m_{p-2}}\\
&\frac{\alpha_p k+\beta_p}{k+n}=j_p+n_p=-\frac{1}{j_{p-1}+m_{p-1}}
\end{aligned}\right.
$$

so wird auch

$$
(\mathrm{L}^*)\quad\left\{\begin{aligned}
&\alpha=-m\alpha_1-\alpha_2 && \beta=-m\beta_1-\beta_2\\
&\alpha_1=-\lambda_p\alpha_2-\alpha_3 && \beta_1=-\lambda_p\beta_2-\beta_3\\
&\alpha_2=-\lambda_{p-1}\alpha_3-\alpha_4 && \beta_2=-\lambda_{p-1}\beta_3-\beta_4\\
&\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot && \cdot\quad\cdot\\
&\alpha_{p-2}=-\lambda_3\alpha_{p-1}-\alpha_p && \beta_{p-2}=-\lambda_3\beta_{p-1}-\beta_p\\
&\alpha_{p-1}=-\lambda_2\alpha_p-1 && \beta_{p-1}=-\lambda_2\beta_p-n\\
&\alpha_p=-\lambda_1 && \beta_p=-\lambda_1 n-1
\end{aligned}\right.
$$

Durch Multiplication der Gleichungen (K) und (K*) erhält man mit Rücksicht auf die Formeln des Systems (H)

$$(a_1h+b_1)(\alpha_1k+\beta_1)=(-1)^{p+1}\ ,$$

mithin auch

$$\Omega=\frac{\alpha_1k+\beta_1}{i^{p+1}}\ ,$$

wie die Vertauschung von h und k in (M) erfordert. Die Vergleichung mit den Ausdrücken (H*) des vorigen Art. ergibt nunmehr die Werthe

$$
\begin{aligned}
&\alpha=(-1)^{p+1}b_1 && \beta=(-1)^{p}b\\
&\alpha_1=(-1)^{p}a_1 && \beta_1=(-1)^{p+1}a
\end{aligned}
$$

welche zeigen, dass man auch mit Hülfe der Kettenbruchsentwickelung von $\frac{a_1}{b_1}$ die Grössen λ nebst m und n bestimmen kann.

15.

Wenden wir uns zur Betrachtung der Function

$$\chi(x,h)=\prod_{p=0}^{\infty}(1-q^{2p}\omega^2)$$

Digitized by Google

zurück, welche für $x=0$ verschwindet, so bietet sich die Aufgabe, den Werth von

$$\lim \frac{1}{x}\chi(x,h) = \lim \frac{\partial\chi}{\partial x} = \chi'(0)$$

für abnehmende Werthe von x zu ermitteln. Man erhält ohne Schwierigkeit

$$\chi'(0) = \prod_{p=0}^{\infty}(1-q^{2p+2}) \lim \frac{1-e^{2x\pi i}}{x} = \frac{2\pi}{i}\chi(h,h) \ .$$

Auf die Function φx übertragen, wird noch etwas einfacher

$$\varphi'(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{i}}\, e^{\frac{h\pi i}{8}}\chi(h,h) = \varphi h \ .$$

Ein Multiplicationstheorem lässt sich für die Functionen φ oder χ in doppelter Gestalt entwickeln. Bildet man nämlich die beiden endlichen Producte

$$\prod_{p=0}^{n-1}\chi(x+\frac{ph}{n}) \quad \text{und} \quad \prod_{p=0}^{n-1}\chi(x+\frac{p}{n}) \quad ,$$

so findet man nach einer leichten Reduction

$$\prod_{p=0}^{n-1}\chi(x+\frac{ph}{n}, h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1-e^{\frac{2ph\pi i}{n}}\omega^2) = \chi(x,\frac{h}{n})$$

nebst

$$\prod_{p=0}^{n-1}\chi(x+\frac{p}{n}, h) = \prod_{p=0}^{\infty}(1-q^{2np}\omega^{2n}) = \chi(nx,nh) \ .$$

Verbindet man beide Formeln zu einer einzigen, nachdem in der ersten Gleichung zur Unterscheidung n' und p' geschrieben worden, so erhält man den allgemeineren Satz

$$\chi(x,h) = \prod_{p=0}^{n-1}\prod_{p'=0}^{n'-1}\chi(\frac{x+p+p'h}{n}, \frac{n'h}{n}) \quad ,$$

aus welchem für $n=1$ resp. $n'=1$ die früheren Theoreme hervorgehen.

Es ist nicht schwer, mit Berücksichtigung des das Verhältniss der Functionen φ und χ ausdrückenden Exponentialfactors, zu dem für φx geltenden Multiplicationssatze überzugehen:

$$\varphi(x,h) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2h}(2x-h+n)}\, e^{(n^2-1)\frac{\pi i}{12h}-(n'^2-1)\frac{h\pi i}{24}} \prod_{p=0}^{n-1}\prod_{p'=0}^{n'-1}\varphi(\frac{x+p+p'h}{n}, \frac{n'h}{n})$$

Für $n=n'$ werden die Argumente h und $\frac{n'h}{n}$ einander gleich, so dass

$$\Pi_p \Pi_{p'=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{x+p+p'h}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2h}(2x-h+n)} e^{(n^2-1)(h^2-2)\frac{\pi i}{24h}} \varphi(x)$$

oder

$$\chi(x,h) = \Pi_p \Pi_{p'=0}^{n-1} \chi\left(\frac{x+p+p'h}{n}, h\right) .$$

16.

Wir kommen jetzt zur Aufstellung von Reihenentwickelungen für die Function χx und schreiben der Bequemlichkeit halber

$$X(\omega,q) = \chi(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}h) = \Pi_{p=0}^{\infty} (1-q^p\omega) .$$

Bekanntlich hat bereits *Euler* *) für das unendliche Product $X\omega$ und seinen inversen Werth die aus der Functionalgleichung (A) des Art. 11

$$X(\omega,q) = (1-\omega)\, X(q\omega,q)$$

entspringenden Reihen

$$(1) \;\ldots\; X\omega = 1 - \frac{\omega}{1-q} + \frac{q\omega^2}{1-q.1-q^2} - \frac{q^3\omega^3}{1-q.1-q^2.1-q^3} + \\ + \frac{q^6\omega^4}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-q^4} \mp \ldots$$

$$(2) \;\ldots\; \frac{1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega}{1-q} + \frac{\omega^2}{1-q.1-q^2} + \frac{\omega^3}{1-q.1-q^2.1-q^3} + \\ + \frac{\omega^4}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-q^4} + \ldots$$

angegeben. Von diesen beiden Entwickelungen convergirt die erste für alle Werthe von ω, während in der zweiten $\mathrm{mod}\,\omega<1$ sein muss. Man kann bemerken, dass die Exponentialreihe in den angeführten Formeln enthalten ist, indem für $\omega=z(1-q)$

$$(\alpha) \;\ldots\; e^{-z} = \lim X(z(1-q),q) \qquad \text{für} \quad q=1 .$$

---

*) *Euler*, Introductio in anal. infin., T. I. cap. 16, de partitione numerorum, §§ 307 und 313.

Die Multiplication der Reihen 1) und 2) ergibt die allgemeinere Entwickelung des Quotienten

$$\frac{X\omega_1}{X\omega}=1+\frac{\omega-\omega_1}{1-q}+\frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1}{1-q.1-q^2}+\frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.\omega-q^2\omega_1}{1-q.1-q^2.1-q^3}+\ \ldots \quad (3)$$

welche man auch direct aus der Functionalgleichung ableiten kann.*)

Wie sogleich erhellt, lässt sich diese Reihe als das Product einer beliebigen Anzahl analoger Reihen darstellen, wenn man sich der Gleichung

$$\frac{X\omega_1}{X\omega}=\frac{X\omega_1}{X\omega_2}\,\frac{X\omega_2}{X\omega_3}\ \ldots\ \frac{X\omega_n}{X\omega}$$

bedient. Lässt man in (3) h unendlich abnehmen, und schreibt $x+hy$ statt x, oder $\omega_1=q^y\omega$, so geht die binomische Reihe hervor, und man erhält

$$(1-\omega)^{-y}=\lim\frac{X(q^y\omega,q)}{X(\omega,q)}\quad \text{für } q=1 \qquad \ldots (\beta)$$

$$=\lim\frac{\chi(\frac{1}{2}(x+hy),\frac{1}{2}h)}{\chi(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}h)}\quad \text{für } h=0\ .$$

Setzt man $\omega_1=q$, so folgt der Werth

$$\frac{Xq}{X\omega}=1+\frac{\omega-q}{1-q}+\frac{\omega-q.\omega-q^2}{1-q.1-q^2}+\frac{\omega-q.\omega-q^2.\omega-q^3}{1-q.1-q^2.1-q^3}+\ \ldots \quad (3^*)$$

Der vorstehende Quotient besitzt Eigenschaften, welche denen der ΓFunction nahe verwandt sind. Sei $\omega=q^\lambda$ oder $\lambda=\frac{x}{h}$ und man setze

$$\frac{Xq}{X\omega}=(1-q)^{\lambda-1}\,\Pi(\lambda,q)\ , \qquad \ldots (\gamma)$$

so reducirt sich für $q=1$ die Function Π auf die ΓFunction.**) Schreibt man nämlich für unbegrenzte wachsende Werthe von n

$$\Pi(\lambda,q)=\lim\frac{1-q\ .\ 1-q^2\ \ldots\ 1-q^n}{1-q^\lambda.1-q^{\lambda+1}\ \ldots\ 1-q^{\lambda+n-1}}\ .\ \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{\lambda-1}\ ,$$

so folgt

$$\Pi(\lambda,1)=\lim\frac{1.\ 2\ \ldots\ n}{\lambda.\lambda+1\ \ldots\ \lambda+n-1}\,n^{\lambda-1}=\Gamma\lambda\ .$$

---

*) Vergl. *Jacobi*, Mathemat. Werke, Bd. 1, S. 376.

**) *Heine* hat in *Crelle's* Journal die Function $\frac{Xq}{Xq^{a+1}}=\Omega(q,a)$ der Untersuchung unterworfen, Bd. 34, S. 309.

Ferner ergeben sich, analog wie bei $\Gamma\lambda$, die Gleichungen

$$\Pi(\lambda+1, q) = \frac{1-q^\lambda}{1-q}\,\Pi(\lambda, q)$$

$$\Pi(l, q) = \frac{1-q.1-q^2\,.\,.\,.\,1-q^{l-1}}{1-q.1-q\,.\,.\,.\,1-q}$$

nebst

$$\Pi(0, q) = \Pi(-l, q) = \infty$$

wenn l eine positive ganze Zahl bedeutet.

Als Multiplicationstheoreme findet man die beiden Producte

$$(\delta)\ .\ .\quad \Pi(\lambda,q) = A\left\{\frac{\left(1-q^{\frac{1}{m}}\right)^m}{1-q}\right\}^{\lambda-1}\prod_{p=0}^{n-1}\Pi\left(\lambda+\frac{2p}{h}, q^{\frac{1}{m}}\right)$$

und

$$(\varepsilon)\ .\ .\quad \Pi(\lambda,q) = B\left\{\frac{1-q^n}{1-q}\right\}^{\lambda-\frac{1}{2}}\prod_{p=0}^{n-1}\Pi\left(\frac{\lambda+p}{n}, q^n\right)$$

wo zur Abkürzung

$$A = \frac{X(q,q)}{\left\{X\left(q^{\frac{1}{m}}, q^{\frac{1}{m}}\right)\right\}^m}\left(1-q^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m(m-1)}{h}}$$

$$B = \frac{X(q,q)(1-q)^{\frac{1}{2}}}{\left\{X(q^n,q^n)(1-q^n)^{\frac{1}{2}}\right\}^n}$$

geschrieben ist. Wenn sich q der Einheit nähert, erhält B den Grenzwerth $(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}$, wodurch (ε) in die für die ΓFunction geltende Multiplicationsformel übergeht. Es versteht sich von selbst, dass die Ausdrücke (δ) und (ε) sich zu einem Doppelproduct vereinigen lassen, welches für $m = n$ die Gestalt annimmt

$$(\zeta)\ .\ .\quad \Pi(\lambda,q) = C^{n-1}\prod_{p=0}^{n-1}\prod_{p'=0}^{n-1}\Pi\left(\frac{\lambda+p+\frac{2p'}{h}}{n}, q\right)$$

nebst

$$C = \frac{1}{(X(q,q))^{n+1}}(1-q)^{\lambda+\frac{1}{h}-n-\frac{1}{2}}\quad .$$

Digitized by Google

17.

Eine fernere Form hierhergehöriger Entwickelungen ist in den stets convergirenden Ausdrücken

$$X\omega = 1 - \omega\frac{1-q\omega}{1-q} + q^3\omega^2\,\frac{1-\omega.1-q^3\omega}{1-q.\,1-q^2} - q^9\omega^3\,\frac{1-\omega.1-q\omega.1-q^5\omega}{1-q.1-q^2.\,1-q^3} +$$

$$+ q^{18}\omega^4\,\frac{1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega.1-q^7\omega}{1-q.\,1-q^2.\,1-q^3.\,1-q^4} \mp \quad \ldots \quad (4)$$

$$\frac{1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega}{1-q.1-\omega} + \frac{q^2\omega^2}{1-q.1-q^2.1-\omega.1-q\omega} +$$

$$+ \frac{q^6\omega^3}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} + \,.\,.\quad (5)$$

enthalten, von denen der letztere von *Jacobi* angegeben worden ist.*) Der Beweis dieser Formeln ergibt sich, wenn man sie, wie durch eine leichte Transformation geschieht, auf eine der beiden Formen bringt:

$$X\omega = 1 - \frac{\omega}{1-q} + q\omega^2\,\frac{1-q^2\omega}{1-q.1-q^2} - q^6\omega^3\,\frac{1-\omega.1-q^4\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3} +$$

$$+ q^{14}\omega^4\,\frac{1-\omega.1-q\omega.1-q^6\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-q^4} \mp \,.\,.$$

$$\frac{1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega}{1-q} + \frac{\omega^2}{1-q.1-q^2.1-\omega} + \frac{q^2\omega^3}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega} +$$

$$+ \frac{q^6\omega^4}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-q^4.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} + \,.\,.$$

oder

$$X\omega = (1-\omega) - q\omega\frac{1-\omega.1-q^2\omega}{1-q} + q^5\omega^2\frac{1-\omega.1-q\omega.1-q^4\omega}{1-q.1-q^2} -$$

$$- q^{12}\omega^3\frac{1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega.1-q^6\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3} \pm \,.\,.$$

$$\frac{1}{X\omega} = \frac{1}{1-\omega} + \frac{q\omega}{1-q.1-\omega.1-q\omega} + \frac{q^4\omega^2}{1-q.1-q^2.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} +$$

$$+ \frac{q^9\omega^3}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega.1-q^3\omega} + \,.\,.$$

---

*) *Jacobi*, Fundamenta, p. 180.

Aus der Vergleichung dieser Identitäten folgt augenblicklich das Stattfinden der Functionalgleichung, welcher die Function $X(\omega, q)$ genügt.

Durch Combination dieser Formeln unter sich und mit den früher gefundenen Ausdrücken ergeben sich die neuen Quotientengleichungen

$$(6) \ldots \frac{X\omega_1}{X\omega} = 1 - \frac{\omega_1 - \omega}{1-q.1-\omega} + q\frac{\omega_1-\omega.\omega_1-q\omega}{1-q.1-q^2.1-\omega.1-q\omega} -$$

$$- q^3 \frac{\omega_1-\omega.\omega_1-q\omega.\omega_1-q^2\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} \pm \ldots$$

$$(7) \ldots \frac{X\omega_1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega-\omega_1.1-q\omega_1}{1-q.1-\omega} + q^2\frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.1-\omega_1.1-q^2\omega_1}{1-q.1-q^2.1-\omega.1-q\omega} +$$

$$+ q^6 \frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.\omega-q^2\omega_1.1-\omega_1.1-q\omega_1.1-q^5\omega_1}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} + \ldots$$

statt deren man auch schreiben kann:

$$\frac{X\omega_1}{X\omega} = 1 - \frac{\omega_1-\omega}{1-q} + \frac{q\omega_1-\omega.\omega_1-\omega}{1-q.1-q^2.1-\omega} - q^2\frac{q\omega_1-\omega.\omega_1-\omega.\omega_1-q\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega} +$$

$$+ q^5 \frac{q\omega_1-\omega.\omega_1-\omega.\omega_1-q\omega.\omega_1-q^2\omega}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-q^4.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} \mp \ldots$$

$$\frac{X\omega_1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega-\omega_1}{1-q.1-\omega} + q\frac{q\omega-\omega_1.\omega-\omega_1.1-q^2\omega_1}{1-q.1-q^2.1-\omega.1-q\omega} +$$

$$+ q^5 \frac{q\omega-\omega_1.\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.1-\omega_1.1-q^4\omega_1}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega.1-q^2\omega} + \ldots$$

$$\frac{X\omega_1}{X\omega} = 1 + \frac{\omega-\omega_1}{1-q} + \frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.1-q^2\omega_1}{1-q.1-q^2.1-\omega} +$$

$$+ q^3 \frac{\omega-\omega_1.\omega-q\omega_1.\omega-q^2\omega_1.1-\omega_1.1-q^4\omega_1}{1-q.1-q^2.1-q^3.1-\omega.1-q\omega} + q^8 \ldots$$

18.

In der Gleichung (4) des vorigen Art. ist als specieller Fall die berühmte *Euler*'sche Formel*) enthalten, welche *Jacobi* in seinen Fundamentis**) als eine Formel »profundissimae inda-

*) *Euler*, Introductio I, cap. 16, § 323.

**) *Jacobi*, Fundamenta, p. 186.

Digitized by Google

ginis« bezeichnet, und später in einer besonderen Abhandlung *) auf arithmetischem Wege bewiesen hat. Setzt man nämlich $\omega=q$, so folgt

$$X(q,q)=1-q\,\frac{1-q^2}{1-q}+q^5\,\frac{1-q^4}{1-q^2}-q^{12}\,\frac{1-q^6}{1-q^3}\pm\ldots.$$

oder

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots=1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\ \ldots(a)$$

d. i.

$$\prod_{p=1}^{\infty}(1-q^p)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

wo die Exponenten von q die Reihe der sogenannten fünfeckigen Zahlen bilden.

Die im Vorstehenden enthaltene kurze und elementare Ableitung stellt diese Formel in eine Linie mit den beiden analogen Entwickelungen

$$\frac{1-q.1-q^2.1-q^3\ldots}{1+q.1+q^2.1+q^3\ldots}=1-2q+2q^4-2q^9\pm\ldots=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{nn}\quad\ldots(b)$$

und

$$\frac{1-q^2.1-q^4.1-q^6\ldots}{1-q\,.1-q^3.1-q^5\ldots}=1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\ldots\qquad\ldots(c)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

deren Exponenten die Reihen der viereckigen und der dreieckigen Zahlen darstellen. Alle diese Entwickelungen nämlich gehen, wie ich bereits früher in einer kurzen Notiz **) bemerkt habe, aus der einzigen Gleichung (7) des vorigen Art. hervor, wenn man resp.

---

*) »Beweis des Satzes, dass jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.« *Jacobi*, Math. Werke, I, S. 345—356. Den in der Einleitung zu diesem Aufsatze enthaltenen historischen Notizen fügen wir das Citat der Abhandlung von *Stern* im 21. Bande des *Crelle*'schen Journals, S. 97 und 177 hinzu.

**) Siehe diese Berichte, Jahrgang 1859, S. 159.

$$q \text{ statt } \omega_1\ , \qquad 0 \text{ statt } \omega\ ;$$

$$q \text{ statt } \omega_1\ , \qquad -q \text{ statt } \omega\ ;$$

$$q^2 \text{ statt } \omega_1\ , \qquad q \text{ statt } \omega \quad \text{und} \quad q^2 \text{ statt } q$$

schreibt.

Wir bemerken noch, dass die von *Gauss* und *Jacobi**) zum Behufe der Ableitung der Formeln (c) und (b) aufgestellten Gleichungen

$$\frac{1-x^{m-1}.\,1-x^{m-3}.\,1-x^{m-5}\,..}{1-x^{-1}\ .\,1-x^{-3}\ .\,1-x^{-5}\,..} =$$

$$= 1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{1-x^m.\,1-x^{m-1}}{1-x\,.\,1-x^2} - \frac{1-x^m.\,1-x^{m-1}.\,1-x^{m-2}}{1-x\,.\,1-x^2\ .\ 1-x^3} \pm \ldots$$

und

$$\frac{1+z.\,1+qz.\,1+q^2z\ \ldots}{1+q.\,1+q^2.\,1+q^3\ \ldots} =$$

$$= 1 - q\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^4\frac{1-z^2.\,1-q^2z^2}{1-q^2.\,1-q^4} - q^9\frac{1-z^2.\,1-q^2z^2.\,1-q^4z^2}{1-q^2.\,1-q^4\ .\,1-q^6} \pm \ldots$$

$$+ \frac{z}{q}\left\{q - q^4\,\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^9\,\frac{1-z^2.\,1-q^2z^2}{1-q^2.\,1-q^4} \mp \ldots\right\}$$

gleichfalls in der angeführten Formel (7) enthalten sind. Denn setzt man $q=\frac{1}{x}$, $\omega=x^m$, so geht die *Gauss*'sche Formel über in die Gleichung

$$\frac{X(q\omega,q^2)}{X(q,q^2)} = 1 + q\frac{1-\omega}{1-q} + q^3\frac{1-\omega.\,1-q\omega}{1-q\,.\,1-q^2} + q^6\frac{1-\omega.\,1-q\omega.\,1-q^2\omega}{1-q\,.\,1-q^2\,.\,1-q^3} + \ldots$$

Durch Zusammenziehung zweier aufeinanderfolgenden Glieder erhält man

$$\frac{X(q\omega,q^2)}{X(q,q^2)} = 1 + q\frac{1-\omega\ 1-q^3\omega}{1-q\,.\,1-q^2} + q^6\frac{1-\omega.\,1-q\omega.\,1-q^2\omega.\,1-q^7\omega}{1-q\,.\,1-q^2\,.\,1-q^3\ .\,1-q^4} + \ldots$$

und dieser Ausdruck ist ein specieller Fall von (7). Ebenso kann man für $z=-\omega$ die *Jacobi*'sche Formel schreiben

---

*) *Gauss* in der Abhandlung Summatio serierum quarundam singularium (1808) p. 8—11; *Jacobi* in den Fundamentis (1829) p. 186, und Mathem. Werke, I, S. 355; vergl. *Heine* in *Crelle's* Journal, Bd. 39, S. 288

Digitized by Google

$$\frac{X(\omega,q)}{X(-q,q)}=1-\frac{q+\omega.1-q\omega}{1-q^2}+q^3\frac{q+\omega.1-\omega^2.1-q^2\omega}{1-q^2.1-q^4}-$$

$$-q^8\,\frac{q+\omega.1-\omega^2.1-q^2\omega^2\;1-q^5\omega}{1-q^2.1-q^4.1-q^6}\pm\ldots$$

wiederum eine unmittelbare Folge von (7).

19.

Die Gleichungen (a) (b) (c) setzen uns in den Stand, die vier Functionen $\chi(h,h)$, $\chi(\frac{1}{2}h\;h)$, $\chi(h+\frac{1}{2},h)$ und $\chi(\frac{1}{2}h+\frac{1}{2},h)$ durch eigenthümliche Reihenentwickelungen darzustellen. Bezeichnet man diese Functionen der Bequemlichkeit halber der Reihe nach durch $\chi_1(q)$, $\chi_2(q)$, $\chi_3(q)$, $\chi_4(q)$, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\chi_1(q)=\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}$$

$$\chi_2(q)=\frac{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}{\Sigma q^{n(2n+1)}}=\frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$=\frac{\Sigma(-1)^n q^{nn}}{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}$$

$$\chi_3(q)=\frac{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{2nn}}=\frac{\Sigma(-1)^n q^{2n(3n+1)}}{\Sigma(-3)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$=\frac{\Sigma q^{2n(2n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{2n(3n+1)}}$$

$$\chi_4(q)=\frac{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)}}=\frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$=\frac{\Sigma q^{nn}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}$$

wo der Summationsindex alle ganzen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu durchlaufen hat. Man kann bemerken, dass $\chi_3(q)$ aus $\chi_2(q)$ hervorgeht, wenn man q^2 statt q schreibt und den reciproken Werth nimmt, während man, um $\chi_4(q)$ zu erhalten,

bloss das Vorzeichen von q umzukehren braucht. Berücksichtigt man ferner, dass die gefundenen Ausdrücke gleiche Zähler resp. Nenner haben, so kann man für die Quadrate und die Cuben der χFunctionen die Quotientengleichungen

$$\chi_2\chi_2 = \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma q^{n(3n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{nn}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}} \qquad *)$$

$$\chi_3\chi_3 = \frac{\Sigma(-1)^n q^{3n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{3nn}} = \frac{\Sigma q^{3n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$\chi_4\chi_4 = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)}} = \frac{\Sigma q^{nn}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$\chi_2^3(q) = \frac{\Sigma(-1)^n q^{nn}}{\Sigma q^{n(2n+1)}} = \frac{\Sigma(4n+1) q^{n(2n+1)}}{\Sigma(4n+1) q^{2n(2n+1)}} \qquad *)$$

$$\chi_3^3(q) = \frac{\Sigma q^{2n(2n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{2nn}} = \frac{\Sigma(4n+1) q^{4n(2n+1)}}{\Sigma(4n+1) q^{2n(2n+1)}}$$

$$\chi_4^3(q) = \frac{\Sigma q^{nn}}{\Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n (4n+1) q^{n(2n+1)}}{\Sigma(4n+1) q^{2n(2n+1)}}$$

ableiten.

Für das Quadrat von $\chi_1(q)$ dagegen erhält man die Zerlegungen

$$\chi_1\chi_1 = \Sigma q^{n(2n+1)} \,.\, \Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} \qquad *)$$

$$= \Sigma(-1)^n q^{2nn} \,.\, \Sigma(-1)^n q^{2n(3n+1)}$$

$$= \Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)} \,.\, \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

denen für den Cubus der nämlichen Function die drei analogen Gleichungen zur Seite stehen:

$$\chi_1^3(q) = \Sigma q^{n(2n+1)} \,.\, \Sigma(-1)^n q^{2nn} \,.\, \Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)}$$

$$= \Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} . \Sigma(-1)^n q^{2n(3n+1)} . \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

$$= \Sigma(-1)^n q^{nn} \,.\, \Sigma q^{2n(2n+1)} \,.\, \Sigma q^{nn}$$

---

*) Vergl. *Jacobi*, Math. Werke, 2. Bd., SS. 80, 81, 98.

Digitized by Google

Diese Gleichungen folgen durch Benutzung der früher angeführten Relation

$$1 = \chi_2 \chi_3 \chi_4$$

und werden vervollständigt durch die merkwürdige, von *Jacobi* herrührende Formel *)

$$\chi_1^3(q) = \Sigma(4n+1) q^{2n(2n+1)}$$

nebst

$$\chi_1^9 = \Sigma(4n+1) q^{n(2n+1)} . \Sigma(4n+1) q^{4n(2n+1)} . \Sigma(-1)^n (4n+1) q^{n(2n+1)} .$$

Den im Vorstehenden enthaltenen Formeln lassen sich übrigens noch andere von ähnlichem Charakter hinzufügen, und zwar ergibt sich:

$$\chi_2(q) = \frac{\Sigma(-1)^n q^{2nn}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n(2n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{2n(3n+1)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{3nn}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+2)}}{\Sigma q^{3n(2n+1)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(2n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}n(2n+1)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}nn}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(5n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(15n+2)} + \Sigma(-1)^n q^{15n^2+8n+1}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(5n+3)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(15n+4)} + \Sigma(-1)^n q^{15n^2+14n+3}}$$

Die **fünf** letzten dieser Quotienten lassen sich auch in folgender Gestalt schreiben:

---

*) *Jacobi*, Fundamenta, p. 185, arithmetischer Beweis in *Crelle's* Journal, Bd. 21, p. 13.

Digitized by Google

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots =$$

$$= \frac{1+q-q^8-q^{13}-q^{17}-q^{24}+q^{45}+q^{56}+q^{64}+q^{77}-q^{112}-\ldots}{1-q^2-q^3+q^9+q^{11}-q^{21}-q^{24}+q^{38}+q^{42}-q^{60}-q^{65}+\ldots}$$

$$= \frac{1+q^3-q^4-q^{11}-q^{19}-q^{32}+q^{35}+q^{52}+q^{68}+q^{91}-q^{96}-\ldots}{1-q-q^4+q^7+q^{13}-q^{18}-q^{27}+q^{34}+q^{46}-q^{55}-q^{70}+\ldots}$$

$$(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots =$$

$$= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-q^{21}+q^{28}+q^{36}-q^{45}-q^{55}+q^{66}+q^{78}-q^{91}-\ldots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-q^{35}-q^{40}+q^{51}+q^{57}-q^{70}-\ldots}$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+q^{21}+q^{28}+q^{36}+q^{45}+q^{55}+q^{66}+q^{78}+q^{91}+\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+q^{22}+q^{26}+q^{35}-q^{40}-q^{51}-q^{57}-q^{70}+\ldots}$$

$$(1+q^3)(1+q^6)(1+q^9)(1+q^{12})\ldots =$$

$$= \frac{1-2q+q^3+q^6-2q^{10}+q^{15}+q^{21}-2q^{28}+q^{36}+q^{45}-2q^{55}+q^{66}+q^{78}-2q^{91}\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+2q^{36}-2q^{49}+2q^{64}-2q^{81}\pm\ldots}$$

Die übrigen für $\chi_2(q)$ angeführten Ausdrücke stimmen mit den in der bemerkenswerthen Abhandlung von *Jacobi* »Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind«*) gegebenen sieben Ausdrücken des *Euler*'schen Products

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots$$

überein. Was die Functionen $\chi_3(q)$ und $\chi_4(q)$ betrifft, so versteht sich nach der vorhin gemachten Bemerkung von selbst, dass eben so viele Gleichungen, wie für $\chi_2(q)$, auch für diese Producte aufgestellt werden können, welche wir jedoch der Kürze halber nicht hinschreiben wollen.

20.

Um weitere Entwickelungen für die X Function abzuleiten, bedienen wir uns einer merkwürdigen, von *Heine* **) entdeckten Transformation der allgemeinen unendlichen Reihe

---

*) *Jacobi*, Math. Werke, II. Bd., S. 67—134.

**) *Heine* in *Crelle's* Journal, Bd. 34, S. 306.

$$\Omega = 1 + \frac{\omega-\omega_1 . 1-\psi}{1-q \;.\; 1-\psi_1} + \frac{\omega-\omega_1 . \omega-q\omega_1 . 1-\psi \;.\; 1-q\psi}{1-q \;.\; 1-q^2 \;.\; 1-\psi_1 . 1-q\psi_1} + \text{etc.}$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe kann unter der Form

$$\frac{X\frac{\omega_1}{\omega}\, X\psi}{Xq\, X\psi_1} \cdot \frac{Xq^{n+1} Xq^n\psi_1}{Xq^n\frac{\omega_1}{\omega}\, Xq^n\psi}\, \omega^n$$

geschrieben werden, wo nach Gl. (3) Art. 16

$$\frac{Xq^n\psi_1}{Xq^n\psi} = 1 + \frac{\psi-\psi_1}{1-q}\, q^n + \frac{\psi-\psi_1 . \psi-q\psi_1}{1-q \;.\; 1-q^2}\, q^{2n} + \,.\,.$$

Damit wird

$$\Omega = \frac{X\psi}{X\psi_1} \cdot \frac{X\frac{\psi_1}{\psi}\; X\frac{\omega_1}{\omega}}{Xq \;\; Xq} \sum_{m,n} q^{mn}\psi^m\omega^n \frac{Xq^{m+1} Xq^{n+1}}{Xq^m\frac{\psi_1}{\psi} Xq^n\frac{\omega_1}{\omega}}$$

und hier lehrt der Augenschein, dass der Werth des Productes $\frac{X\psi_1}{X\psi}\,\Omega$ sich nicht ändert, wenn man ω und ω_1 mit ψ und ψ_1 vertauscht. Hieraus geht die elegante Umformung

$$X\omega\, X\psi_1 \left\{1 + \frac{\omega-\omega_1 . 1-\psi}{1-q \;.\; 1-\psi_1} + \frac{\omega-\omega_1 . \omega-q\omega_1 . 1-\psi \;.\; 1-q\psi}{1-q \;.\; 1-q^2 \;.\; 1-\psi_1 . 1-q\psi_1} \ldots\right\} =$$

$$= X\psi\, X\omega_1 \left\{1 + \frac{\psi-\psi_1 . 1-\omega}{1-q \;.\; 1-\omega_1} + \frac{\psi-\psi_1 . \psi-q\psi_1 . 1-\omega \;.\; 1-q\omega}{1-q \;.\; 1-q^2 \;.\; 1-\omega_1 . 1-q\omega_1} \ldots\right\} \,.\,. \text{(A)}$$

hervor, wo die Moduln von q, ψ und ω die Einheit nicht erreichen dürfen.

Man kann statt des obigen Ausdruckes auch schreiben

$$X\omega X\psi_1 \left\{1 + \frac{\omega-\psi\omega . 1-\frac{\omega_1}{\omega}}{1-q \;.\; 1-\psi_1} \,.\,.\right\} = X\psi X\omega_1 \left\{1 + \frac{\psi-\psi\omega . 1-\frac{\psi_1}{\psi}}{1-q \;.\; 1-\omega_1} \,.\,.\right\}$$

und hier die rechte und die linke Seite für sich transformiren, indem man in (A) entweder $\psi\omega$ und $\frac{\omega_1}{\omega}$ statt ω_1 und ψ, oder $\psi\omega$ und $\frac{\psi_1}{\psi}$ statt ψ_1 und ω substituirt. Dann wird die neue Gleichung erhalten

Digitized by Google

$$X\frac{\omega_1}{\omega}\left\{1+\frac{\frac{\omega_1}{\omega}-\psi_1\,.\,1-\omega}{1-q\,.\,1-\psi\omega}\;..\right\}=X\frac{\psi_1}{\psi}\left\{1+\frac{\frac{\psi_1}{\psi}-\omega_1\,.\,1-\psi}{1-q\,.\,1-\psi\omega}\;..\right\}$$

indem sich der Factor $X\psi\omega$ zu beiden Seiten weghebt, oder mit Beseitigung der Nenner

$$\text{(B)}\ldots\; X\omega\left\{1+\frac{\omega-\psi\psi_1\,.\,1-\omega_1}{1-q\,.\,1-\psi_1\omega_1}\;..\right\}=X\psi\left\{1+\frac{\psi-\omega\omega_1\,.\,1-\psi_1}{1-q\,.\,1-\psi_1\omega_1}\;..\right\}$$

Durch Specialisirung von (A) und (B) ergeben sich vielerlei interessante Resultate. So z. B. ist in (B), wie *Heine* bemerkt hat*), als specieller Fall die berühmte *Euler*'sche Transformation der hypergeometrischen Reihe enthalten

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)\;.$$

Setzt man nämlich

$$\psi=q^{\lambda}z\;,\quad \omega=q^{\mu}z\;,\quad \psi_1=q^{\nu}\;,\quad \omega_1=q^{\varrho}$$

und lässt q nach der Einheit convergiren, so wird vermöge Gl. (β) des Art. 16

$$(1-z)^{-\mu}\left\{1+z\frac{\lambda-\mu+\nu\,.\,\varrho}{1\,.\,\nu+\varrho}\;..\right\}=(1-z)^{-\lambda}\left\{1+z\frac{\mu-\lambda+\varrho\,.\,\nu}{1\,.\,\nu+\varrho}\;..\right\}$$

mit der angeführten Gleichung identisch.

Aus (A) folgt für $\psi_1=\psi\omega_1$

$$X\omega X\psi\omega_1\left\{1+\frac{\omega-\omega_1\,.\,1-\psi}{1-q\,.\,1-\psi\omega_1}\;..\right\}=X\psi X\omega_1\left\{1+\frac{\psi-\psi\omega}{1-q}\;..\right\}$$

und da die Reihe rechts dem Quotienten $\frac{X\psi\omega}{X\psi}$ gleich ist,

$$\text{(C)}\ldots\;\frac{X\psi\omega X\omega_1}{X\omega X\psi\omega_1}=1+\frac{\omega-\omega_1\,.\,1-\psi}{1-q\;\,1-\psi\omega_1}+\frac{\omega-\omega_1\,.\,\omega-q\omega_1\,.\,1-\psi\,.\,1-q\psi}{1-q\,.\,1-q^2\,.\,1-\psi\omega_1\,.\,1-q\psi\omega_1}\;..$$

Diese von *Jacobi***) gefundene Formel bildet die Verallgemeinerung der Gleichung (G) des Art. 6, in welche sie mit Berücksichtigung von Gl. (γ) des Art. 16 durch eine der beiden Substitutionen

*) *Heine*, *Crelle's* Journal, Bd. 34, S. 325 Nr. XVIII.

**) *Jacobi*, *Crelle's* Journal, Bd. 32, S. 200 ff. Nr. 11, 12, 15, 16; vergl. auch *Heine* a. a. O. S. 307 flg. Nr. 80 und 84.

Digitized by Google

$$\psi=q^{y-z} \quad , \quad \omega=q^{x+z} \quad , \quad \omega_1=q^z$$

oder

$$\psi=q^{-x} \quad , \quad \omega=q^{x+z} \quad , \quad \omega_1=q^{x+y}$$

übergeht, wenn man gleichzeitig q sich der Einheit nähern lässt. Da zur Convergenz $\mathrm{mod}\,\omega<1$ erfordert wird, so muss $x+z$ einen positiven reellen Theil haben, wie in der That früher gezeigt worden.

Schreibt man in (C) q^2 statt q und setzt ausserdem $\psi=q$ und $\omega=q\omega_1$ oder $\omega_1=q\omega$, so entspringen Reihenentwickelungen für die Quadrate der Quotienten $\frac{X(\omega,q^2)}{X(q\omega,q^2)}$ und $\frac{X(q\omega,q^2)}{X(\omega,q^2)}$, denen leicht verschiedene Formen gegeben werden können.

Auch mag bemerkt werden, dass wenn man den Bruch

$$\frac{X\psi\omega}{X\omega}=\lim\frac{1-\psi\omega.1-q\psi\omega\,..\;\;1-q^{p-1}\psi\omega}{1-\omega.1-q\omega\,...\;1-q^{p-1}\omega.1-q^p\omega}=\sum_{n=0}^{p}\frac{a_n}{1-q^n\omega}$$

nach den gewöhnlichen Regeln in Partialbrüche zerlegt, und p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald $\mathrm{mod}\,q$ und $\mathrm{mod}\,\psi<1$ sind,

$$\lim a_n=\frac{X\psi}{Xq}\cdot\frac{\psi-q.\psi-q^2\,...\;\psi-q^n}{1-q.1-q^2\,...\;1-q^n}$$

gefunden wird, mithin

$$\frac{X\psi\omega\, Xq}{X\psi X\omega}=\frac{1}{1-\omega}+\frac{\psi-q}{1-q.1-q\omega}+\frac{\psi-q.\psi-q^2}{1-q.1-q^2.1-q^2\omega}+\dots$$

ein specieller Fall von Gleichung (C).

21.

Die Entwickelung des Logarithmus

$$\log X(\omega,q)=\sum_{p=0}^{\infty}\log(1-q^p\omega)$$

führt auf Reihen von eigenthümlichem Charakter. Man erhält sogleich

$$\log X(\omega,q)=-\sum_{pp'}\frac{q^{pp'}\omega^{p'}}{p'}=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\omega^p}{p(1-q^p)}$$

$$=-\left\{\frac{\omega}{1-q}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{1-q^2}+\frac{1}{3}\frac{\omega^3}{1-q^3}+\dots\right\}$$

Digitized by Google

wo der Modul von ω die Einheit nicht übersteigen darf. Für $q=1$ folgt die Grenzgleichung

$$\lim\,(1-q)\log X(\omega,q) = -\left\{\omega + \tfrac{1}{4}\omega^2 + \tfrac{1}{9}\omega^3 + \tfrac{1}{16}\omega^4 \;.\,.\right\}$$

Den vier Functionen $\chi_1(q)$, $\chi_2(q)$, $\chi_3(q)$, $\chi_4(q)$ entsprechen folgende Ausdrücke

$$\log\chi_1 = -\frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} - \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} - \;.\,.$$

$$\log\chi_2 = -\frac{q}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6} - \;.\,.$$

$$\log\chi_3 = +\frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6} \mp \;.\,.$$

$$\log\chi_4 = +\frac{q}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6} \mp \;.\,.$$

denen sich vermöge der Relationen des Art. 11 die Formeln

$$\log\chi_2 = -\frac{q}{1-q} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3} \pm \;.\,.$$

$$\log\chi_3 = \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^{12}} + \;.\,.$$

$$\log\chi_4 = \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^3} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{1-q^4} + \;.\,.$$

anschliessen. Für $q=1$ folgt ohne Schwierigkeit

$$\lim\,(1-q)\log\chi_1 = \lim\,(1-q)\log\chi_2 = -\tfrac{1}{12}\pi^2$$

$$\lim\,(1-q)\log\chi_3 = \lim\,(1-q)\log\chi_4 = +\tfrac{1}{24}\pi^2$$

Um die vorstehenden Ausdrücke nach den Potenzen von q zu entwickeln, berücksichtige man, dass in der Entwickelung von $\log\chi_1$ und $\log\chi_3$ eine bestimmte Potenz q^{2n} aus dem allgemeinen Gliede $\pm\frac{1}{p}\cdot\frac{q^{2p}}{1-q^{2p}}$ nur dann hervorgehen kann, wenn p ein Theiler von n ist. Ebenso wird bei $\log\chi_2$ und $\log\chi_4$ eine Potenz q^n aus dem allgemeinen Gliede $\pm\frac{1}{p}\cdot\frac{q^p}{1-q^{2p}}$ jedesmal dann erhalten, wenn n ein ungerades Vielfache von p ist. Bezeichnet man daher durch α_n die Summe aller Theiler von n, durch

Digitized by Google

β_n die Summe der ungeraden Divisoren, so ergeben sich die Reihen

$$\log \chi_1(q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \alpha_n q^{2n}$$

$$= -\left\{ q^2 + \tfrac{3}{2}q^4 + \tfrac{4}{3}q^6 + \tfrac{7}{4}q^8 + \tfrac{6}{5}q^{10} + \tfrac{12}{6}q^{12} + \tfrac{8}{7}q^{14} + \tfrac{15}{8}q^{16} .. \right\}$$

$$\log \chi_2(q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \beta_n q^n$$

$$= -\left\{ q + \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{4}{3}q^3 + \tfrac{1}{4}q^4 + \tfrac{6}{5}q^5 + \tfrac{4}{6}q^6 + \tfrac{8}{7}q^7 + \tfrac{1}{8}q^8 + . . \right\}$$

$$\log \chi_3(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \beta_n q^{2n}$$

$$= q^2 + \tfrac{1}{2}q^4 + \tfrac{4}{3}q^6 + \tfrac{1}{4}q^8 + \tfrac{6}{5}q^{10} + \tfrac{4}{6}q^{12} + \tfrac{8}{7}q^{14} + \tfrac{1}{8}q^{16} . .$$

$$\log \chi_4(q) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\, \beta_n q^n$$

$$= q - \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{4}{3}q^3 - \tfrac{1}{4}q^4 + \tfrac{6}{5}q^5 - \tfrac{4}{6}q^6 + \tfrac{8}{7}q^7 - \tfrac{1}{8}q^8 \pm . .$$

Man kann bemerken, dass $\beta_{2n+1} = \alpha_{2n+1}$, dagegen $\beta_{2n} = \beta_n$ ist.

Durch Differentiation erhält man ferner die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \log X(\omega, q) = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^p}{1 - q^p \omega} = -\left\{ \frac{1}{1-\omega} + \frac{q}{1-q\omega} + \frac{q^2}{1-q^2\omega} + \frac{q^3}{1-q^3\omega} .. \right\}$$

$$= -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\omega^p}{1 - q^{p+1}} = -\left\{ \frac{1}{1-q} + \frac{\omega}{1-q^2} + \frac{\omega^2}{1-q^3} + \frac{\omega^3}{1-q^4} .. \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \log X(\omega, q) = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p q^{p-1} \omega}{1 - q^p \omega} = -\left\{ \frac{\omega}{1-q\omega} + \frac{2q\omega}{1-q^2\omega} + \frac{3q^2\omega}{1-q^3\omega} .. \right\}$$

$$= -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^p \omega^{p+1}}{(1-q^{p+1})^2} = -\left\{ \frac{\omega}{(1-q)^2} + \frac{q\omega^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^2\omega^3}{(1-q^3)^2} .. \right\}$$

und für die Functionen $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4$, ausser den Potenzreihen

$$\frac{\partial}{\partial q} \log \chi_1 = -2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q^{2n-1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial q} \log \chi_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n q^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \log \chi_3 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n q^{2n-1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial q} \log \chi_4 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \beta_n q^{n-1}$$

Digitized by Google

die mannichfaltigen Entwickelungen

$$\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_1 = -2\left\{\frac{q}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^4)^2}+\frac{q^5}{(1-q^6)^2}\,..\right\}$$

$$= -2\left\{\frac{q}{1-q^2}+\frac{2q^3}{1-q^4}+\frac{3q^5}{1-q^6}\,..\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_2 = -\left\{\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}+q\frac{1+q^4}{(1-q^4)^2}+q^2\frac{1+q^6}{(1-q^6)^2}\,..\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1}{1-q}+\frac{3q^2}{1-q^3}+\frac{5q^4}{1-q^5}\,..\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1}{1+q}+\frac{2q}{1+q^2}+\frac{3q^2}{1+q^3}\,..\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1}{(1-q)^2}-\frac{q}{(1-q^2)^2}+\frac{q^2}{(1-q^3)^2}\mp\,..\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_3 = 2\left\{\frac{q}{(1-q^2)^2}-\frac{q^3}{(1-q^4)^2}+\frac{q^5}{(1-q^6)^2}\mp\,..\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{q}{1+q^2}+\frac{2q^3}{1+q^4}+\frac{3q^5}{1+q^6}+\,..\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{q}{1-q^2}+\frac{3q^5}{1-q^6}+\frac{5q^9}{1-q^{10}}+\,..\right\}$$

$$= 2\left\{q\frac{1+q^4}{(1-q^4)^2}+q^3\frac{1+q^8}{(1-q^8)^2}+q^5\frac{1+q^{12}}{(1-q^{12})^2}\,..\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_4 = \frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}-q\frac{1+q^4}{(1-q^4)^2}+q^2\frac{1+q^6}{(1-q^6)^2}-q^3\frac{1+q^8}{(1-q^8)^2}\pm\,..$$

$$= \frac{1}{1+q}+\frac{3q^2}{1+q^3}+\frac{5q^4}{1+q^5}+\,..$$

$$= \frac{1}{1-q}-\frac{2q}{1+q^2}+\frac{3q^2}{1-q^3}-\frac{4q^3}{1+q^4}\pm\,..$$

$$= \frac{1}{(1+q)^2}-\frac{q}{(1-q^2)^2}+\frac{q^2}{(1+q^3)^2}-\frac{q^3}{(1-q^4)^2}\pm\,..$$

Digitized by Google

22.

Bisher ist die Function $X(\omega,q)$ nur für den Fall betrachtet worden, wo $\mathrm{mod}\, q<1$ war. Indess zeigen die in den vorhergehenden Artt. aufgestellten Entwickelungen, dass $X(\omega,q)$ einen bestimmten Sinn auch für den Fall behält, dass $\mathrm{mod}\, q>1$ wird. So ist in den Formeln (1) und (2) des Art. 16 der Satz enthalten, dass $X\omega$ in $\frac{1}{X\omega}$ übergeht, wenn man q mit $\frac{1}{q}$ und ω mit $\frac{\omega}{q}$ vertauscht, und dasselbe lehrt die Entwickelung von $\log X(\omega,q)$, welche bei derselben Vertauschung ihr Vorzeichen umkehrt. Man hat folglich

$$X\left(\frac{\omega}{q},\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{X(\omega,q)} \qquad \text{oder} \qquad X\left(\omega,\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{X(q\omega,q)}$$

und hieraus ergeben sich leicht die Ausdrücke

$$\chi_2\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{\chi_2(q)} \quad , \quad \chi_3\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{2\chi_3(q)} \quad , \quad \chi_4\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{\chi_4(q)}$$

während für die Function $\chi_1\left(\frac{1}{q}\right)$

$$\frac{1}{\chi_1\left(\frac{1}{q}\right)}=1-\frac{1}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^2.1-q^4}-\frac{q^6}{1-q^2.1-q^4.1-q^6}\pm\ldots=0$$

gefunden wird. Dieser Ausdruck hört somit auf, eine Function von q zu sein, so dass die Transscendente $\chi_1(q)$ für $\mathrm{mod}\, q>1$ keinen Sinn mehr hat.

Untersucht man die Differentialformeln, denen die Functionen $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4$ genügen, so ergibt sich, dass $\chi_1(q)$ von einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung abhängt, während für $\chi_2(q)$, $\chi_3(q)$, $\chi_4(q)$ Gleichungen erster Ordnung aufgestellt werden können. Man findet

$$24q\left\{3q\frac{\partial^2}{\partial q^2}\log\chi_1-6q\left(\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_1\right)^2+2\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_1\right\}$$
$$=1-\chi_1^{\,8}\chi_4^{\,16}+16q\frac{\chi_1^{\,8}}{\chi_4^{\,8}} \qquad \ldots (\alpha)$$

nebst

$$(\beta) \ldots \quad 24q\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_2 = 1-16q\chi_1^4\chi_3^8-\chi_1^4\chi_4^8$$

$$(\gamma) \ldots \quad 24q\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_3 = -2+\chi_1^4\chi_2^8+\chi_1^4\chi_4^8$$

$$(\delta) \ldots \quad 24q\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_4 = 1-\chi_1^4\chi_2^8+16q\chi_1^4\chi_3^8$$

welche Ausdrücke zu mannichfachen arithmetischen Folgerungen Anlass geben, wenn man die Entwickelungen nach den Potenzen von q ausführt.

Die Ableitung der vorstehenden Differentialgleichungen kann auf verschiedenen Wegen geschehen. So kann man sich z. B. zur Berechnung von (α) der von *Borchardt**) für das arithmetisch-geometrische Mittel aufgestellten Differentialformel

$$mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l)=0$$

bedienen, wo

$$m=\varrho\chi_4^4 \quad , \quad n=\varrho\chi_2^4 \quad , \quad f(m,n)=\frac{\varrho}{\chi_1\chi_1}$$

zu setzen und die partiellen Differentialquotienten

$$\mu=\frac{\partial f}{\partial m} \; , \; \nu=\frac{\partial f}{\partial n}$$

aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho}=\frac{1}{\chi_1\chi_1}=\mu\chi_4^4+\nu\chi_2^4$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial q}=-\frac{2}{\chi_1\chi_1}\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_1=4\left(\mu\chi_4^4\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_4+\nu\chi_2^4\frac{\partial}{\partial q}\log\chi_2\right)$$

zu berechnen sind. Für l ergibt sich der Werth

$$l\frac{\partial}{\partial q}\log\frac{m}{n}=\mu\nu\frac{\partial}{\partial q}\log\frac{\nu}{\mu}$$

so dass der Factor ϱ bei der Rechnung überall von selbst fortfällt.

---

*) *Borchardt* im Journal für Mathematik, Bd. 58, S. 131.

Digitized by Google

23.

Die Ausdrücke des Art. 19 liefern die Gleichungen

$$\chi_1\chi_2^2=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{nn}\ ,\ \chi_1\chi_3^2=\Sigma q^{2n(2n+1)}\ ,\ \chi_1\chi_4^2=\Sigma q^{nn}\ \ldots(1)$$

welche uns in den Stand setzen, die noch unbewiesenen Transformationsformeln des Art: 11 abzuleiten. Es bedarf hierzu bloss der Anwendung eines von *Cauchy* *) herrührenden allgemeinen Satzes, nach welchem man

$$\sqrt{x}\sum_{-\infty}^{\infty} f(nx) = \sqrt{y}\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(ny) \qquad \ldots (2)$$

hat, sobald zwischen den Functionen f und φ die einander gegenseitig bedingenden Relationen

$$fx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi t\, e^{txi}\,dt \quad , \quad \varphi x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ft\, e^{-txi}\,dt$$

nebst $xy=2\pi$ erfüllt sind.

Setzt man mit *Cauchy*

$$fx=e^{-\pi x^2} \quad , \quad \varphi x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\pi}}$$

so folgt

$$\sqrt{x}\,\Sigma e^{-n^2\pi x^2}=\sqrt{\frac{y}{2\pi}}\ \Sigma e^{-\frac{n^2y^2}{4\pi}}=\sqrt{\frac{1}{x}}\ \Sigma e^{-\frac{n^2\pi}{x^2}}$$

und für

$$x^2=\frac{h}{i}=\frac{i}{k} \quad , \quad q=e^{h\pi i} \quad , \quad q'=e^{k\pi i}$$

$$\Sigma q^{nn}=\sqrt{\frac{i}{h}}\ \Sigma q'^{nn} \qquad \ldots (3)$$

Schreibt man in (2) $2x$ statt x, folglich $\frac{1}{2}y$ statt y, so wird

$$2\sqrt{x}\,\Sigma f(2nx) = \sqrt{y}\ \Sigma\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)$$

---

*) *Cauchy*, Bulletin de la société philomatique, Août 1817, p. 121.

und wenn man (2) subtrahirt

$$(4)\ \ldots \qquad \sqrt{x}\,\Sigma(-1)^n f(nx) = \sqrt{y}\,\Sigma\varphi\left(\frac{2n+1}{2}y\right)$$

Hieraus geht analog wie oben hervor

$$\sqrt{x}\,\Sigma(-1)^n e^{-n^2\pi x^2} = \sqrt{\frac{1}{x}}\,\Sigma e^{-(n+\frac{1}{2})^2\frac{\pi}{x^2}} ;$$

also je nachdem $x^2 = \frac{h}{i}$ oder $= \frac{k}{i}$ gesetzt wird:

$$(5)\ \ldots \qquad \Sigma(-1)^n q^{nn} = \sqrt{\frac{i}{h}}\,\Sigma q'^{(n+\frac{1}{2})^2}$$

nebst

$$(6)\ \ldots \qquad \Sigma q^{(n+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{i}{h}}\,\Sigma(-1)^n q'^{nn} .$$

Berücksichtigt man noch die Identität

$$\Sigma q^{(n+\frac{1}{2})^2} = 2\Sigma q^{(2n+\frac{1}{2})^2}$$

so ergeben die Formeln (5) (6) und (3)

$$\chi_1(q)\,\chi_2^2(q) = 2\sqrt{\frac{i}{h}}\,q'^{\frac{1}{4}}\chi_1(q')\,\chi_3^2(q')$$

$$\chi_1(q)\,\chi_3^2(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{h}}\,q^{-\frac{1}{4}}\chi_1(q')\,\chi_2^2(q')$$

$$\chi_1(q)\,\chi_4^2(q) = \sqrt{\frac{i}{h}}\,\chi_1(q')\,\chi_4^2(q')$$

woraus wegen $\chi_2\chi_3\chi_4 = 1$ durch Multiplication

$$\chi_1^3(q) = \left(\frac{i}{h}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4}(k-h)\pi i}\,\chi_1^3(q')$$

entspringt. Da für $h=k=i$ $q=q'$ wird, so folgt durch Wurzelausziehung

$$(a)\ \ldots \qquad \chi(h,h) = \sqrt{\frac{i}{h}}\,e^{\frac{1}{12}(k-h)\pi i}\,\chi(k,k)$$

wie im Art. 11. Die den Functionen $\chi_2\,\chi_3\,\chi_4$ entsprechenden Transformationsgleichungen (b) (c) (d) erhält man jetzt ohne Mühe, wesshalb wir sie hier nicht wiederholen.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung des Verhaltens der vier Functionen $\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4$ für den Fall, dass q sich

Digitized by Google

der Einheit nähert. Alsdann wachsen χ_3 und χ_4 über alle Grenzen, während χ_1 und χ_2 zu Null convergiren. Es fragt sich, in welcher Weise dieses Abnehmen und jenes Wachsen stattfindet. Die Antwort geben die obigen Transformationen, indem für $q=1\; q'$ verschwindet. Man findet dadurch für abnehmende Werthe von h die asymptotischen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \chi_1=\sqrt{\frac{i}{h}}\, e^{-\frac{\pi i}{12h}}, & \chi_2=\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{12h}} \\ \chi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi i}{24h}}, & \chi_4=e^{\frac{\pi i}{24h}} \end{array}\right\} \quad \ldots (7)$$

im Einklange mit den Gleichungen für $\lim (1-q)\log\chi$ des 21. Art.; ferner

$$\chi_1\chi_2^2=2\sqrt{\frac{i}{h}}\, e^{-\frac{\pi i}{4h}}, \quad \chi_1\chi_3^2=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{h}}, \quad \chi_1\chi_4^2=\sqrt{\frac{i}{h}} \quad \ldots (8)$$

24.

Die vorhin benutzten Gleichungen (1) führen ferner zum Beweise des merkwürdigen Satzes, dass der reciproke Werth $\frac{1}{\chi_1\chi_4}$ dem sogenannten arithmetisch-geometrischen Mittel aus den vierten Potenzen der Functionen χ_3 und χ_4 gleich ist.

Diess zu zeigen, bilden wir durch Addition und Subtraction die Ausdrücke

$$\chi_1(\chi_4^2+\chi_2^2)=2\Sigma q^{4nn}=2\chi_1(q^4)\chi_4^2(q^4)$$

$$\chi_1(\chi_4^2-\chi_2^2)=4q\,\Sigma q^{8n(2n+1)}=4q\chi_1(q^4)\chi_3^2(q^4)$$

wo das Argument q überall weggelassen worden ist. Wegen

$$\chi_1(q^4)=\chi_1(q)\chi_3(q)\chi_3(q^2)$$

wird

$$\chi_4^2+\chi_2^2=2\chi_3\chi_3(q^2)\chi_4^2(q^2) \quad \ldots (1)$$

$$\chi_4^2-\chi_2^2=4q\chi_3\chi_3(q^2)\chi_3^2(q^4) \quad \ldots (2)$$

woraus durch Quadriren von (2)

Digitized by Google

$$\chi_1^4+\chi_2^4 = 2\chi_2^2\chi_1^2+16q^2\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\chi_3^4(q^4)$$

folgt, während die Multiplication von (1) und (2) ergibt

$$\chi_1^4-\chi_2^4 = 8q\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\chi_3^2(q^4)\chi_1^2(q^4) \ .$$

Mit Hülfe der Relationen

$$(3) \ldots \qquad \chi_2(q^2) = \chi_2\chi_1 \quad , \qquad \chi_3 = \chi_3(q^2)\chi_1(q^2)$$

$$(4) \ldots \qquad \chi_3\chi_2(q^2) = 1 \quad , \qquad \chi_2^2\chi_1^2 = \chi_3^2\chi_2^4(q^2)$$

kann man dafür schreiben

$$\chi_1^4+\chi_2^4 = 2\chi_3^2\{\chi_2^4(q^2)+8q^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_3^4(q^4)\}$$

$$(5) \ldots \qquad \chi_1^4-\chi_2^4 = 8q\chi_3^2\chi_3^4(q^2) \ .$$

und wenn man diese Gleichungen mit einander verbindet

$$(6) \ldots \qquad \chi_1^4+\chi_2^4 = 2\chi_3^2\chi_1^4(q^2) \ .$$

Durch Multiplication von (5) und (6) findet man die berühmte Formel *Jacobi's**) :

$$(7) \ldots \qquad \chi_2^8+16q\chi_3^8 = \chi_1^8$$

d. h.

$$(8) \ldots \Pi(1-q^{2p+1})^8+16q\,\Pi(1+q^{2p+2})^8 = \Pi(1+q^{2p+1})^8$$

oder nach Multiplication durch χ_1^4

$$(9) \ldots \{\Sigma(-1)^n q^{nn}\}^4 + 16q\{\Sigma q^{2n(2n+1)}\}^4 = \{\Sigma q^{nn}\}^4 \ .$$

Schreibt man jetzt zur Abkürzung

$$m=\chi_1^4(q) \quad , \quad n=\chi_2^4(q)$$

und bildet die successiven Mittelwerthe

$$m_1=\tfrac{1}{2}(m+n) \quad , \quad n_1=\sqrt{mn}$$

$$m_2=\tfrac{1}{2}(m_1+n_1) \quad , \quad n_2=\sqrt{m_1n_1}$$

. . . . .

so ergibt sich mit Berücksichtigung von (4) und (6)

$$m_1=\chi_3^2\chi_1^4(q^2) \quad , \quad n_1=\chi_3^2\chi_2^4(q^2) \quad .$$

Diese Werthe zeigen, dass man von m und n zu m_1 und n_1 ge-

*) Fundamenta, p. 90, Nr. 14.

Digitized by Google

langt, wenn man q^2 statt q schreibt und den Factor χ_3^2 hinzufügt. Da man dieses Verfahren weiter fortsetzen kann, so folgt

$$m_2=\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_4^4(q^4) \quad , \quad n_2=\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_2^4(q^4)$$

$$m_3=\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_3^2(q^4)\,\chi_4^4(q^8) \quad , \quad n_3=\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_3^2(q^4)\,\chi_2^4(q^8)$$

u. s. w. Bedenkt man endlich, dass die Functionen $\chi(q^p)$ mit wachsendem p die Einheit zur Grenze haben, so wird das arithmetisch-geometrische Mittel

$$\mu=\chi_3^2\chi_3^2(q^2)\,\chi_3^2(q^4)\,\chi_3^2(q^8)\;\ldots$$

und der reciproke Werth

$$\frac{1}{\mu}=\chi_2^2(q^2)\,\chi_2^2(q^4)\,\chi_2^2(q^8)\;\ldots\quad \text{in inf.}$$

erhalten. Letzterer ist aber wegen Gl. (B) des Art. 11 für $x=h$ dem Quadrate $\chi_1\chi_1$ gleich, w. z. b. w.

25.

Die Gleichung (7) des vorigen Art. kann unter der symmetrischen Form

$$l^2+n^2=m^2$$

geschrieben werden, wenn man neben m und n die Bezeichnung

$$l=4\sqrt{q}\;\chi_3^4(q)$$

einführt. Bildet man analog wie früher die Reihe der Mittelwerthe

$$l'=\sqrt{lm} \quad , \quad m'=\tfrac{1}{2}(l+m)$$

$$l''=\sqrt{l'm'} \quad , \quad m''=\tfrac{1}{2}(l'+m')$$

u. s. w. bis man zum arithmetisch-geometrischen Mittel λ gelangt, so lässt sich zeigen, dass diese Operation auf die wiederholte Substitution von $\sqrt{q}$ an die Stelle von q führt.

Die Addition von (5) und (6) ergibt sogleich

$$\chi_4^4=\chi_3^2\{\chi_4^4(q^2)+4q\chi_3^4(q^2)\}$$

und wenn man q mit $\sqrt{q}$ vertauscht und mit χ_2^2 multiplicirt:

$$l+m=\chi_2^2\chi_4^4(\sqrt{q})\;.$$

Digitized by Google

Ebenso folgt mittelst (3)

$$\chi_3^4 = \chi_3^2 \chi_3^2(q^2)\chi_4^2(q^2)$$

oder nach Substitution von $\sqrt{q}$ statt q und Hinzufügung des Factors $2q^{\frac{1}{4}}\ \chi_2^2$ wegen (4)

$$\sqrt{lm} = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_2^2\chi_3^4(\sqrt{q}) \ .$$

Hiernach gehen

$$l' = \tfrac{1}{2}\chi_2^2 . 4q^{\frac{1}{4}}\chi_3^4(q^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad m' = \tfrac{1}{2}\chi_2^2 . \chi_4^4(q^{\frac{1}{2}})$$

aus l und m hervor, wenn man $q^{\frac{1}{2}}$ statt q schreibt und den Factor $\frac{1}{2}\chi_2^2(q)$ hinzufügt. Ebenso werden

$$l'' = \tfrac{1}{4}\chi_2^2\chi_2^2(q^{\frac{1}{2}}) . 4q^{\frac{1}{8}}\chi_3^4(q^{\frac{1}{4}}) \quad ,$$

$$m'' = \tfrac{1}{4}\chi_2^2\chi_2^2(q^{\frac{1}{2}}) . \chi_4^4(q^{\frac{1}{4}})$$

$$l''' = \tfrac{1}{8}\chi_2^2\chi_2^2(q^{\frac{1}{2}})\chi_2^2(q^{\frac{1}{4}}) . 4q^{\frac{1}{16}}\chi_3^4(q^{\frac{1}{8}})$$

$$m''' = \tfrac{1}{8}\chi_2^2\chi_2^2(q^{\frac{1}{2}})\chi_2^2(q^{\frac{1}{4}}) . \chi_4^4(q^{\frac{1}{8}})$$

und schliesslich für wachsende Werthe von $\nu = 2^n$

$$\lambda = \lim \frac{1}{\nu}\chi_2^2\chi_2^2(q^{\frac{1}{2}})\chi_2^2(q^{\frac{1}{4}}) \ . \ . \ . \ \chi_2^2(q^{\frac{2}{\nu}})\chi_4^4(q^{\frac{1}{\nu}})$$

gefunden. Eliminirt man hier χ_2 mittelst der Gleichung

$$\chi_1\chi_2 = \chi_1(\sqrt{q}) \ ,$$

so erhält man

$$\lambda = \frac{1}{\chi_1^2} \lim \frac{1}{\nu}\chi_1^2(q^{\frac{1}{\nu}})\chi_4^4(q^{\frac{1}{\nu}}) \quad .$$

Da sich $q^{\frac{1}{\nu}}$ der Einheit ohne Grenze nähert, so können wir von den Gleichungen (6) oder (7) des Art. 20 Gebrauch machen, und erhalten

$$\lim \chi_1(q^{\frac{1}{\nu}})\chi_4^2(q^{\frac{1}{\nu}}) = \sqrt{\frac{\nu i}{h}}$$

folglich

$$\lambda = \frac{i}{h\chi_1^2} \ .$$

Die Verbindung dieses Werthes mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel μ des vorigen Art. gibt

Digitized by Google

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{h}{i} \quad \text{oder} \quad q = e^{-\frac{\mu\pi}{\lambda}} .$$

Uebrigens lässt sich der Werth von λ auch direct aus der Gleichung für μ ableiten, wenn man bedenkt, dass durch die Transformation von h in k, m und n resp. in $e^{\frac{1}{4}(k-h)\pi i} m$ und $e^{\frac{1}{4}(k-h)\pi i} l$, so wie umgekehrt l in $e^{\frac{1}{4}(k-h)\pi i} n$ übergehen. Es muss sich desshalb gleichzeitig μ in $e^{\frac{1}{4}(k-h)\pi i}\lambda$ verwandeln. Da nun $\mu = \frac{1}{\chi_1^2}$, so führt die Anwendung von (a) Art. 11 sogleich auf den obengefundenen Werth von λ.

26.

Es ist bisher keine Rücksicht auf die Vieldeutigkeit der arithmetisch-geometrischen Mittelwerthe genommen worden, welche in dem Umstande ihre Begründung findet, dass die Vorzeichen der geometrischen Mittel willkürlich gewählt werden können. Betrachtet man z. B. den vorhin abgeleiteten Werth $\lambda = \frac{i}{h\chi_1^2}$ als Function von q, so kann man h um eine beliebige gerade Zahl $2f$ ändern, ohne dass der Werth von q eine Aenderung erleidet. Schreibt man aber $h + 2^{p+1}u$ statt h, wo u eine ungerade Zahl bedeutet, so geht $l^{(p)}$ wegen des Factors $q^{2^{\frac{1}{p+1}}}$ in den entgegengesetzten Werth über, und man gelangt schliesslich zu dem arithmetisch-geometrischen Mittel

$$\lambda = \frac{i}{(h + 2^{p+1}u)\chi_1^2} = \frac{i}{(h+2f)\chi_1\chi_1} .$$

Der Uebergang zu μ wird wiederum durch die Transformation von h in k vermittelt, und liefert den Ausdruck

$$\mu = \frac{1}{(1-2fh)\chi_1\chi_1} .$$

Indess sind auch diese Ausdrücke noch nicht die allgemeinsten, wie aus der einfachen Betrachtung erhellt, dass es

Digitized by Google

auch im Werthe von μ erlaubt sein muss, h um eine gerade Zahl $2f'$ zu ändern. Dadurch entstehen die correspondirenden Gleichungen

$$\mu = \frac{1}{(1-4ff'-2fh)\chi_1\chi_1'} \quad , \quad \lambda = \frac{i}{((1-4ff')h+2f)\chi_1\chi_1} \quad ,$$

wo h von Neuem um eine gerade Zahl geändert werden kann. Es ist leicht zu sehen, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens auf Ausdrücke von der Form

$$\mu = \frac{1}{(a-bh)\chi_1\chi_1} \quad , \quad \lambda = \frac{i}{(ah+b)\chi_1\chi_1}$$

geführt wird, wo a durch 4 getheilt den Rest $+1$ lässt, während b eine beliebige positive oder negative gerade Zahl sein kann, welche mit a keinen Factor gemein hat.

Um diess zu beweisen, bilde man die Reihe von Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & b_0 = 0 \\
a_1 = a_0 & b_1 = b_0 + 2fa_0 \\
a_2 = a_1 + 2f_1 b_1 & b_2 = b_1 \\
a_3 = a_2 & b_3 = b_2 + 2f_2 a_2 \\
a_4 = a_3 + 2f_3 b_3 & b_4 = b_3 \\
a_5 = a_4 & b_5 = b_4 + 2f_4 a_4 \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

wo der Gleichförmigkeit halber f_1 statt $-f'$ geschrieben ist. Es bedeuten hier $a_0 - b_0 h$, $a_1 - b_1 h$, $a_2 - b_2 h$ u. s. w. die Nenner der aufeinanderfolgenden μ; $a_0 h + b_0$, $a_1 h + b_1$, $a_2 h + b_2$ u. s. w. die successiven Nenner der Ausdrücke für λ. Durch Division findet man

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2f} \quad , \quad \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{2f_2} \dot{+} \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{1}{2f_2} \dot{+} \frac{b_2}{a_2} \quad , \quad \frac{b_4}{a_4} = \frac{1}{2f_3} \dot{+} \frac{a_3}{b_3}$$

$$\frac{a_5}{b_5} = \frac{1}{2f_4} \dot{+} \frac{b_4}{a_4} \quad , \qquad \text{u. s. w.}$$

Digitized by Google

und hieraus erkennt man, dass, um bestimmte Werthe von a und b zu erzielen, man den Quotienten beider Zahlen in einen Kettenbruch zu entwickeln hat, dessen Partialnenner lauter geraden Zahlen gleich sind. So wird z. B.

$$\frac{a_5}{b_5} = \frac{1}{2f_4} \dotplus \frac{1}{2f_3} \dotplus \frac{1}{2f_2} \dotplus \frac{1}{2f_1} \dotplus \frac{1}{2f} .$$

27.

Die Differentiation der bekannten Substitution

$$m \operatorname{tg}^2\varphi = n \operatorname{tg}^2\psi$$

liefert nach einer leichten Rechnung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(m\sin^2\psi + n\cos^2\psi)}\sqrt{(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)}} .$$

Aber

$$(m\sin^2\psi + n\cos^2\psi)(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi) = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \sin^2 2\psi + mn\cos^2 2\psi ,$$

folglich mit der Bezeichnung des Art. 24

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(m_1^2\sin^2 2\psi + n_1^2\cos^2 2\psi)}} .$$

Die Winkel φ und ψ durchlaufen gleichzeitig den ersten Quadranten, so dass die gefundene Gleichung erfüllt bleibt, wenn man auf beiden Seiten zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integrirt. Da die rechte Seite die nämlichen Werthe zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$, wie zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, so geht durch Einführung einer neuen Variable für 2ψ die Gleichuug hervor*)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(m_1^2\sin^2\varphi + n_1^2\cos^2\varphi)}} .$$

---

*) *Gauss*, Determ. attract. (1818) Art. 16.

Da die Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich auf das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\mu^2 \sin^2\varphi + \mu^2 \cos^2\varphi)}} = \frac{\pi}{2\mu}$$

führt, so erhält man für den inversen Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels μ

$$(1) \ldots \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2 \sin^2\varphi + n^2 \cos^2\varphi)}} = \frac{1}{\mu} \quad .$$

Auf demselben Wege folgt durch Vertauschung von n und l resp. μ und λ

$$(2) \ldots \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi)}} = \frac{1}{\lambda} \quad .$$

Beiden Gleichungen können leicht verschiedene Formen gegeben werden. Substituirt man z. B. $x = \cos\varphi$, so wird

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-l^2x^2}} = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-n^2x^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

wofür *Jacobi**) die Bezeichnungen

$$K = \frac{m\pi}{2\mu} \quad , \quad K' = \frac{m\pi}{2\lambda} \quad , \quad \varkappa = \frac{l}{m} \quad , \quad \varkappa' = \frac{n}{m}$$

eingeführt hat. Dem Frühern zufolge erhält man

$$\frac{2K}{\pi} = \chi_1^{\,2}\chi_4^{\,4} \quad , \quad \frac{2K'}{\pi} = \frac{h}{i}\chi_1^{\,2}\chi_4^{\,4} \quad , \quad \log q = -\pi\frac{K'}{K}$$

wenn

$$\varkappa = 4q^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\chi_3}{\chi_4}\right)^4 \quad , \quad \varkappa' = \left(\frac{\chi_2}{\chi_4}\right)^4 \quad , \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

gesetzt wird.

---

*) *Jacobi*, Fundamenta, p. 34, vergl. *Crelle's* Journal, Bd. 3, S. 192, sowie Astron. Nachrichten, No. 127.

Auch hat bereits *Jacobi* gezeigt*), dass wenn man den Weg, auf dem die Integrationsvariable x von der unteren zur oberen Grenze gelangt, in der geeigneten Weise variirt, die vieldeutigen Werthe der arithmetisch-geometrischen Mittel λ und μ erhalten werden, welche im vorigen Art. entwickelt worden sind.

In der That braucht man nur zu beachten, dass die Functionen unter dem Integralzeichen die vier Verzweigungspunkte

$$x = \pm 1 \quad \text{und} \quad x = \pm \frac{m}{l} \quad \text{resp.} \quad x = \pm \frac{m}{n}$$

besitzen, in denen die Wurzelgrössen im Nenner verschwinden, und überzeugt sich leicht auf bekannte Weise, dass hierdurch das Integral für $\frac{1}{\mu}$ um gerade Vielfache von

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-l^2x^2}} \quad \text{und von} \quad \frac{2}{\pi}\int_{\frac{m}{l}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-l^2x^2}}$$

geändert wird. Letzterer Integralausdruck lässt sich durch die Substitution $l^2x^2=m^2-n^2y^2$ sofort auf

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{m}{l}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-l^2x^2}} = \frac{2i}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{m^2-n^2y^2}} = \frac{2K'i}{m\pi}$$

reduciren, während

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-l^2x^2}} = \frac{4K}{m\pi}.$$

Auf analoge Weise ergibt sich, dass der Werth des Integrals für $\frac{1}{\lambda}$ um gerade Vielfache von

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-n^2x^2}} = \frac{4K'}{m\pi}$$

und von

*) Siehe *Crelle's* Journal, Bd. 18, S. 55.

Digitized by Google

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{m}{n}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{m^2-n^2x^2}}=\frac{2Ki}{m\pi}$$

geändert werden kann. Damit folgt

$$\frac{1}{\mu}=\frac{2K}{m\pi}+\frac{8fK}{m\pi}+\frac{4gK'i}{m\pi}=(4f+1+2gh)\chi_1^2$$

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{2K'}{m\pi}+\frac{8fK'}{m\pi}+\frac{4gKi}{m\pi}=(\overline{4f+1}h-2g)\frac{\chi_1^2}{i}$$

wo f und g beliebige ganze, positive oder negative, Zahlen bedeuten. Diese Ausdrücke stimmen mit den entsprechenden Werthen des vorigen Art. überein, wenn man $a=4f+1$, $b=-2g$ setzt; nur ist zu bemerken, dass jetzt a und b nicht relative Primzahlen zu sein brauchen, während bei der Kettenbruchsentwickelung

$$\frac{1}{2f_\nu}\dot{+}\frac{1}{2f_{\nu-1}}\;\cdots\;\dot{+}\frac{1}{2f_1}\dot{+}\frac{1}{2f}=\frac{a}{b}$$

ein gemeinschaftlicher Theiler beider Zahlen ausgeschlossen war.

28.

Wir kehren nunmehr wieder zu der im Art. 9 entwickelten Function φx zurück, und bilden nach unseren früheren Sätzen die halbperiodische ungerade Function

$$fx=\varphi x\,\varphi(h-x)=e^{(\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2 h\pi i}\chi(x,h)\,\chi(h-x,h)$$

$$=e^{(\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2 h\pi i}(1-\omega^2)(1-q^2\omega^2)(1-q^4\omega^2)(1-q^6\omega^2)\ldots$$

$$\times\;(1-q^2\omega^{-2})(1-q^4\omega^{-2})(1-q^6\omega^{-2})\ldots \text{ in inf.}$$

für welche das Stattfinden der geforderten Doppelgleichung

$$f(x+h)=f(-x)=-fx$$

durch Substitution ohne Weiteres erhellt.

Um das unendliche Product auf der rechten Seite unserer

Digitized by Google

Definitionsgleichung nach den Potenzen von ω zu entwickeln, setzen wir

$$c\chi(x,h)\,\chi(h-x,h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\omega^{2n} = \omega\psi(\omega,q) \ ,$$

wo die Constante c so bestimmt werden soll, dass $a_0 = 1$ wird. Die Benutzung der Functionalgleichung

$$\psi(\omega,q) + q\omega^2\psi(q\omega,q) = 0$$

liefert, wie schon *Eisenstein* gezeigt hat*), am einfachsten die Bestimmung der Coefficienten a_n. Denn aus

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_{n+1} + a_n q^{2n})\,\omega^{2n}$$

folgt ohne Mühe

$$a_n = (-1)^n q^{n(n-1)}$$

und damit

$$c\chi(x,h)\,\chi(h-x,h) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)} \omega^{2n} \ .$$

Der Werth des Factors c ergibt sich durch Substitution eines geeigneten speciellen Werthes von x oder ω. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{3}h$, so wird

$$c\chi(\tfrac{1}{3}h,h)\,\chi(\tfrac{2}{3}h,h) = \sum\,(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)} = \chi(\tfrac{1}{3}h\,,\,\tfrac{1}{3}h)$$

folglich

$$c = \frac{\chi(\frac{1}{3}h\,,\,\frac{1}{3}h)}{\chi(\frac{1}{3}h,h)\,\chi(\frac{2}{3}h,h)} = \chi(h,h) = \chi_1(q) \ .$$

Zu derselben Bestimmung hätten, mit Benutzung der Formeln des Art. 16, die Werthe

$$x = \tfrac{1}{2}h\ ,\ h+\tfrac{1}{2}\ ,\ \frac{h+1}{2}\ ,\ \tfrac{1}{4}h\ ,\ \tfrac{1}{6}h\ ,\ \tfrac{1}{3}\ ,\ \tfrac{1}{4}\ ,\ \tfrac{1}{6}\,\ldots$$

u. s. w. dienen können.

Für $x = 0$ verschwinden beide Seiten der Gleichung: dividirt man aber vorher durch x, so wird

$$c.\chi h.\lim\frac{\chi x}{x} = \sum\,(-1)^n\,2n\pi i\,q^{n(n-1)}$$

*) *Eisenstein* in *Crelle's* Journal, Bd. 27, S. 185.

oder mit Berücksichtigung der Werthe von c und von (Art. 15)

$$\lim \frac{\chi x}{x} = \chi'(0) = \frac{2\pi}{i}\chi(h,h)$$

$$\chi h \cdot \chi h \cdot \chi h = \chi_1^{\,3}(q) = \Sigma(-1)^n n q^{n(n+1)} = \Sigma(4n+1)q^{2n(2n+1)} .$$

Von dieser Formel ist bereits im Art. 16. Gebrauch gemacht worden.

Die Gleichung für die Function fx können wir jetzt schreiben:

$$\chi(h,h)\, f(x,h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2 h\pi i}$$

und es ist auch unter dieser Form leicht ersichtlich, dass sowohl wenn x um h wächst, als wenn x sein Zeichen umkehrt, der entgegengesetzte Werth von fx erhalten wird. Die ebengefundene Summe aber ist eine bekannte elliptische Transscendente, indem nach der Bezeichnung von *Jacobi**)

$$\chi h \cdot fx = \frac{1}{i} e^{\frac{x^2\pi i}{h}} H(2Kx) .$$

29.

Die gefundene Gleichung

$$\chi(h,h)\chi(x,h)\chi(h-x,h) = \Sigma(-1)^n q^{n(n-1)} \omega^{2n}$$

oder

$$X(q,q)X(\omega,q)X(\frac{q}{\omega},q) = \Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \omega^n$$

gibt also die Reihenentwickelung eines Products dreier Functionen χ oder X, und lässt einige bemerkenswerthe Transformationen zu.

---

*) Nach der Bezeichnung der Fundamenta (1829), welche *Jacobi* auch in seinen späteren gedruckten Schriften beibehalten hat, während in *Crelle's* Journal, S. 308 des 3. Bandes (1828), Hx statt $H(\frac{2Kx}{\pi})$ geschrieben ist. In seinen Vorlesungen scheint *Jacobi* für dieselbe Function sich vorzugsweise des Functionszeichens $\vartheta_1(x)$ bedient zu haben.

Digitized by Google

Setzt man nämlich

$$n = mn' + \mu ,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeuten mag, so muss, damit n allen ganzen Werthen zwischen $\pm\infty$ gleich werde, auch n' dieselben Werthe annehmen, während μ ein vollständiges System incongruenter Zahlen nach dem Modul m zu durchlaufen hat. Dadurch erhält man die Doppelsumme

$$XqX\omega X\frac{q}{\omega} = \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}}(-1)^{\mu} q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \omega^{\mu} \sum_{n'}(-1)^{mn'} q^{\frac{1}{2}mn'(mn'+2\mu-1)} \omega^{mn'}$$

Schreibt man einen Augenblick zur Abkürzung

$$q_\mu = (-1)^{m+1} q^{\frac{1}{2}m(m+2\mu-1)} \quad , \quad q' = q^{mm}$$

so hat man

$$\sum_{n'} (-1)^{mn'} q^{\frac{1}{2}mn'(mn'+2\mu-1)} \omega^{mn'} = X(q',q') X(q_\mu \omega^m, q') X(\frac{q'}{q_\mu}\omega^{-m}, q')$$

folglich

$$X(q,q)\, X(\omega,q)\, X(\frac{q}{\omega},q) =$$

$$= X(q',q') \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{\mathrm{S}}} (-1)^{\mu} q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \omega^{\mu} X(q_\mu \omega^m, q')\, X(\frac{q'}{q_\mu}\omega^{-m}, q') .$$

Sei jetzt α eine $m$te Wurzel der Einheit, so wird

$$\alpha^{-p} X(q)\, X(\alpha\omega)\, X(\frac{q}{\alpha\omega}) =$$

$$= X(q') \underset{\mu}{\mathrm{S}} (-1)^{\mu} \alpha^{\mu-p} q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \omega^{\mu} X(q_\mu \omega^m)\, X(\frac{q'}{q_\mu}\omega^{-m})$$

und wenn man hier in Bezug auf die m verschiedenen Wurzelwerthe von α summirt, da $\sum_{(\alpha)} \alpha^{\mu-p} = 0$, wofern nicht $\mu \equiv p \bmod m$ ist:

$$X(q,q) \sum_{(\alpha)} \alpha^{-\mu} X(\alpha\omega,q) X(\frac{q}{\alpha\omega}, q) =$$

$$= m(-1)^{\mu} q^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)} \omega^{\mu} X(q',q')\, X(q_\mu \omega^m, q')\, X(\frac{q'}{q_\mu}\omega^{-m}, q') .$$

Für $m=2$ erhält man z. B. die Gleichungen

$$X(q,q)\{X(\omega,q)\,X(\tfrac{q}{\omega},q)+X(-\omega,q)\,X(-\tfrac{q}{\omega},q)\}=$$
$$=2X(q^4,q^4)\,X(-q\omega^2,q^4)\,X(-q^3\omega^{-2},q^4)$$

$$X(q,q)\{X(\omega,q)\,X(\tfrac{q}{\omega},q)-X(-\omega,q)\,X(-\tfrac{q}{\omega},q)\}=$$
$$=-2\omega X(q^4,q^4)\,X(-q^3\omega^2,q^4)\,X(-q\omega^{-2},q^4)$$

aus denen die früher angewandten Formeln

$$\chi_1(\chi_4^2+\chi_2^2)=2\chi_1(q^4)\,\chi_4^2(q^4)$$
$$\chi_1(\chi_4^2-\chi_2^2)=4q\,\chi_1(q^4)\,\chi_3^2(q^4)$$

des Art. 22 hervorgehen, wenn man q^2 statt q schreibt und $\omega=q$ setzt.

Eine fernere Transformation ergibt sich aus der einfachen Bemerkung, dass die Reihe der ganzen Zahlen erschöpft wird, wenn man zur Reihe der ungeraden Zahlen die Reihen der doppelten, vierfachen, achtfachen u. s. w. ungeraden Zahlen hinzufügt. Daraus folgt sogleich

$$\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\,\omega^n=-\Sigma q^{n(2n+1)}\,\omega^{2n+1}+\Sigma q^{(2n+1)(4n+1)}\,\omega^{4n+2}+$$
$$+\Sigma q^{(4n+2)(8n+3)}\,\omega^{8n+4}+\Sigma q^{(8n+4)(16n+7)}\,\omega^{16n+8}+\ldots$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\omega X(q^4,q^4)\,X(-q^3\omega^2,q^4)\,X(-q\omega^{-2},q^4)=\Sigma(q^n\omega)^{2n+1}=\Psi(\omega,q)$$

geschrieben wird:

$$X(q,q)\,X(\omega,q)\,X(\tfrac{q}{\omega},q)=-\Psi(\omega,q)+\Psi(q\omega^2,q^4)+\Psi(q^6\omega^4,q^{16})+$$
$$+\Psi(q^{28}\omega^8,q^{64})+\Psi(q^{120}\omega^{16},q^{256})+\ldots$$

Digitized by Google

30.

Wir haben gesehen, dass die Function

$$\chi(h,h)\,f(x,h) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2} = F(x)$$

in Bezug auf den Modul h halbperiodisch ist. Durch Hinzufügung des Exponentialfactors $e^{-\frac{x^2\pi i}{h}}$ erhält man dagegen eine Function, welche wie die erzeugende Function $\frac{x}{\sin x\pi}$ mit dem Modul 1 halbperiodisch ist. Diess zeigt die Gleichung

$$e^{-\frac{x^2\pi i}{h}} Fx = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} \omega^{2n-1} .$$

Man kann diesen Satz verallgemeinern, indem man die Grösse

$$h' = lh + l'$$

als Periodicitätsmodul einführt, wo l und l' beliebige ganze Zahlen bedeuten, die wir ohne gemeinschaftlichen Factor voraussetzen. Alsdann folgt das leicht erweisliche Theorem, dass das Product

$$e^{-\frac{l'x^2\pi i}{hh'}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2} = \Phi x$$

sein Vorzeichen umkehrt, wenn man x um h' wachsen lässt.

Durch Aenderung des Argumentes um die halben Moduln erhält man die Cofunctionen von Fx, als welche sich hier die drei Functionen

$$F(x+\tfrac{h}{2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{x}{h})^2} = F_1(x)$$

$$F(x+\tfrac{1}{2}) = -i\, e^{(x+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{h}} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2})^2}$$

$$F(x+\tfrac{h+1}{2}) = e^{(x+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{h}} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{x}{h})^2}$$

Digitized by Google

darbieten, sämmtlich halbperiodisch wie $F(x)$. Schreibt man der Kürze halber, mit Weglassung der Factoren vor dem Summenzeichen,

$$F_2(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{x}{h}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$F_2(x+\tfrac{1}{2}h) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{x}{h}\right)^2} = F_3(x)$$

so bleiben diese Functionen ungeändert, wenn man x um h wachsen lässt. *Jacobi* gebraucht die Bezeichnungen

$$H(x) = ie^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}} F\left(\frac{x}{2K}\right),$$

$$\Theta(x) = e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}} F_1\left(\frac{x}{2K}\right),$$

$$H(x+K) = e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}} F_2\left(\frac{x}{2K}\right)$$

$$\Theta(x+K) = e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}} F_3\left(\frac{x}{2K}\right)$$

woraus für $x=0$ die Ausdrücke hervorgehen

$$\Theta(0)=F_1(0)=\Sigma(-1)^n q^{nn}=\chi_1\chi_2^2=\sqrt{\frac{2\varkappa'K}{\pi}}$$

$$H(K)=F_2(0)=\Sigma q^{(n-\frac{1}{2})^2}=2q^{\frac{1}{4}}\chi_1\chi_3^2=\sqrt{\frac{2\varkappa K}{\pi}}$$

$$\Theta(K)=F_3(0)=\Sigma q^{nn}=\chi_1\chi_4^2=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

und nach Division durch x

$$\lim\frac{H(x)}{x}=H'(0)=\frac{i}{2K}F'(0)=\frac{\pi}{2K}2q^{\frac{1}{4}}\chi_1^3=\sqrt{\frac{2\varkappa\varkappa'K}{\pi}}\ .$$

Von besonderer Wichtigkeit aber ist die Eigenschaft, dass die Quotienten der Functionen F in Bezug auf die beiden Moduln h und 1 gleichzeitig periodisch werden, wie sich aus der Verification der Gleichungen

Digitized by Google

$$F(x+1) = -e^{(2x+1)\frac{\pi i}{h}} F(x)$$

$$F_1(x+1) = e^{(2x+1)\frac{\pi i}{h}} F_1(x)$$

$$F_2(x+1) = -e^{(2x+1)\frac{\pi i}{h}} F_2(x)$$

$$F_3(x+1) = e^{(2x+1)\frac{\pi i}{h}} F_3(x)$$

unmittelbar ergibt. Wir sind auf diese Weise zu Functionen von doppelter Periodicität gelangt, welche Eigenschaft bekanntlich den wesentlichen Charakter der elliptischen Functionen bildet.

Digitized by Google

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHALT.

	Seite
A. F. Möbius, Geometrische Entwickelung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel	1
Herm. Hankel, Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche. Vorgelegt von W. Scheibner	17
O. Schlömilch, Ueber die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung.	23
K. G. Lehmann, Ueber verschiedene Untersuchungen, welche in letzter Zeit im chemischen Laboratorium zu Jena ausgeführt worden sind	35
O. Schlömilch, Ueber die Complanation gewisser Fusspunktflächen	51
W. G. Hankel, Ueber die von G. Meissner an der Oberfläche des menschlichen Körpers beobachteten elektrischen Erscheinungen	56
W. Scheibner, Ueber periodische Functionen	64

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

13

3

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 106 283 245

Digitized by Google